

Melhores momentos

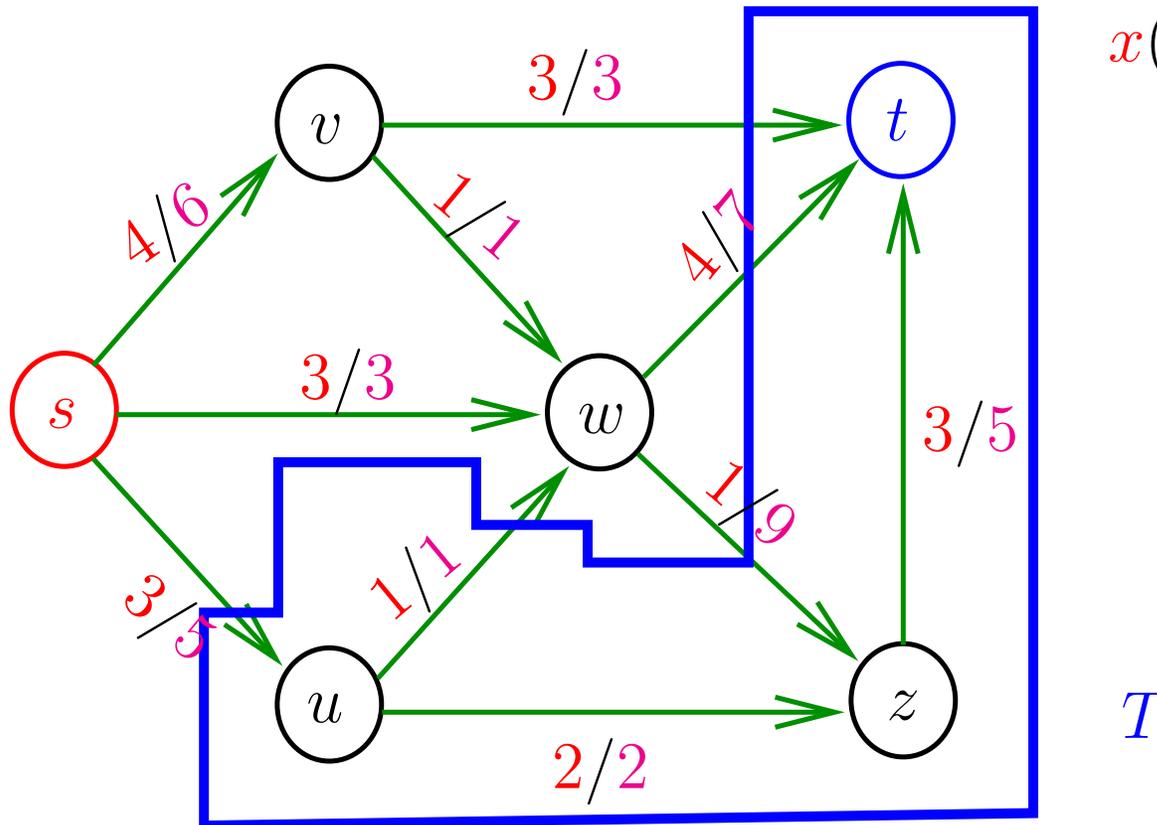
AULA PASSADA

Lema da dualidade

Se x é um st -fluxo que respeita u e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte então

$$\text{val}(x) \leq u(\bar{T}, T).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 10 < 3 + 7 + 9 + 5 = 24 = u(\bar{T}, T)$.

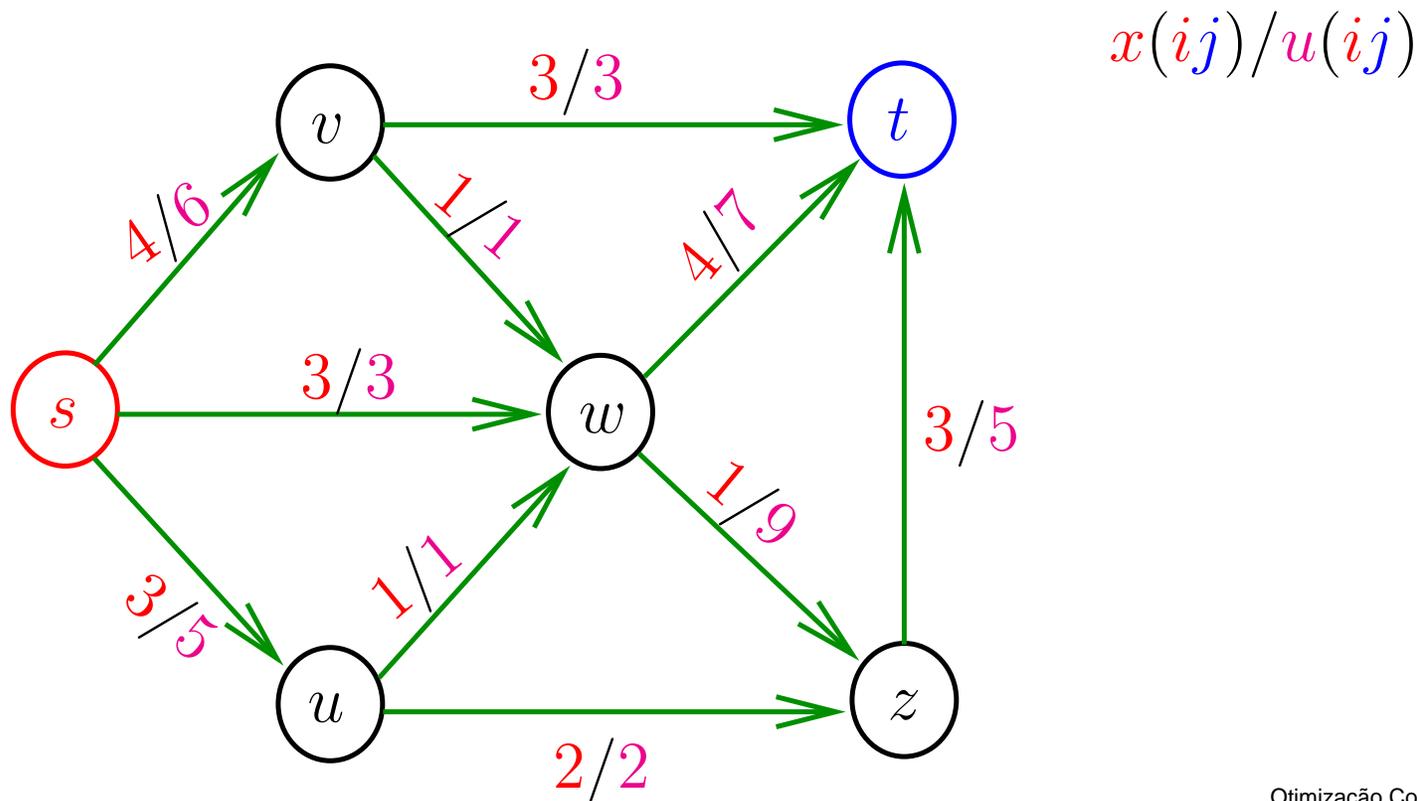


Consequência

Se x é um st -fluxo que respeita u e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T)$$

então x é um st -fluxo de **valor máximo** e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte de **capacidade mínima**.

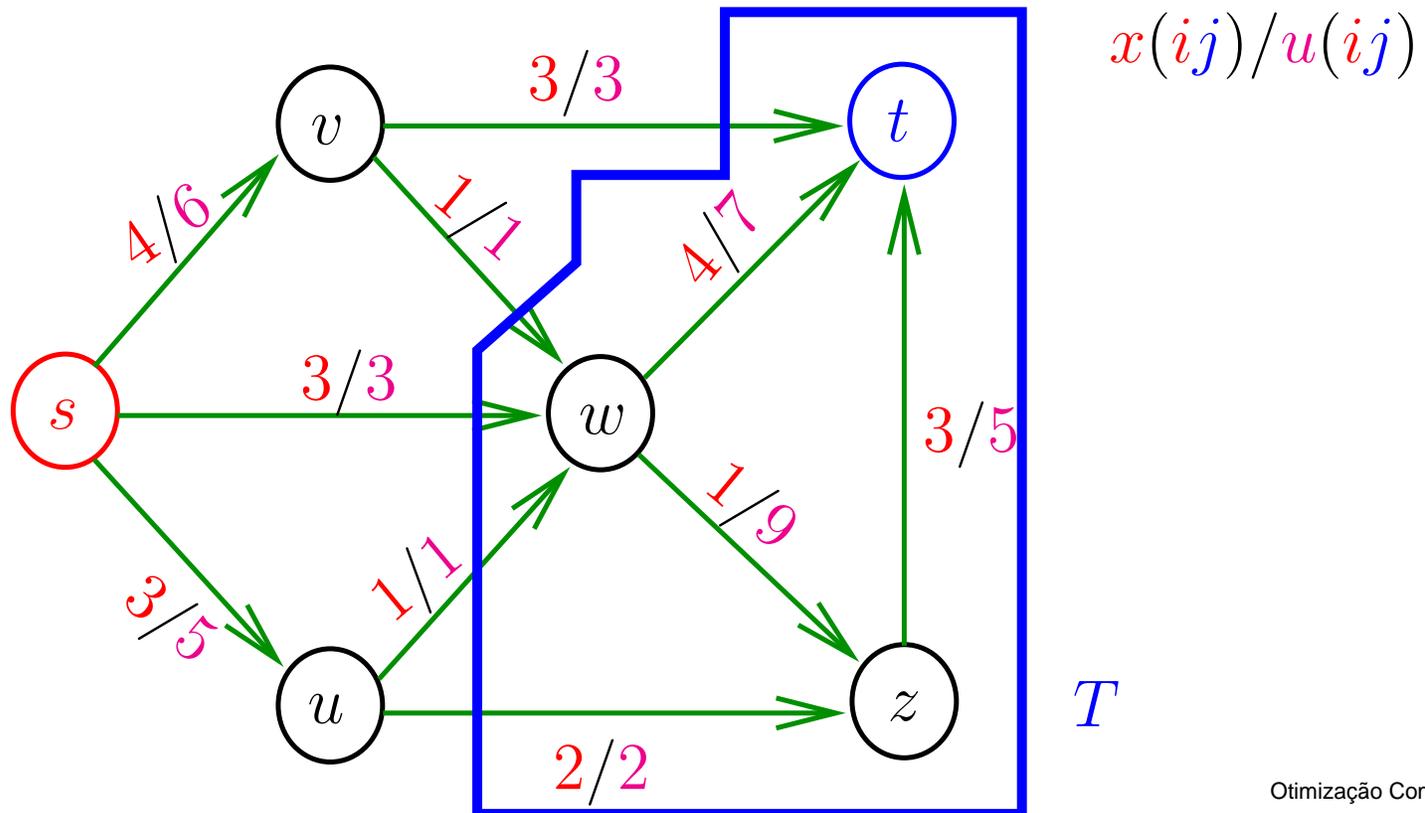


Consequência

Se x é um st -fluxo que respeita u e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T)$$

então x é um st -fluxo de **valor máximo** e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte de **capacidade mínima**.

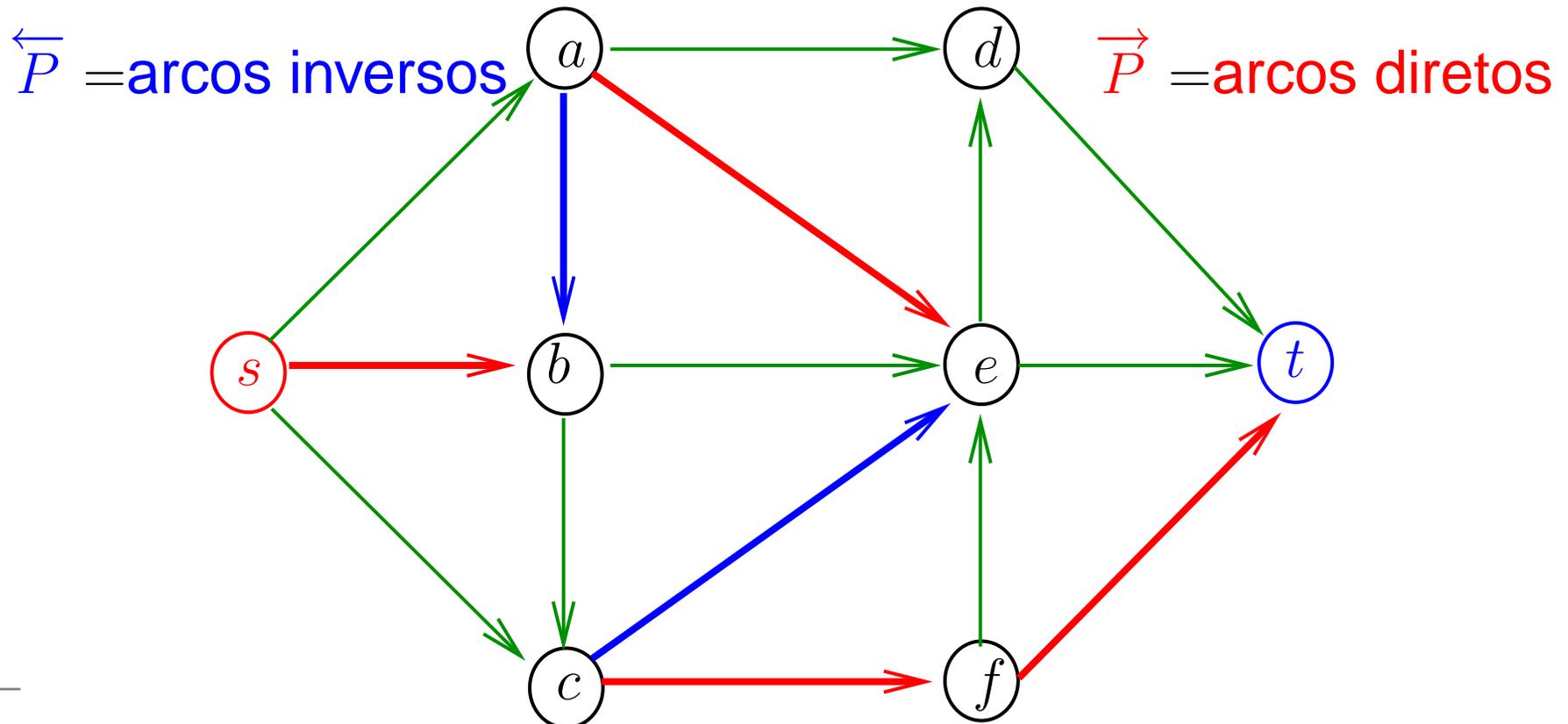


Pseudo-caminho

Um **pseudo-caminho** é uma seqüência

$$\langle i_0, a_1, i_1, \dots, a_q, i_q \rangle$$

em que i_0, \dots, i_q são nós distintos e $a_k = i_{k-1}i_k$ ou $a_k = i_k i_{k-1}$.

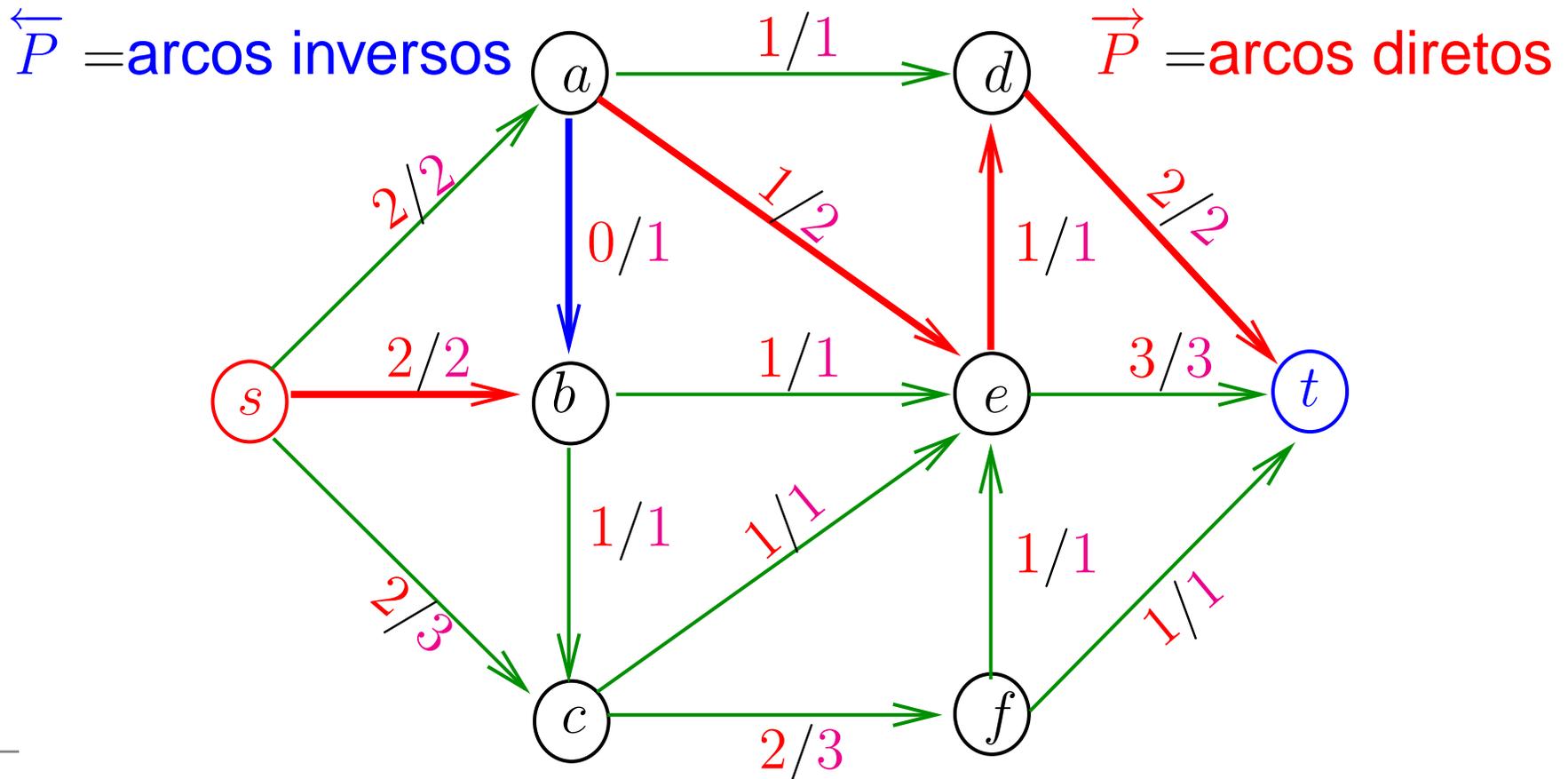


Pseudo-caminho de incremento

Um pseudo-caminho P é **de incremento** se

$$x(ij) < u(ij) \quad \text{para cada } ij \text{ em } \vec{P}$$

$$x(ij) > 0 \quad \text{para cada } ij \text{ em } \overleftarrow{P}$$

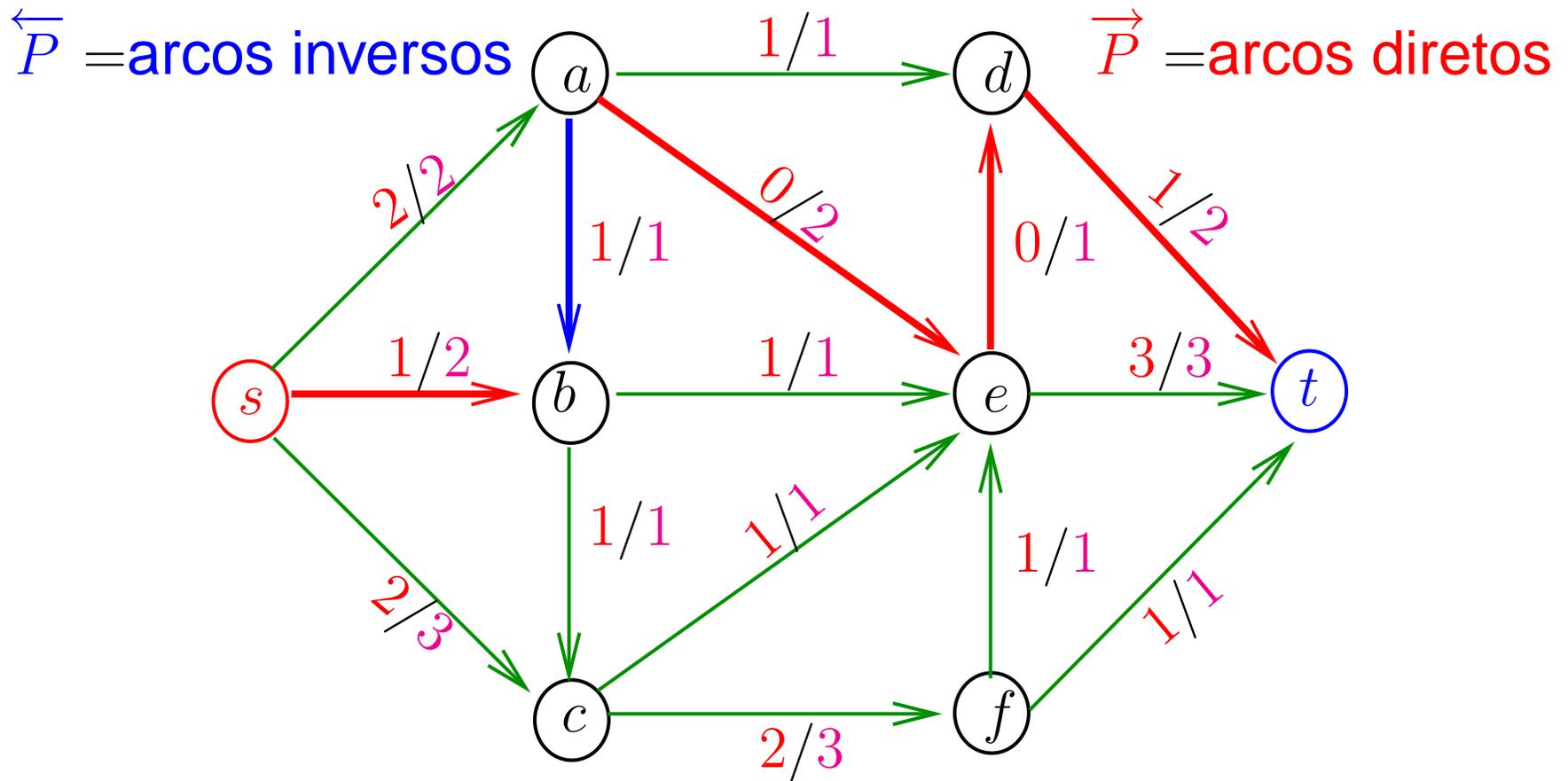


Lema do incremento

Se x é um st -fluxo e P é um pseudo-caminho de incremento de s a t , então x não é um fluxo máximo.

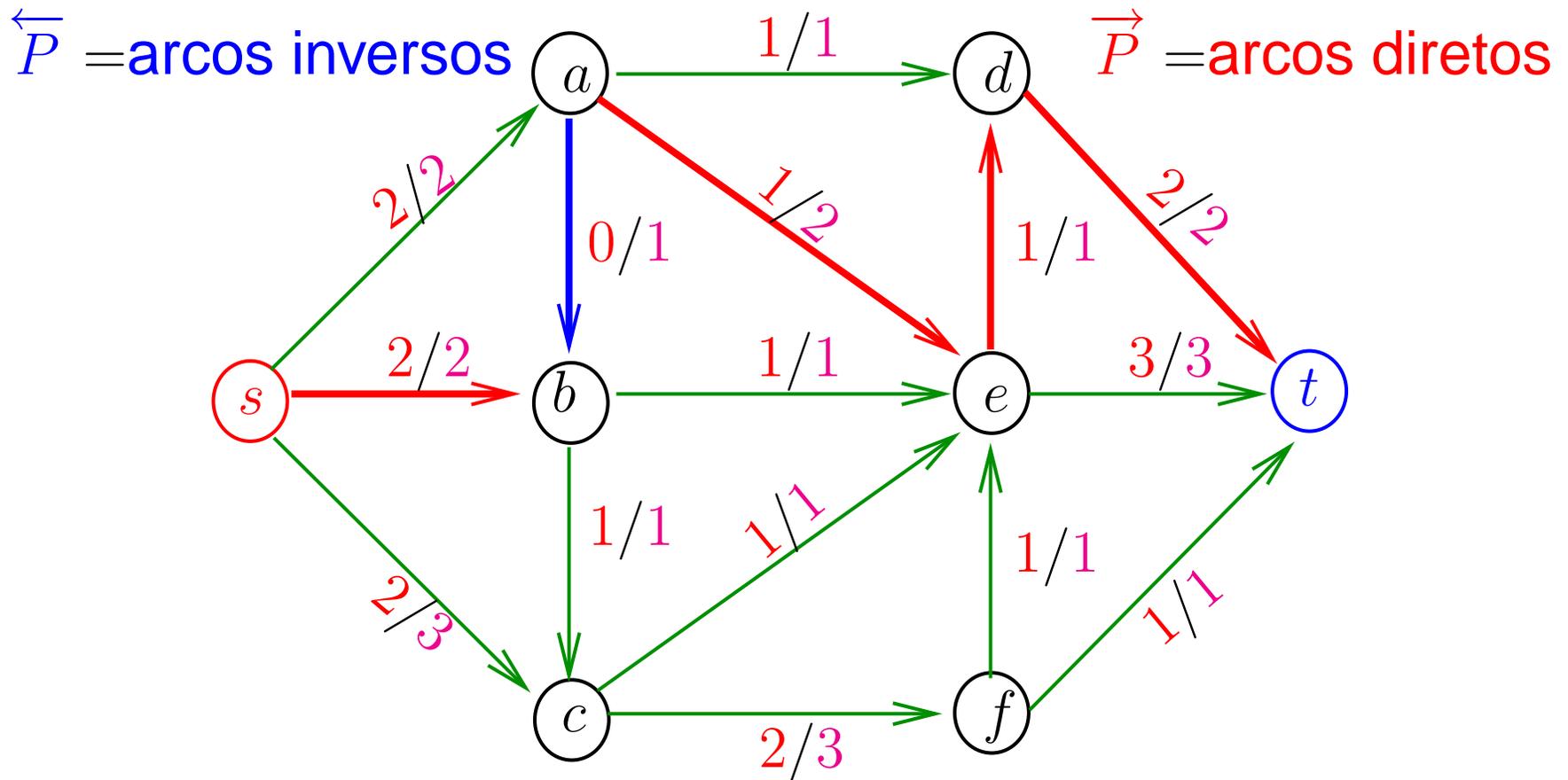
Lema do incremento

Se x é um st -fluxo e P é um pseudo-caminho de incremento de s a t , então x não é um fluxo máximo.



Lema do incremento

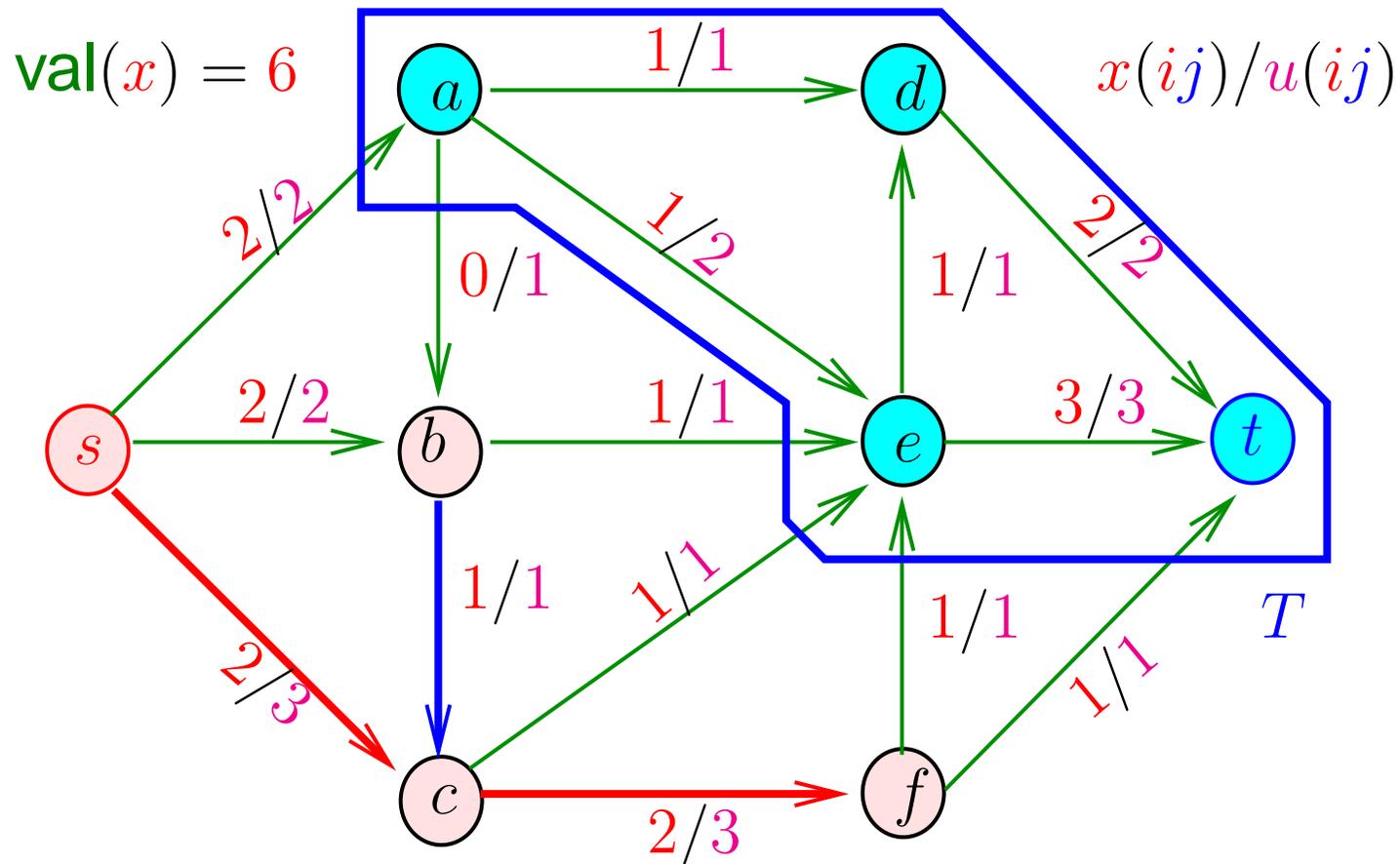
Se x é um st -fluxo e P é um pseudo-caminho de incremento de s a t , então x não é um fluxo máximo.



Lema do certificado

Se x é um st -fluxo e **não existe** um pseudo-caminho de incremento de s a t , então existe um st -corte $\nabla(\bar{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T).$$



Ford e Fulkerson

Método dos caminhos de incremento

PASSO DE INCREMENTO: encontre um pseudo-caminho de incremento (para o fluxo corrente). Incremente o valor do fluxo “enviando $\delta > 0$ unidades de fluxo através do caminho”.

Note que o método não especifica **como** encontrar o pseudo-caminho de incremento.

Algoritmo de Ford e Fulkerson

Recebe uma rede (N, A, u) com função-capacidade u e nós s e t e **devolve** um st fluxo máximo x e um st -corte mínimo $\nabla(\bar{T}, T)$.

FORD-FULKERSON (N, A, u, s, t)

1 $x \leftarrow 0$

2 **repita**

3 $A_x \leftarrow \{ij \in A : x(ij) < u(ij)\} \cup \{ji : x(ij) > 0\}$

4 $\langle y, P \rangle \leftarrow \text{BUSCA}(N, A_x, s, t)$

5 **se** $y(t) - y(s) = 0$

6 **então** $x \leftarrow \text{INCREMENTE-FLUXO}(x, P)$

7 **até que** $y(t) - y(s) > 0$

8 $T \leftarrow \{j : y(j) - y(s) > 0\}$

9 **devolva** x e T

Algoritmo de incremento

Recebe um *st*-fluxo x e um pseudo-caminho de incremento P e **devolve** o fluxo x após enviar “ δ unidades de fluxo através de P ”.

INCREMENTE-FLUXO (x, P)

- 1 $\delta_1 \leftarrow \min\{x(ij) : ij \text{ é arco de } \overleftarrow{P}\}$
- 2 $\delta_2 \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij \text{ é arco de } \overrightarrow{P}\}$
- 3 $\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$
- 4 **para cada** arco ij em P **faça**
- 5 **se** $ij \in \overrightarrow{P}$
- 6 **então** $x(ij) \leftarrow x(ij) + \delta$
- 7 **senão** $x(ij) \leftarrow x(ij) - \delta$
- 8 **devolva** x

Invariante

Na linha 2 e na linha 7 valem as seguintes invariantes:

(i0) x é inteiro;

(i1) x é um st -fluxo;

(i2) x respeita u .

AULA 16

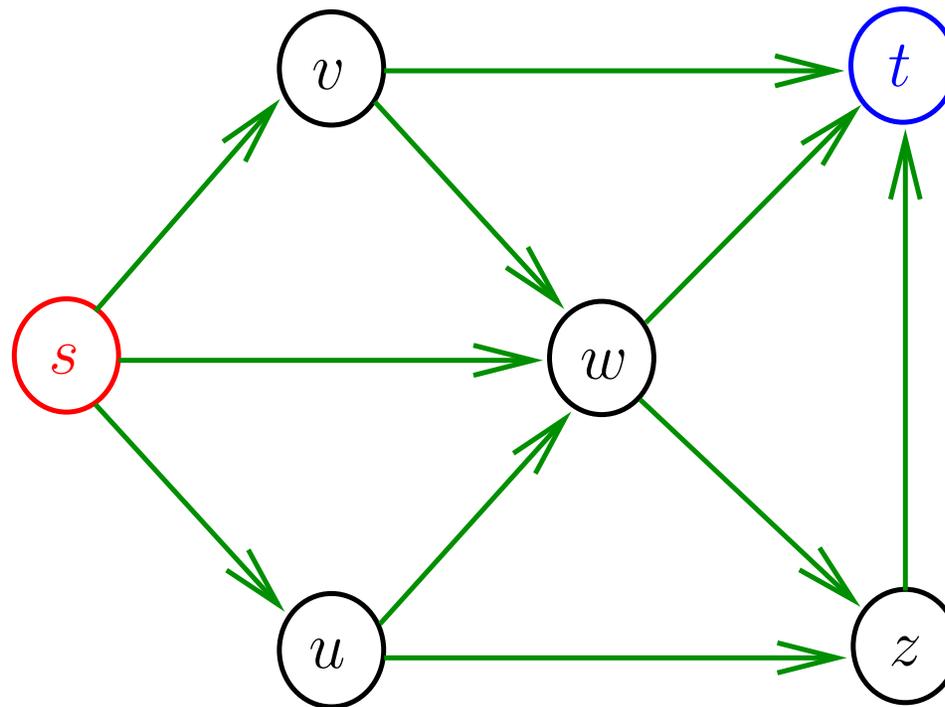
Redes simétricas e pseudofluxos

PF 12.1, 12.2, 12.3, 12.4

Grafos simétricos

Um grafo (N, A) é **simétrico** se $ji \in A$ sempre que $ij \in A$.

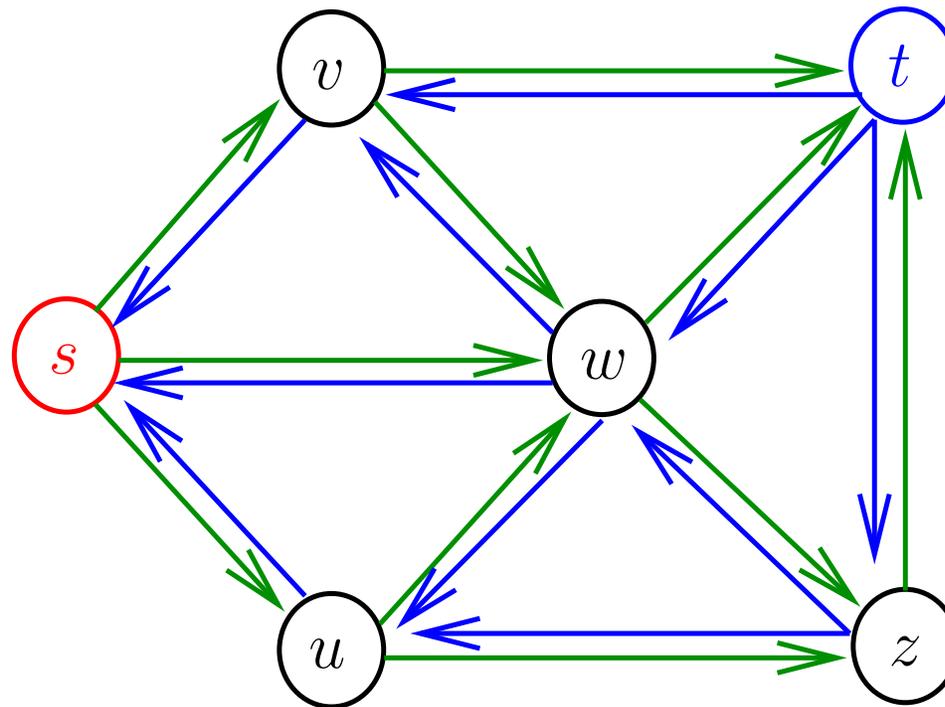
Exemplo: grafo **não-simétrico**



Grafos simétricos

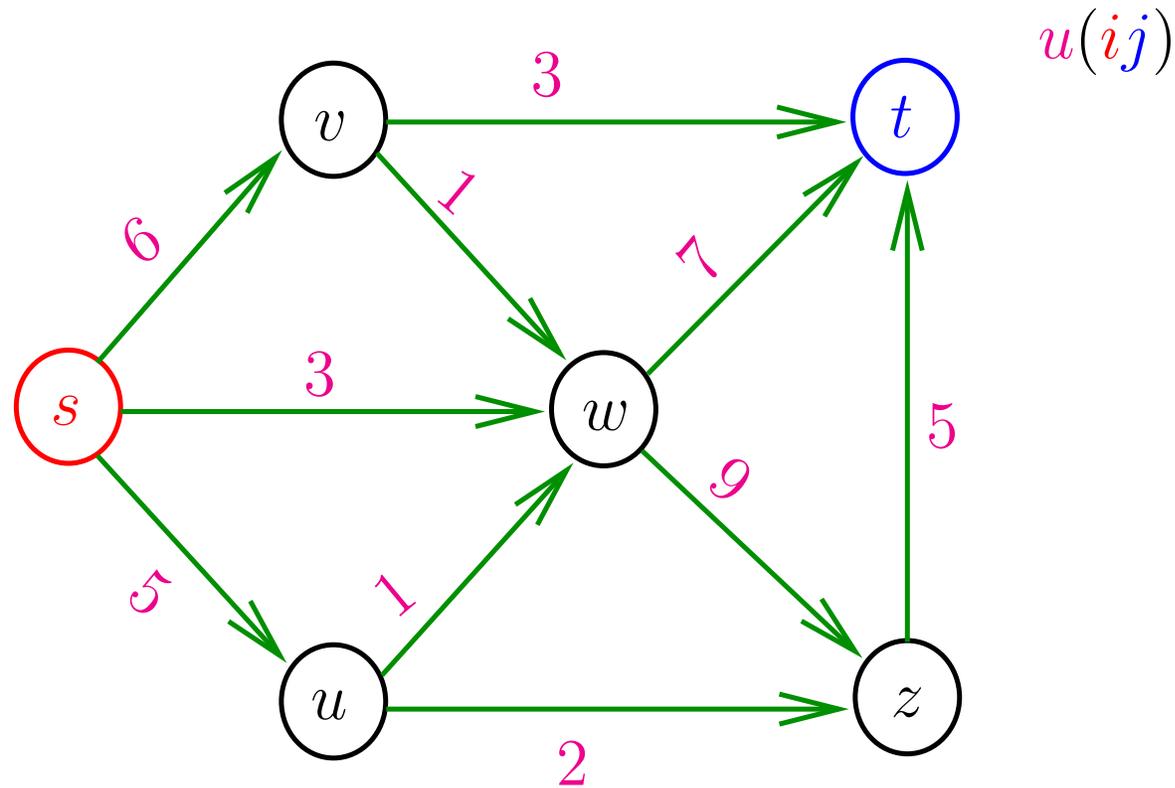
Um grafo (N, A) é **simétrico** se $ji \in A$ sempre que $ij \in A$.

Exemplo: grafo **simétrico**



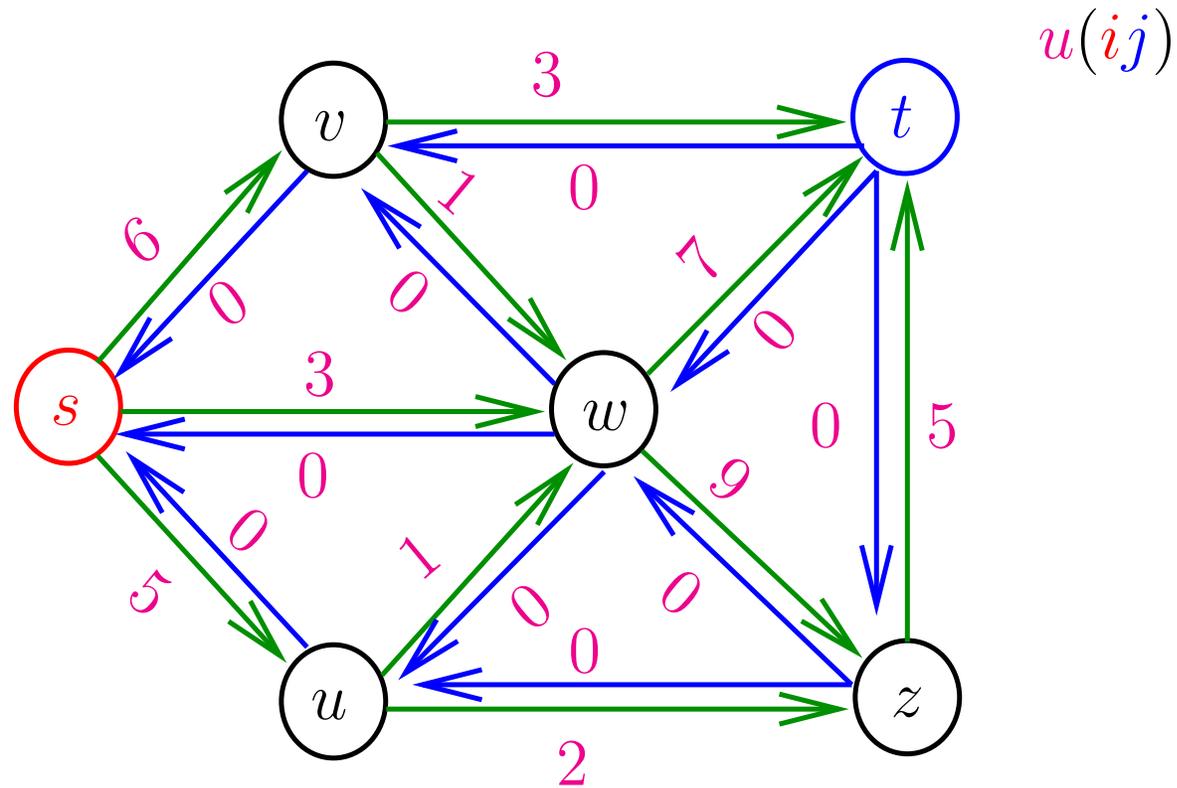
Fluxos em redes simétricas

Basta saber resolver o problema do fluxo máxima em **redes simétricas**.



Fluxos em redes simétricas

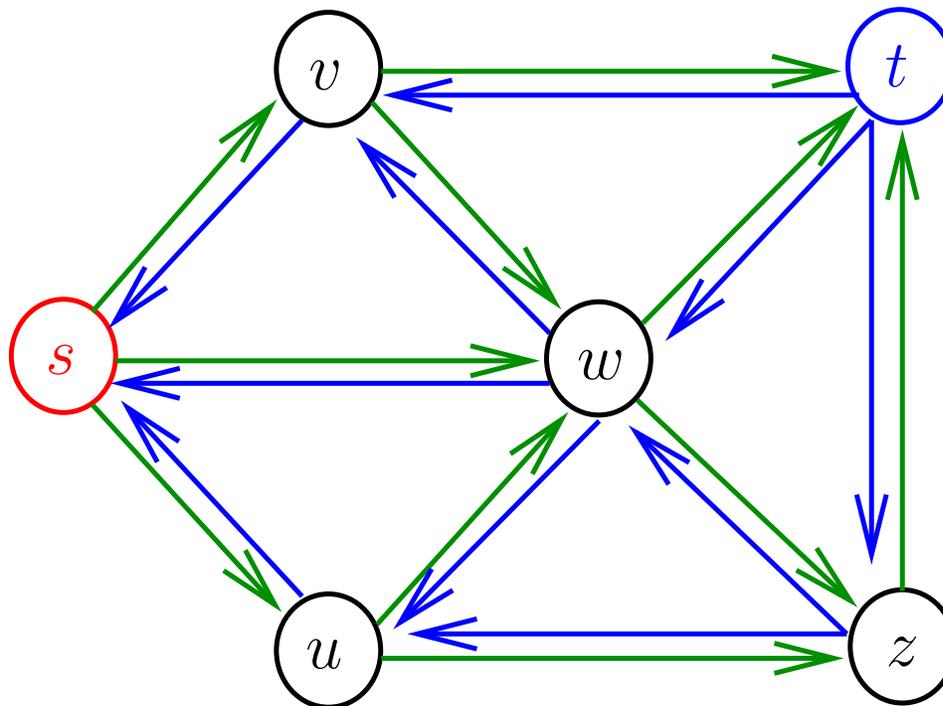
Basta saber resolver o problema do fluxo máxima em **redes simétricas**.



Estrutura de dados

Suporemos que a estrutura que representa o grafo simétrico permite acesso rápido ao “irmão” de cada arco:

dado uma arco ij , é possível obter o arco ji em tempo $O(1)$.



Fluxos normalizados

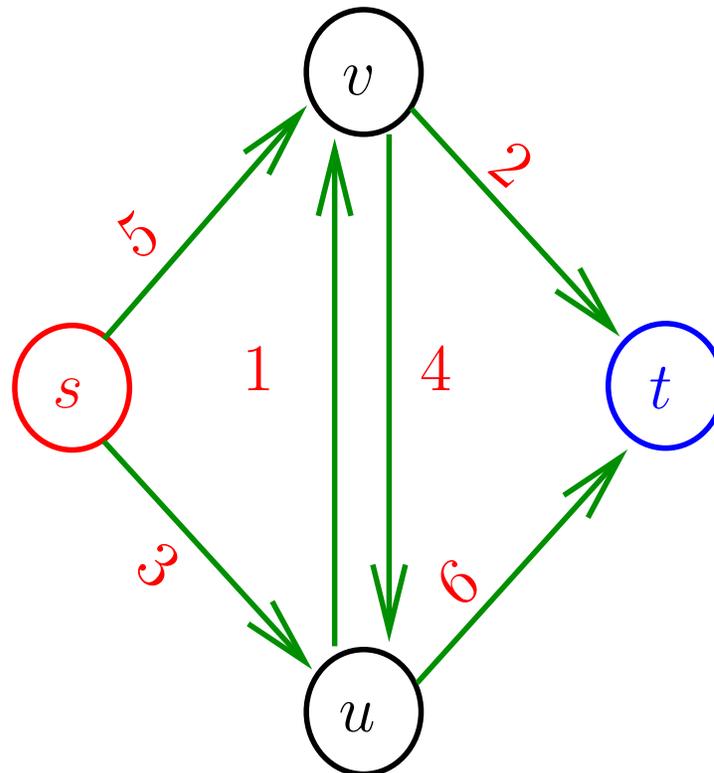
Um fluxo x é **normalizado** se, para cada arco ij , tem-se que

$$x(ij) = 0 \text{ ou } x(ji) = 0.$$

É fácil transformar um fluxo num normalizado de mesmo valor.

$$\text{val}(x) = 8$$

$$x(ij)$$



Fluxos normalizados

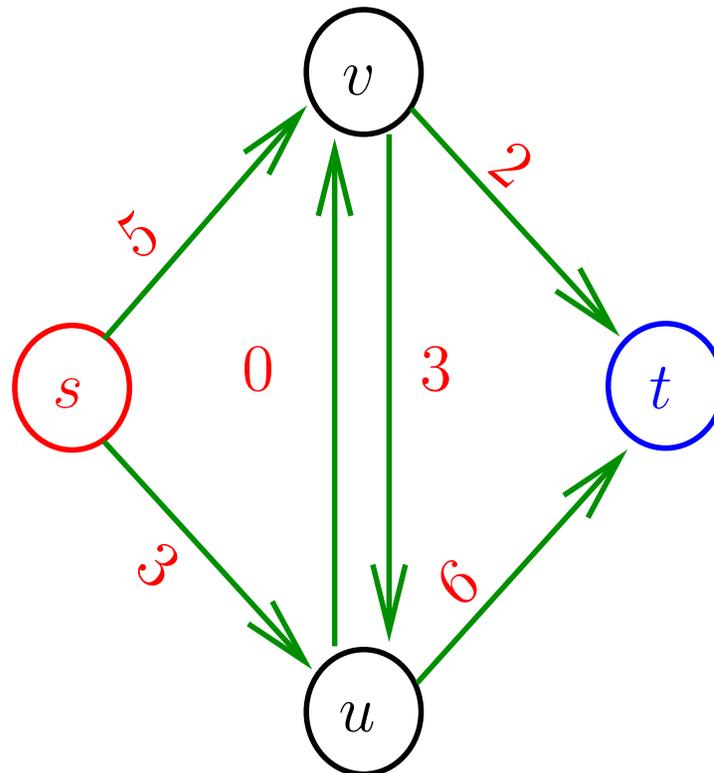
Um fluxo x é **normalizado** se, para cada arco ij , tem-se que

$$x(ij) = 0 \text{ ou } x(ji) = 0.$$

É fácil transformar um fluxo num normalizado de mesmo valor.

$$\text{val}(x) = 8$$

$$x(ij)$$



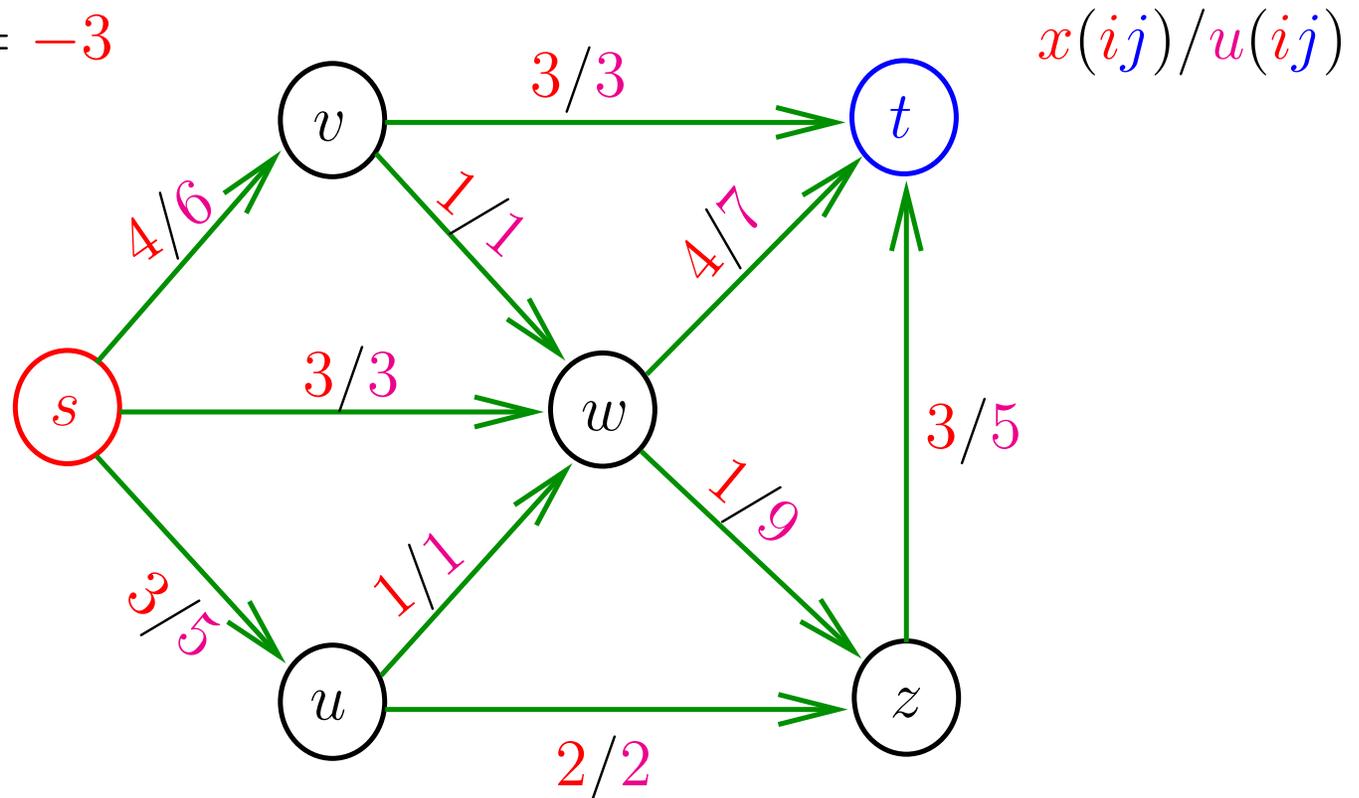
Fluxos e pseudofluxos

Dado um fluxo x em um grafo simétrico (N, A) , o correspondente **pseudofluxo** \check{x} é definido da seguinte maneira:

$$\check{x}(ij) := x(ij) - x(ji)$$

para cada arco ij .

$$\check{x}(tv) = -3$$

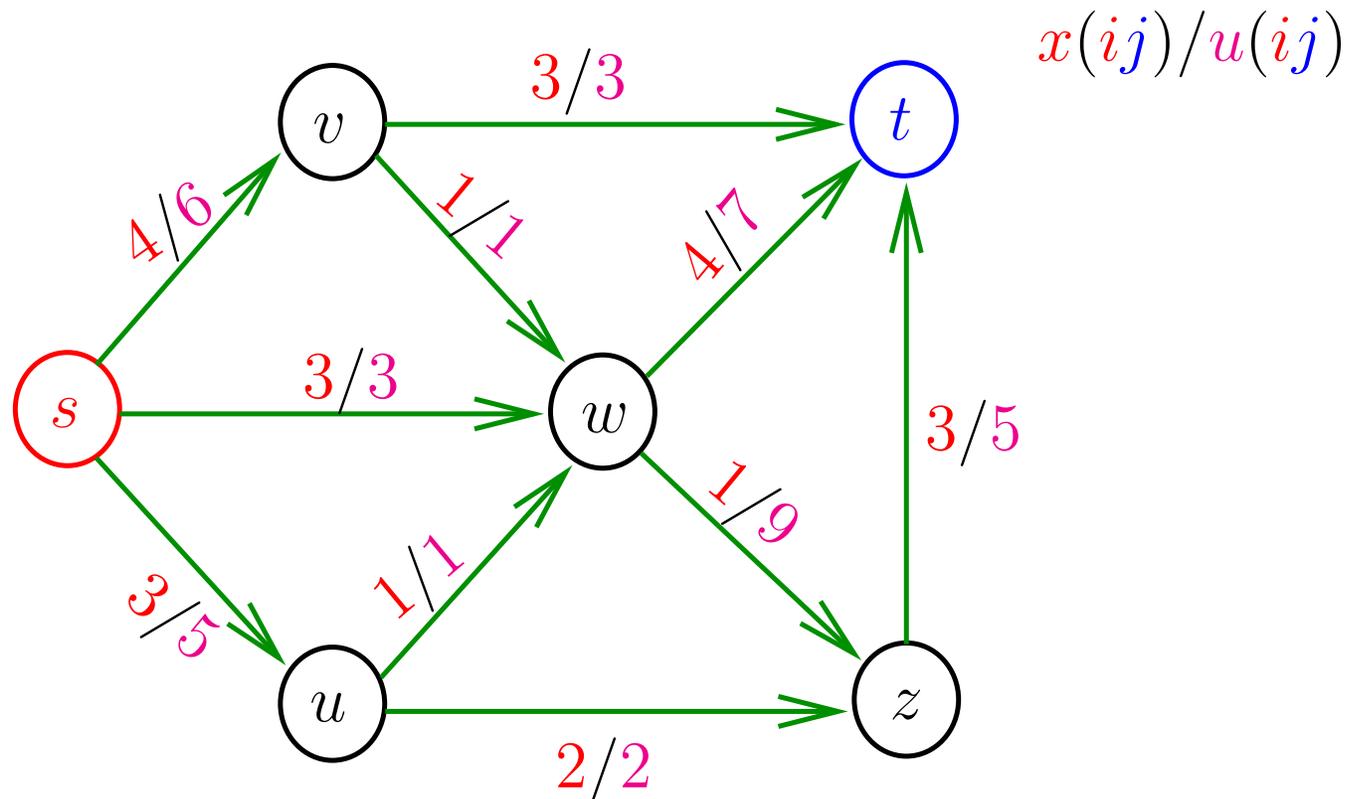


Fluxos e pseudofluxos

O valor $\check{x}(ij)$ pode ser entendido como a “intensidade do fluxo de i a j ao longo do par (ij, ji) ”.

Propriedade: $\check{x}(ij) = -\check{x}(ji)$

Exemplo: $\check{x}(tv) = -3, \check{x}(vt) = 3, \check{x}(vs) = -4$



Tradução

O **excesso** ou **acúmulo** de um pseudofluxo \check{x} em uma subconjunto T de N é

$$\check{x}(\bar{T}, T) := \sum (\check{x}(ij) : i \in \bar{T} \text{ e } j \in T)$$

Um **st -pseudofluxo** é qualquer pseudofluxo \check{x} tal que

$$\check{x}(\bar{j}, j) = 0 \text{ para cada nó } j \text{ em } N - \{s, t\} \text{ e } \check{x}(\bar{t}, t) \geq 0.$$

Numa rede simétrica com função-capacidade u , dizemos que um pseudofluxo \check{x} respeita u se

$$-u(ji) \leq \check{x}(ij) \leq u(ij)$$

para todo arco ij em A .

Fluxo para pseudofluxo

Recebe um fluxo x em uma rede simétrica e devolve, em tempo $O(m)$, o correspondente pseudofluxo.

PSEUDOFLUXO (x)

- 1 para cada ij em A faça
- 2 $\check{x}(ij) \leftarrow x(ij) - x(ji)$
- 3 devolva \check{x}

- $\text{val}(x) = x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) = \check{x}(\bar{t}, t)$
- x respeita u se e só se \check{x} respeita u
- $\check{x}(\bar{T}, T) = -\check{x}(T, \bar{T})$

Pseudofluxo para fluxo

Recebe um pseudofluxo \check{x} em uma rede simétrica e **devolve**, em tempo $O(m)$, o correspondente fluxo.

FLUXO (\check{x})

```
1  para cada  $ij$  em  $A$  faça
2      se  $\check{x}(ij) \geq 0$ 
3          então  $x(ij) \leftarrow \check{x}(ij)$ 
4          senão  $x(ij) \leftarrow 0$ 
3  devolva  $x$ 
```

- x é um fluxo normalizado
- $\text{val}(x) = x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) = \check{x}(\bar{t}, t)$
- se \check{x} respeita u então x respeita u

Grafo residual

Suponha que x é um fluxo que respeita u numa rede simétrica.

Seja \check{x} o correspondente pseudofluxo.

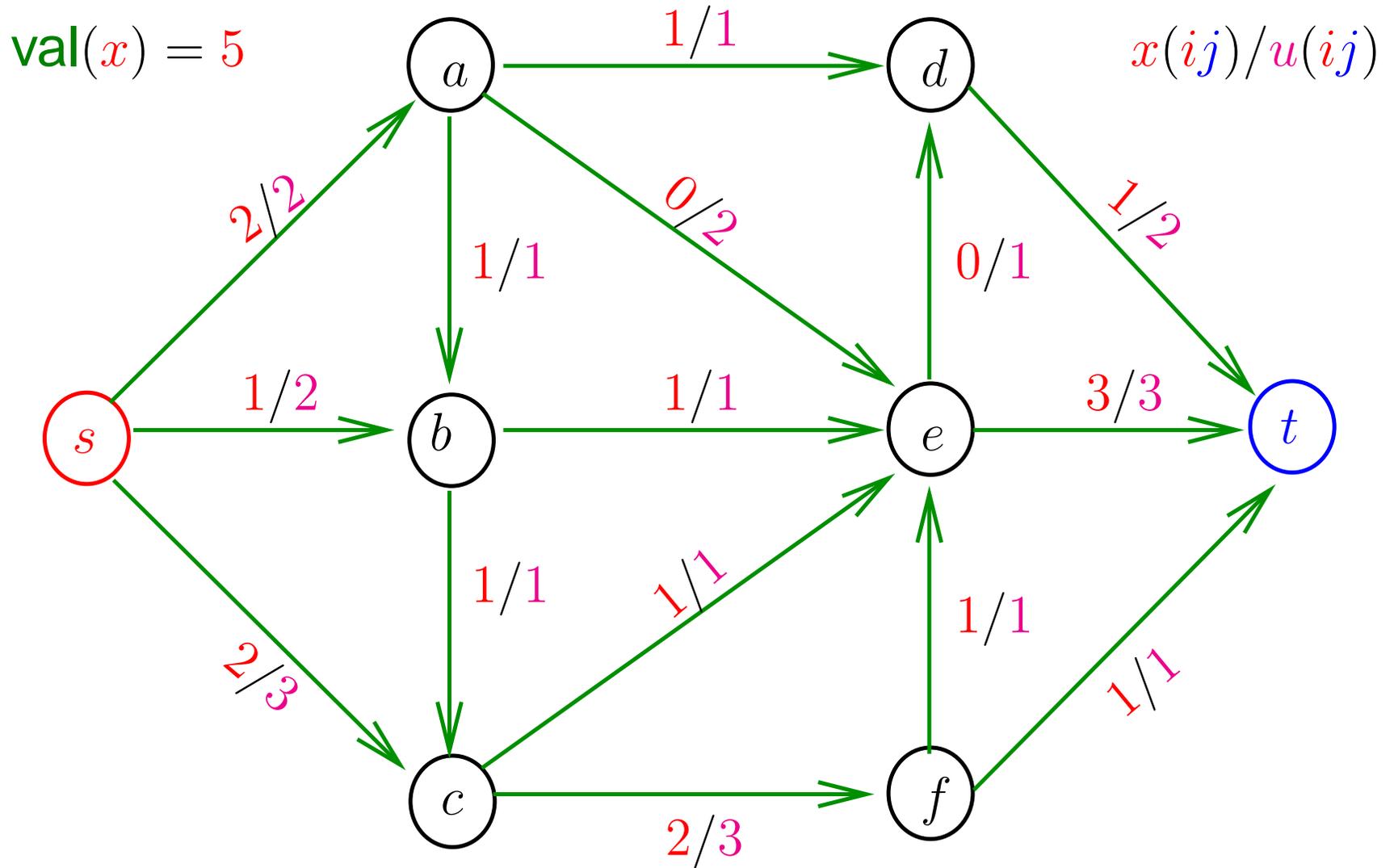
Seja $A_{\check{x}}$ o conjunto dos arcos ij que têm $\check{x}(ij) < u(ij)$:

$$A_{\check{x}} := \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}.$$

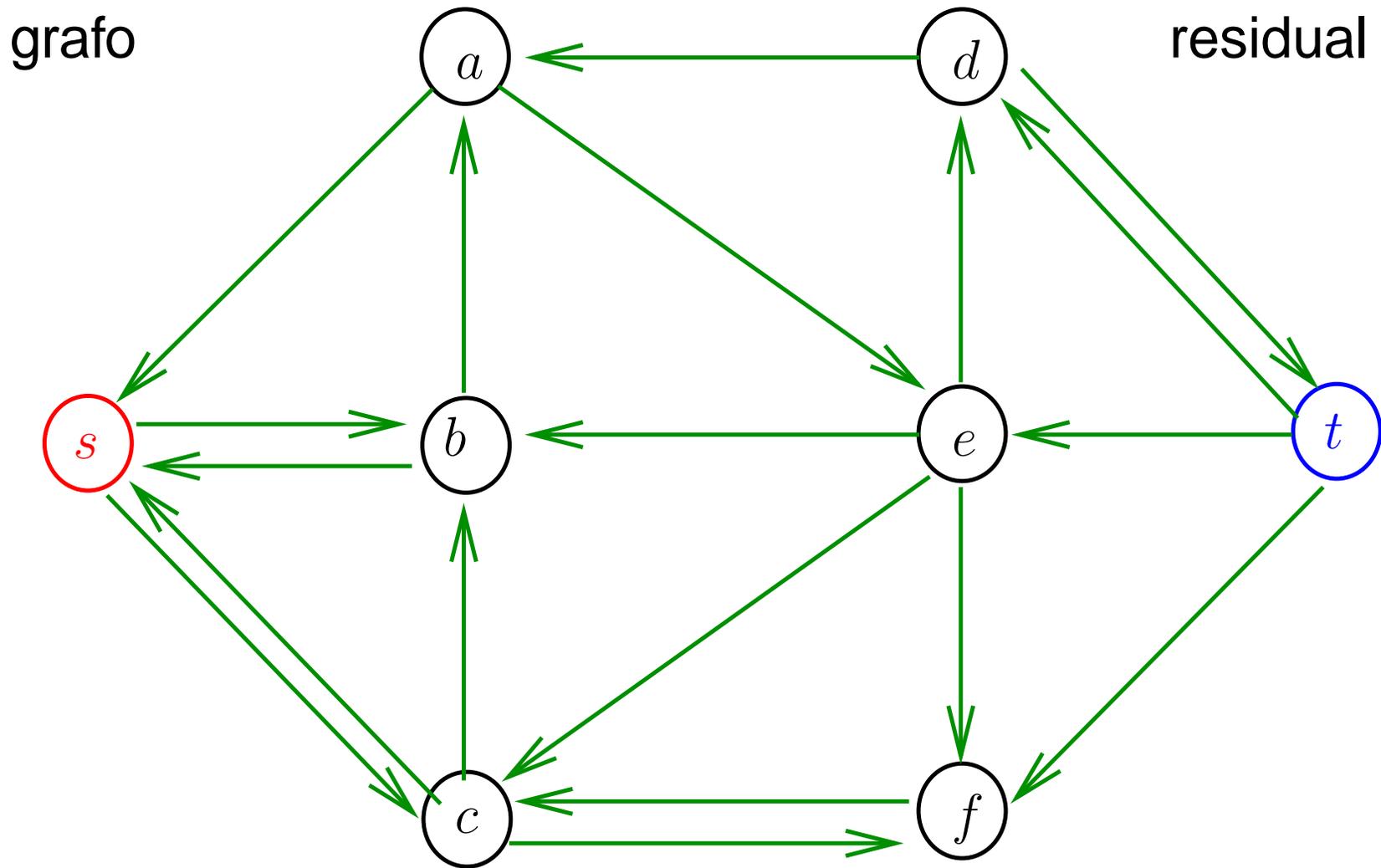
Diremos que $(N, A_{\check{x}})$ é o **grafo residual** (= *residual graph*) correspondente a x .

Propriedade: pseudo-caminhos de incremento são meros caminhos (dirigidos) no grafo residual.

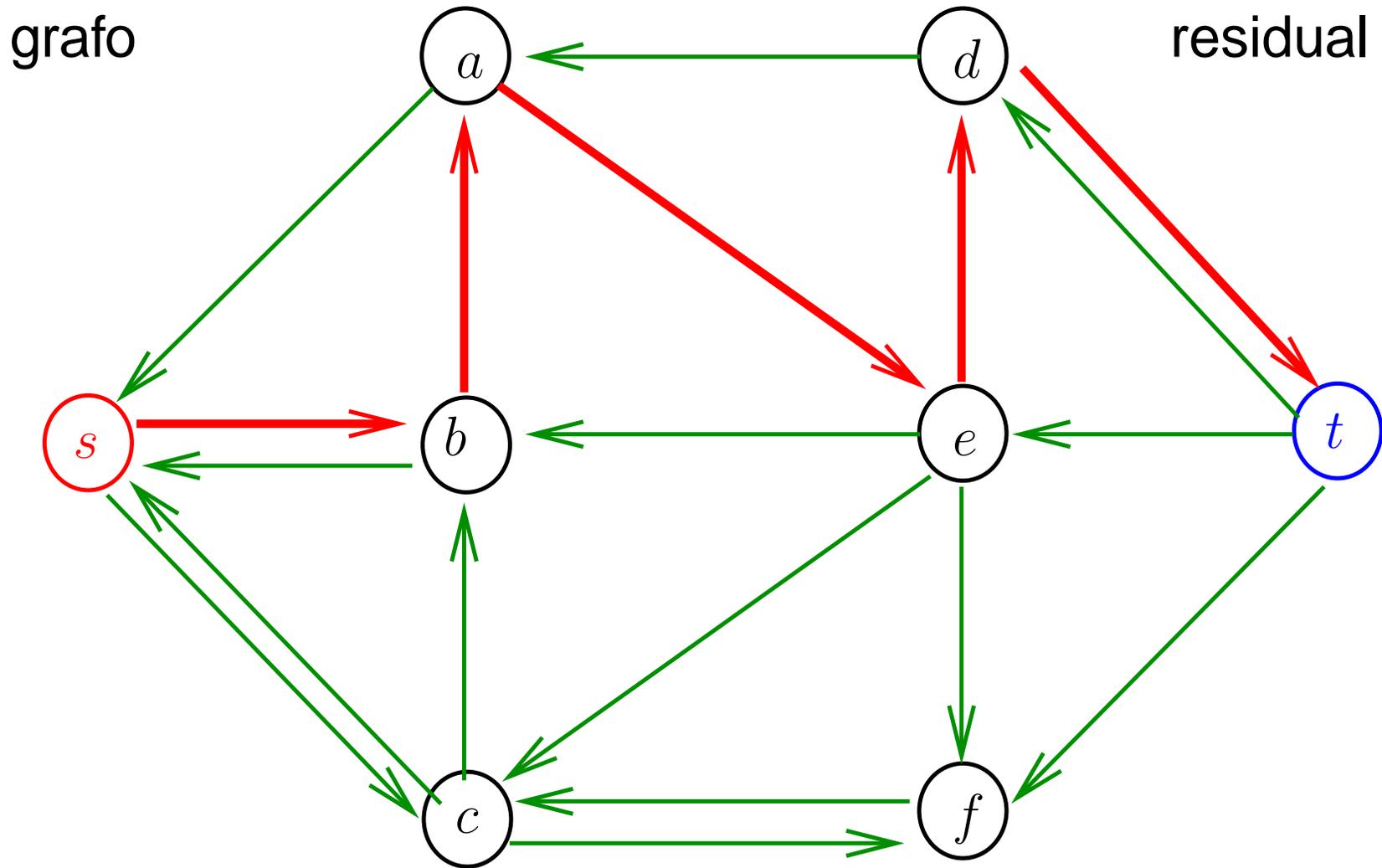
Um fluxo



Correspondente grafo residual



Exemplo de caminho de incremento



Rede residual

Suponha que x é um fluxo que respeita u numa rede simétrica.

Seja \check{x} o correspondente pseudofluxo.

Sejam $A_{\check{x}}$ o conjunto dos arcos ij que têm $\check{x}(ij) < u(ij)$ e u' a **função-capacidade residual** de $A_{\check{x}}$ em \mathbb{Z}_{\geq} dada por

$$u'(i, j) := u(ij) - \check{x}(ij)$$

Diremos que $(N, A_{\check{x}}, u')$ é a **rede residual** (= *residual network*) correspondente a x .

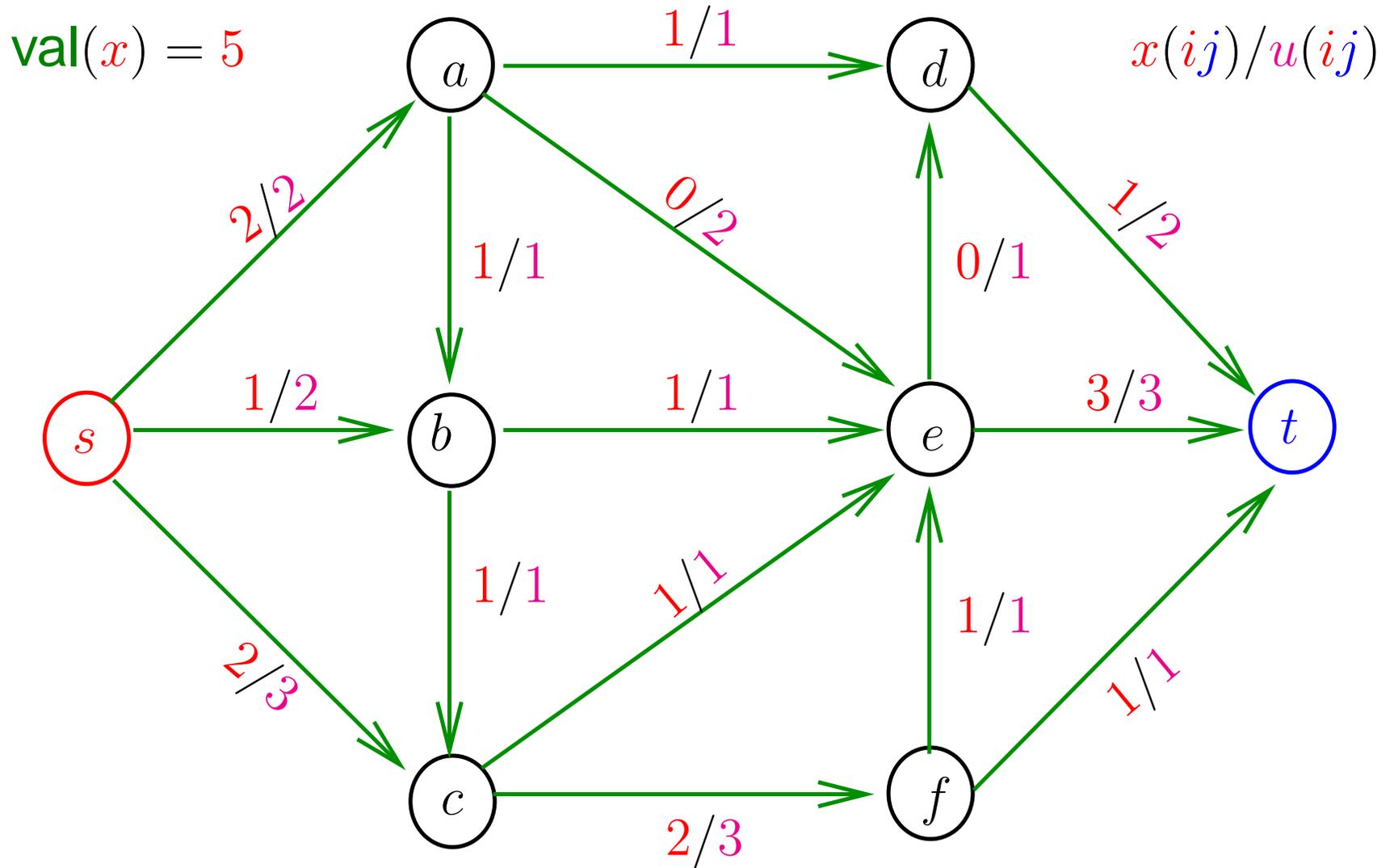
Se P é um caminho na rede residual então

$$\min\{u'(ij) : ij \text{ em } P\}$$

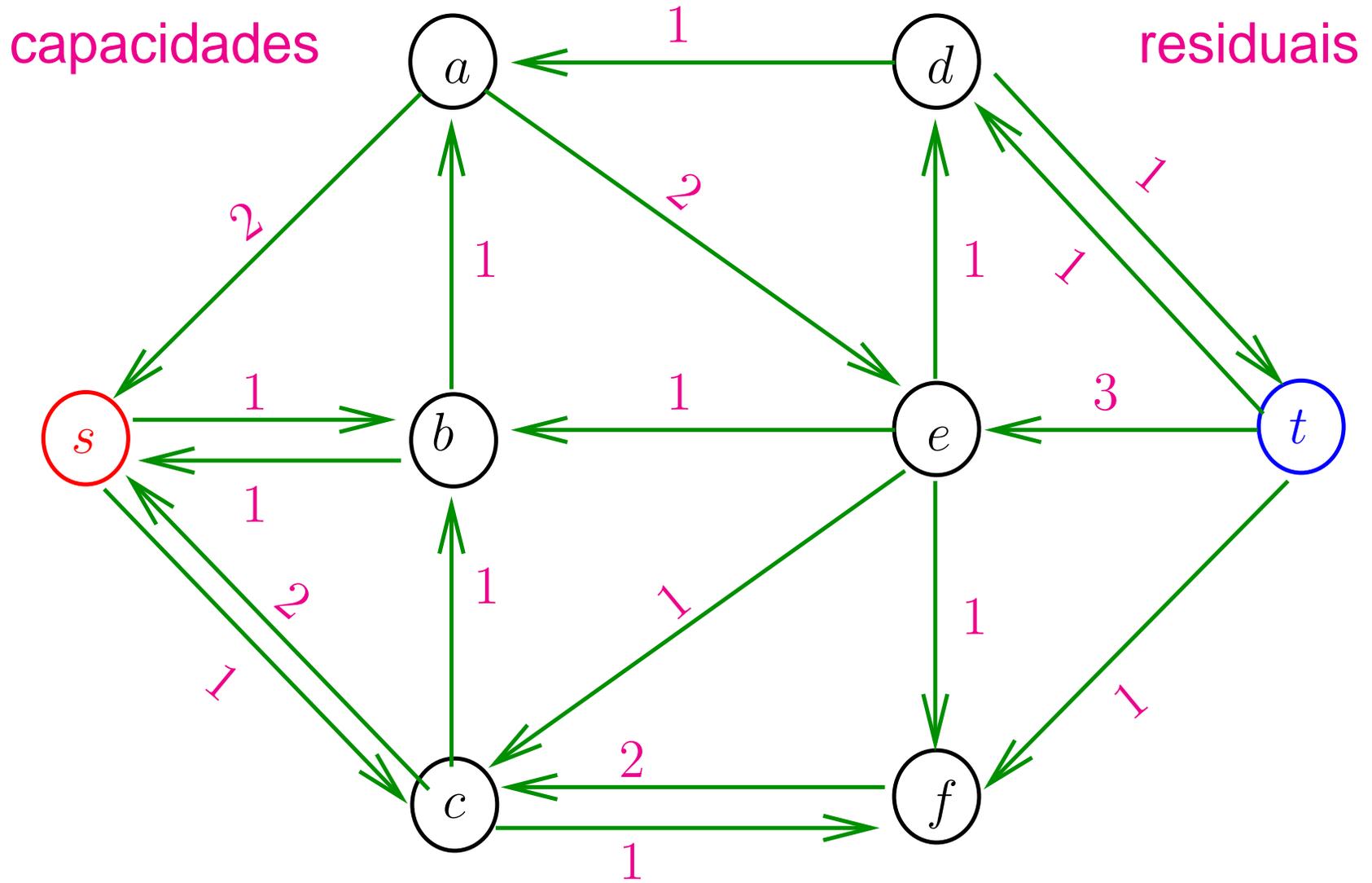
é a **capacidade residual** de P .

Todo caminho em $(N, A_{\check{x}}, u')$ tem capacidade residual > 0 .

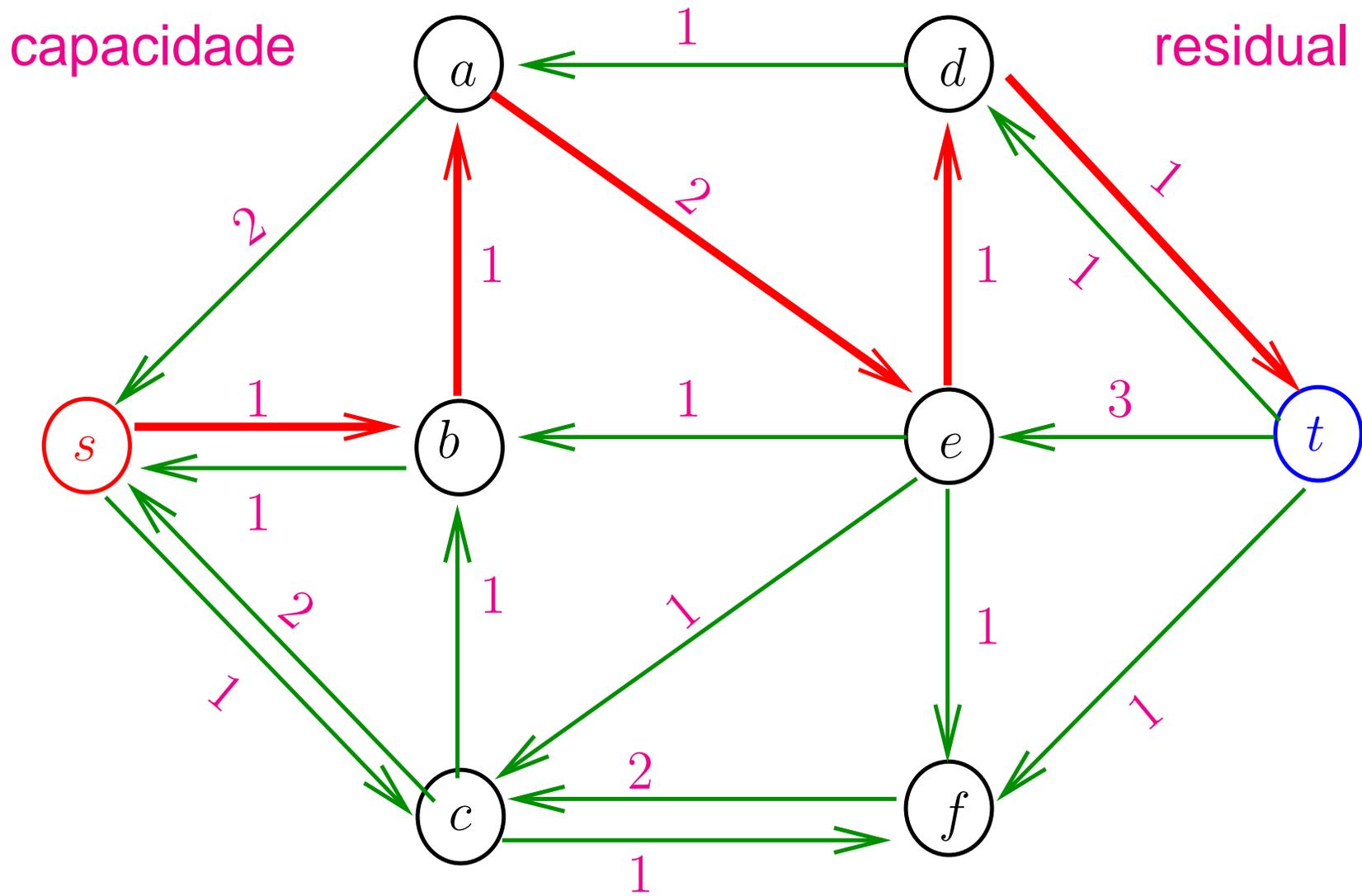
Um fluxo



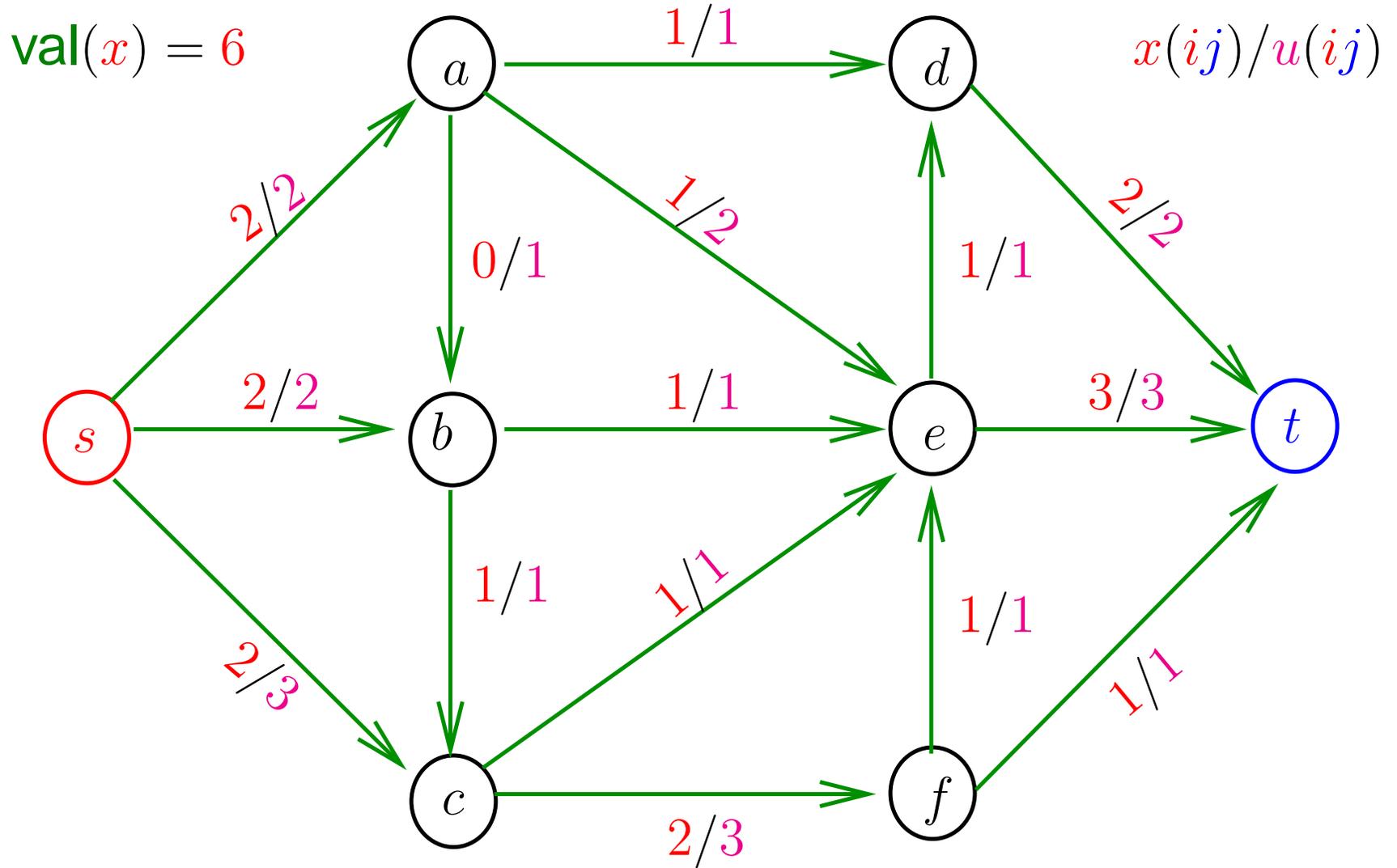
Correspondente rede residual



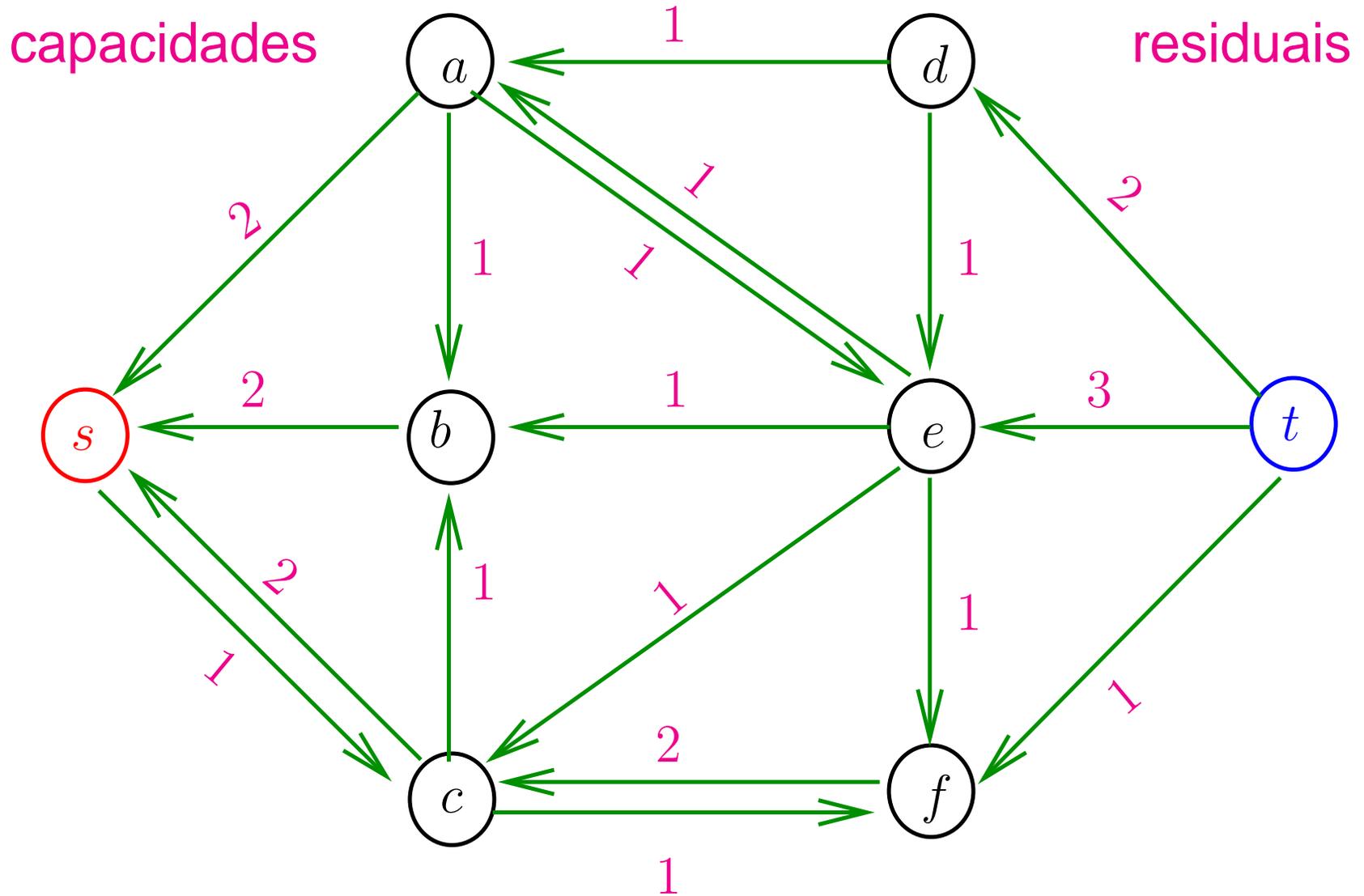
Caminho de incremento



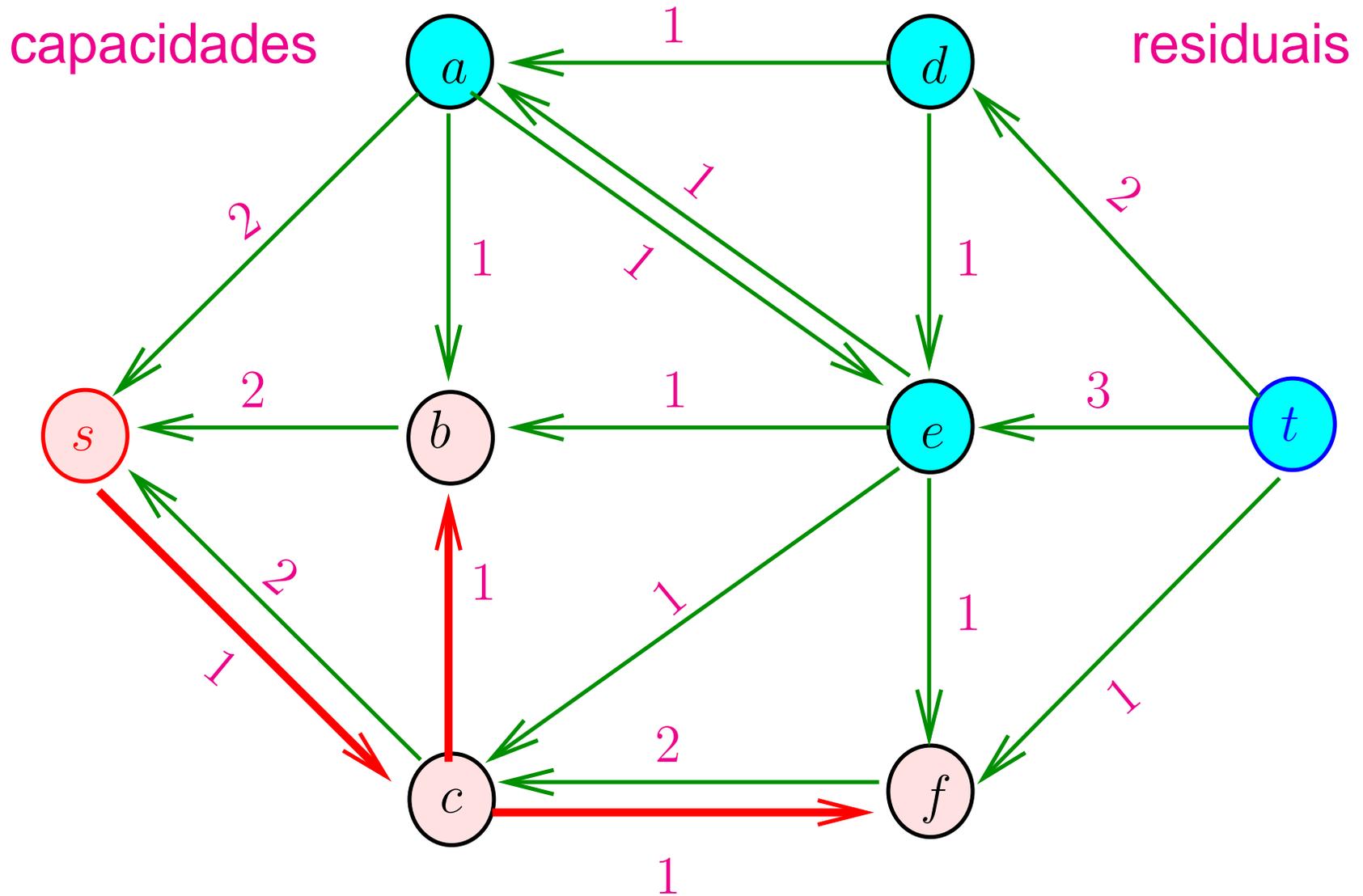
Mais um fluxo



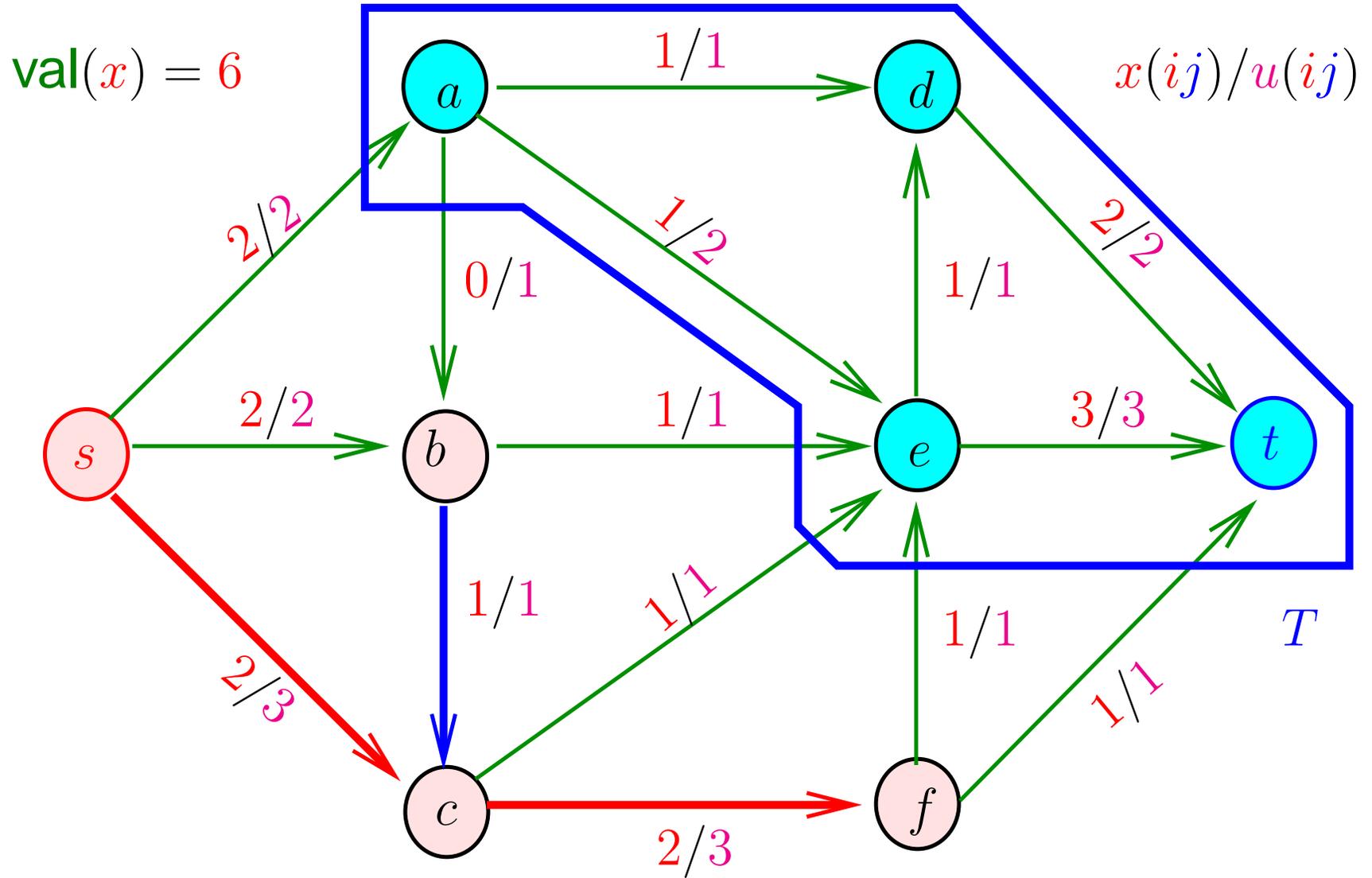
Correspondente rede residual



Caminhos de incremento



É máximo



Fluxos em redes residuais

Seja (N, A, u) uma rede simétrica.

Suponha que x é um st -fluxo que respeita u e \check{x} o correspondente pseudofluxo.

Suponha que z é um st -fluxo na rede residual $(N, A_{\check{x}}, u')$ que respeita u' e \check{z} é o correspondente pseudofluxo.

Fato 1: $\check{x} + \check{z}$ é um st -pseudofluxo que respeita u e

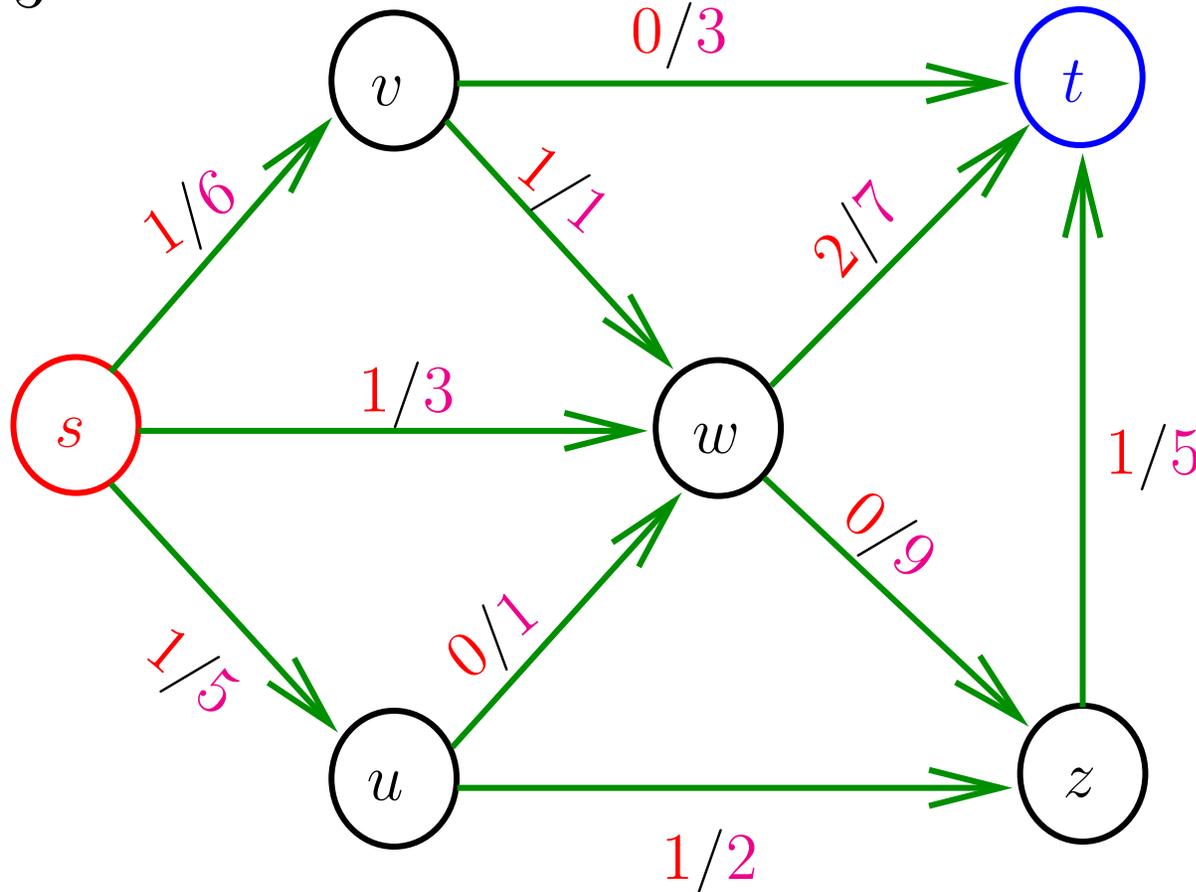
$$(\check{x} + \check{z})(\bar{t}, t) = \check{x}(\bar{t}, t) + \check{z}(\bar{t}, t).$$

Fato 2: Se z tem valor máximo então $\check{x} + \check{z}$ tem valor máximo.

Um pseudofluxo

$$\text{val}(\check{x}) = 3$$

$$\check{x}(ij)/u(ij)$$



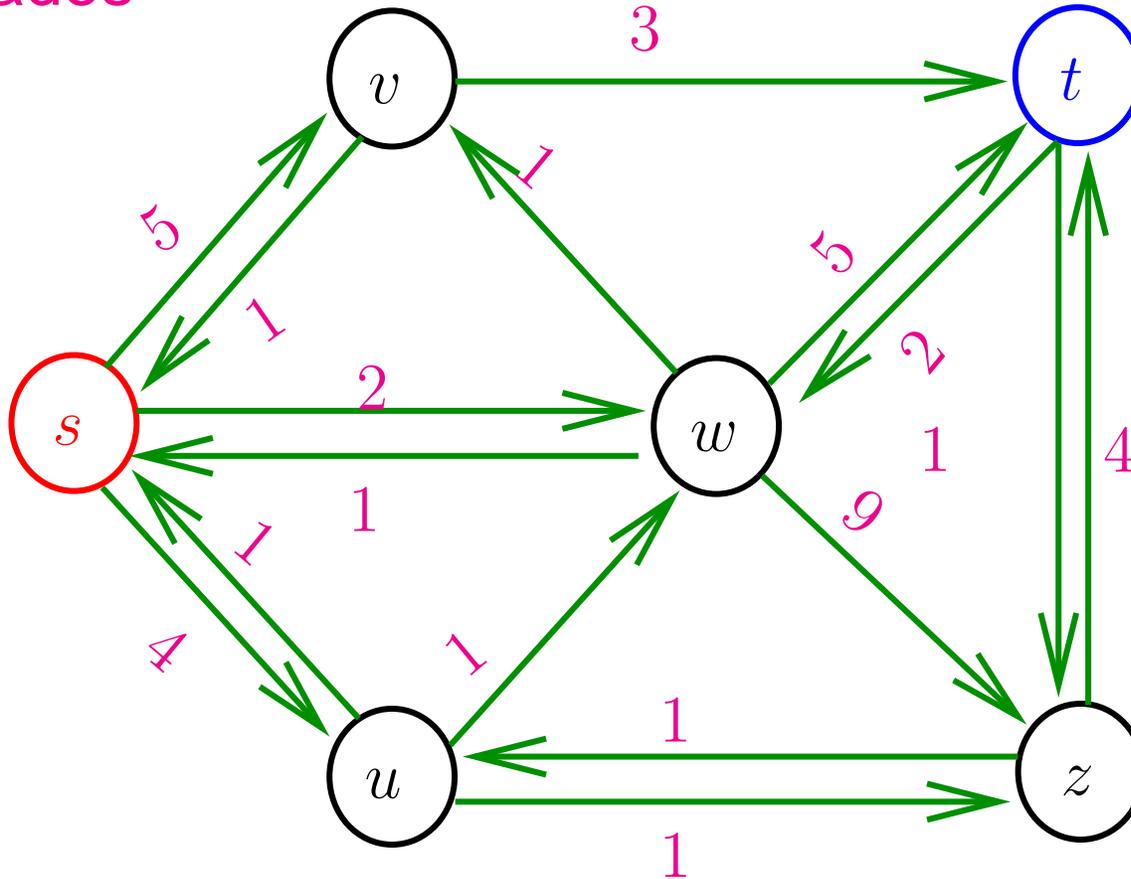
Os arcos com capacidade nula não estão na figura.

$$\check{x}(ij) = -\check{x}(ji)$$

Correspondente rede residual

capacidades

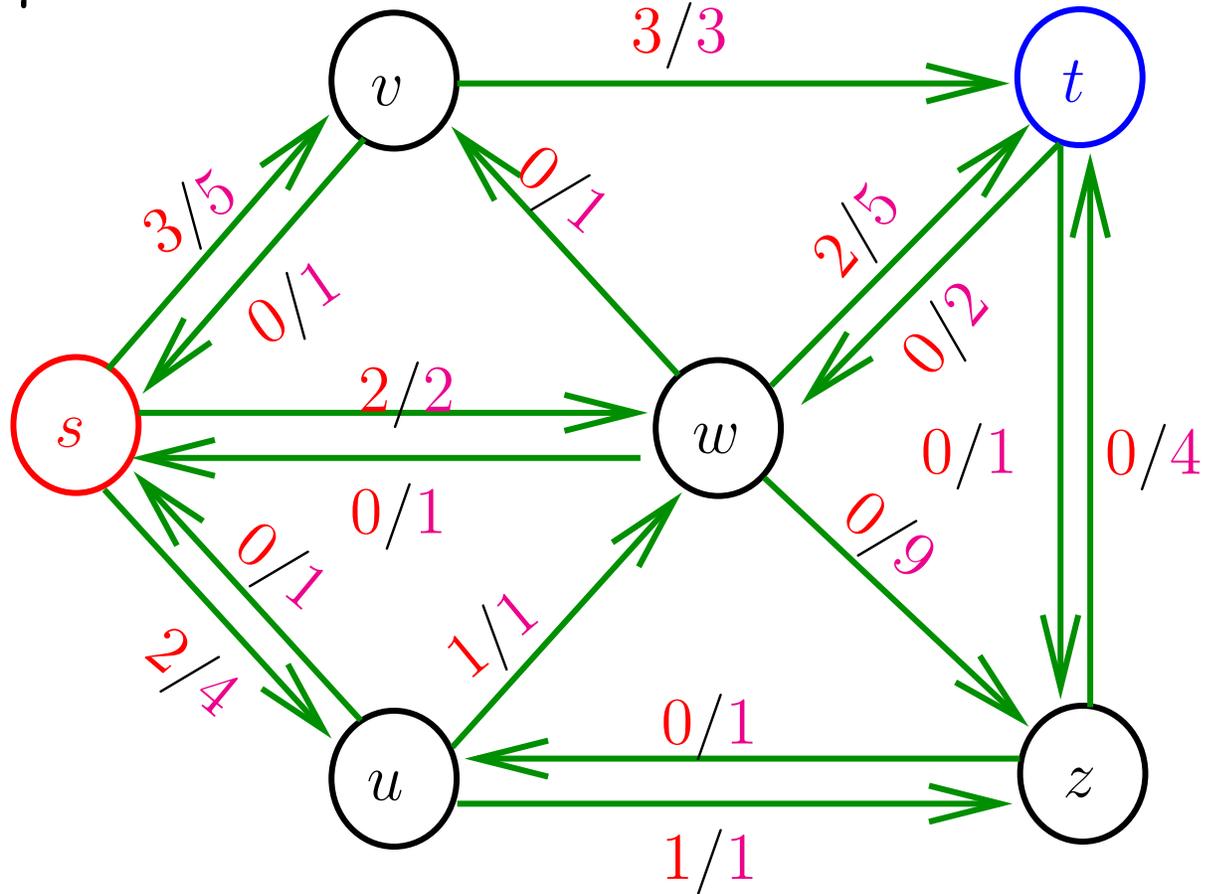
residuais



Pseudofluxo máximo na rede residual

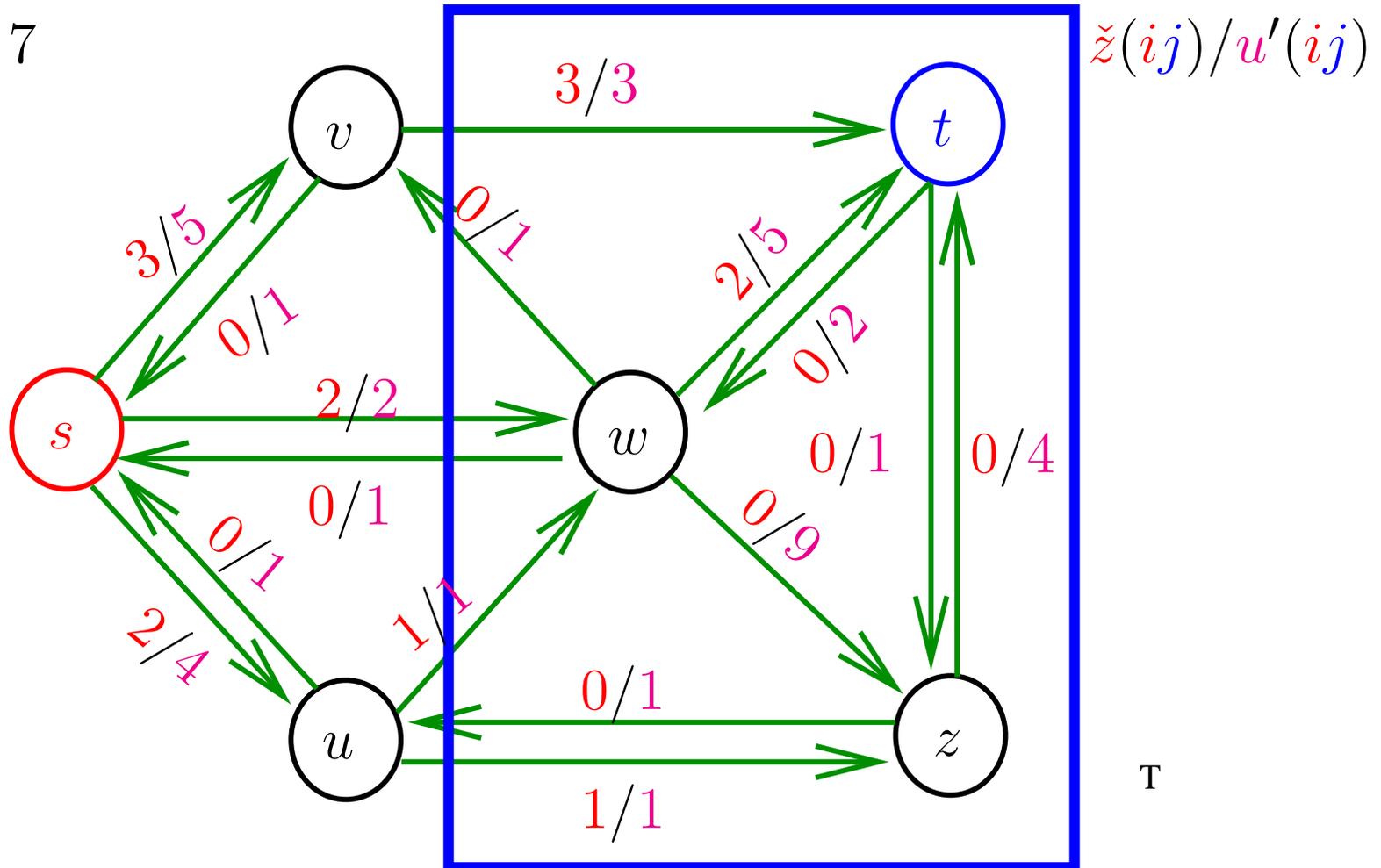
$$\text{val}(\check{z}) = 7$$

$$\check{z}(ij)/u'(ij)$$



Pseudofluxo máximo na rede residual

$$\text{val}(\check{z}) = 7$$

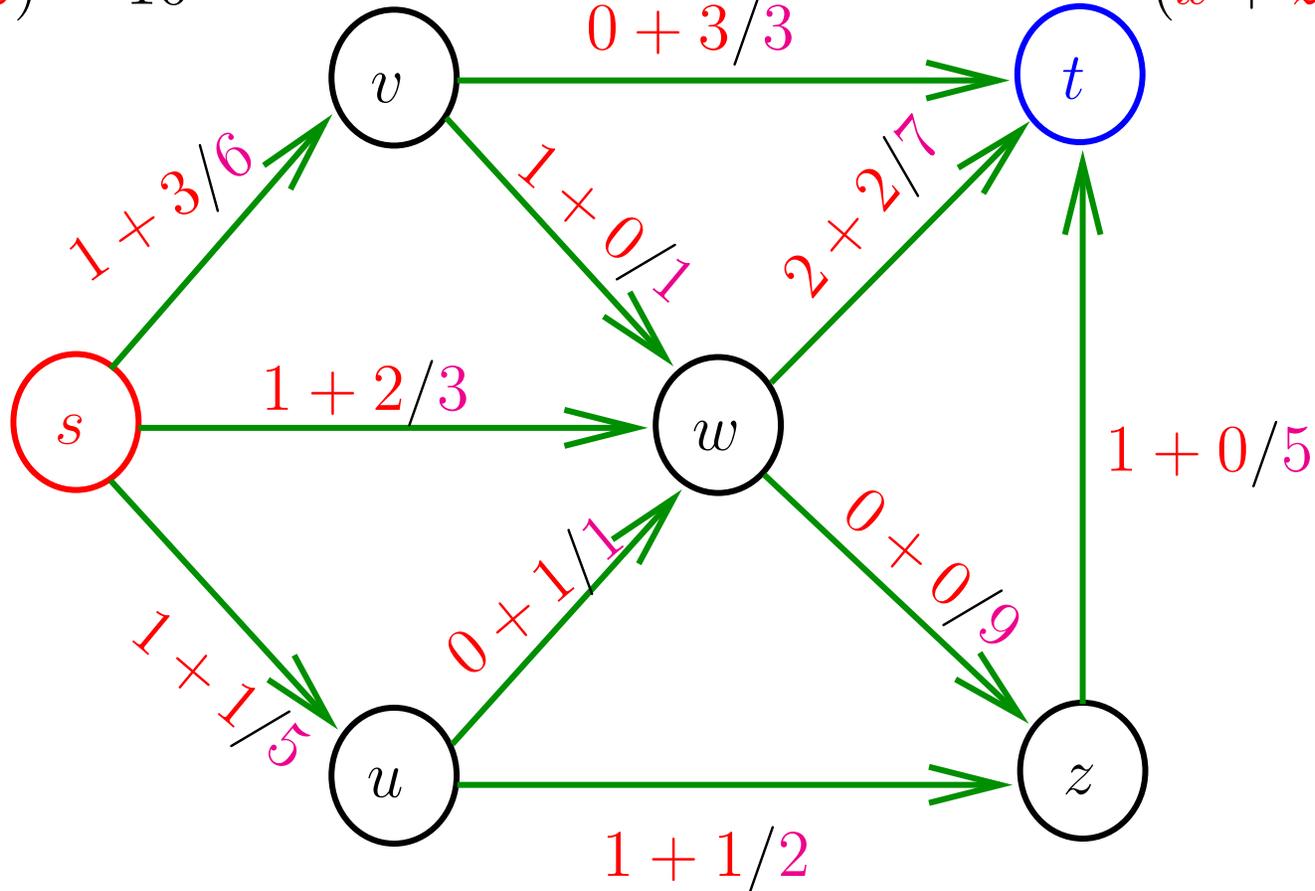


T

Pseudofluxo máximo na rede original

$$\text{val}(\check{x} + \check{z}) = 10$$

$$(\check{x} + \check{z})(ij) / u(ij)$$



Algoritmo de Ford e Fulkerson

Recebe uma rede **simétrica** (N, A, u) com função-capacidade u e nós s e t e **devolve** um st -fluxo máximo x e um st -corte mínimo $\nabla(\bar{T}, T)$.

FORD-FULKERSON (N, A, u, s, t)

1 $\check{x} \leftarrow 0$

2 **repita**

3 $A_{\check{x}} \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

4 $\langle y, P \rangle \leftarrow \text{BUSCA}(N, A_{\check{x}}, s, t)$

5 **se** $y(t) - y(s) = 0$

6 **então** $\check{x} \leftarrow \text{INCREMENTE-FLUXO}(\check{x}, P)$

7 **até que** $y(t) - y(s) > 0$

8 $x \leftarrow \text{FLUXO}(\check{x})$

9 $T \leftarrow \{j : y(j) - y(s) > 0\}$

10 **devolva** x e T

Algoritmo de incremento

Recebe um *st*-pseudofluxo \check{x} e um caminho de incremento P e **devolve** o pseudofluxo \check{x} após enviar “ δ unidades de fluxo através de P ”.

INCREMENTE-FLUXO (\check{x}, P)

1 $\delta \leftarrow \min\{u(ij) - \check{x}(ij) : ij \text{ é arco de } P\}$

2 **para cada** arco ij em P **faça**

3 $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

4 $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

5 **devolva** \check{x}

Invariantes

Na linha 2 e na linha 7 valem as seguintes invariantes:

(i0) \check{x} é inteiro;

(i1) \check{x} é um st -pseudofluxo;

(i2) \check{x} respeita u .

Incrementos de capacidade máxima

Ford e Fulkerson

Método dos caminhos de incrementos

PASSO DE INCREMENTO: encontre um caminho na rede residual (**para o fluxo corrente**). Incremente o valor do fluxo “enviando o maior número de unidades de fluxo através do caminho”.

Ford e Fulkerson

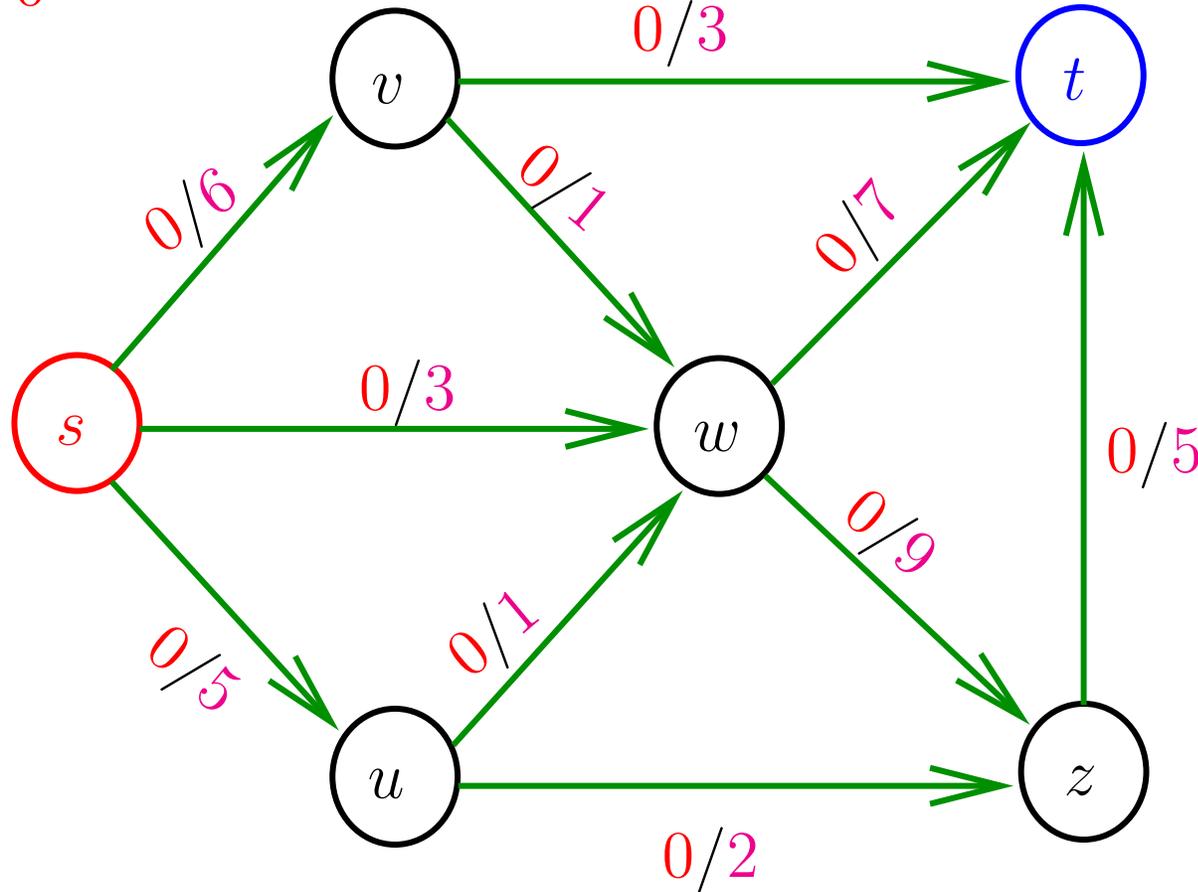
Método dos incrementos máximos

PASSO DE INCREMENTO: encontre na **rede residual** (do fluxo corrente) um caminho de **capacidade residual máxima**. Incremente o valor do fluxo “enviando a maior número de unidades de fluxo através do caminho”.

Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 0$$

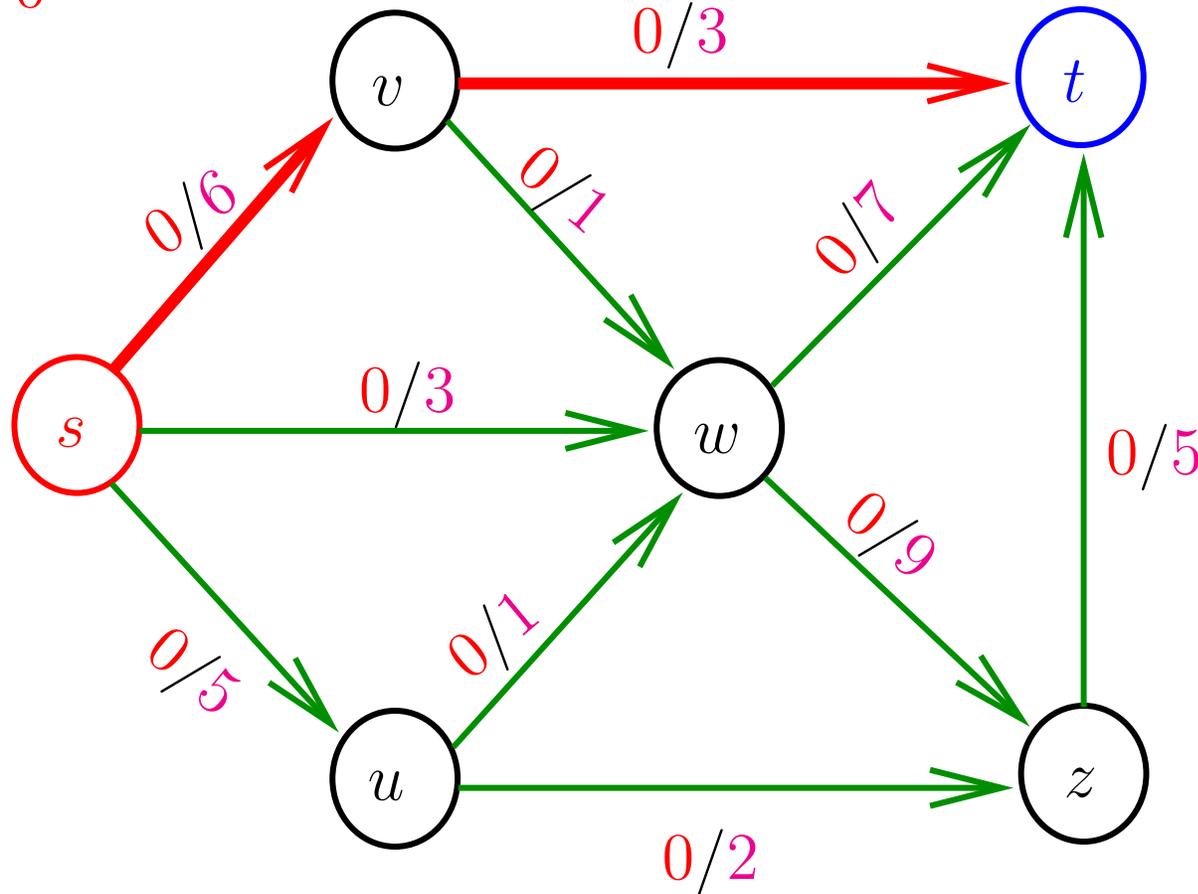
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 0$$

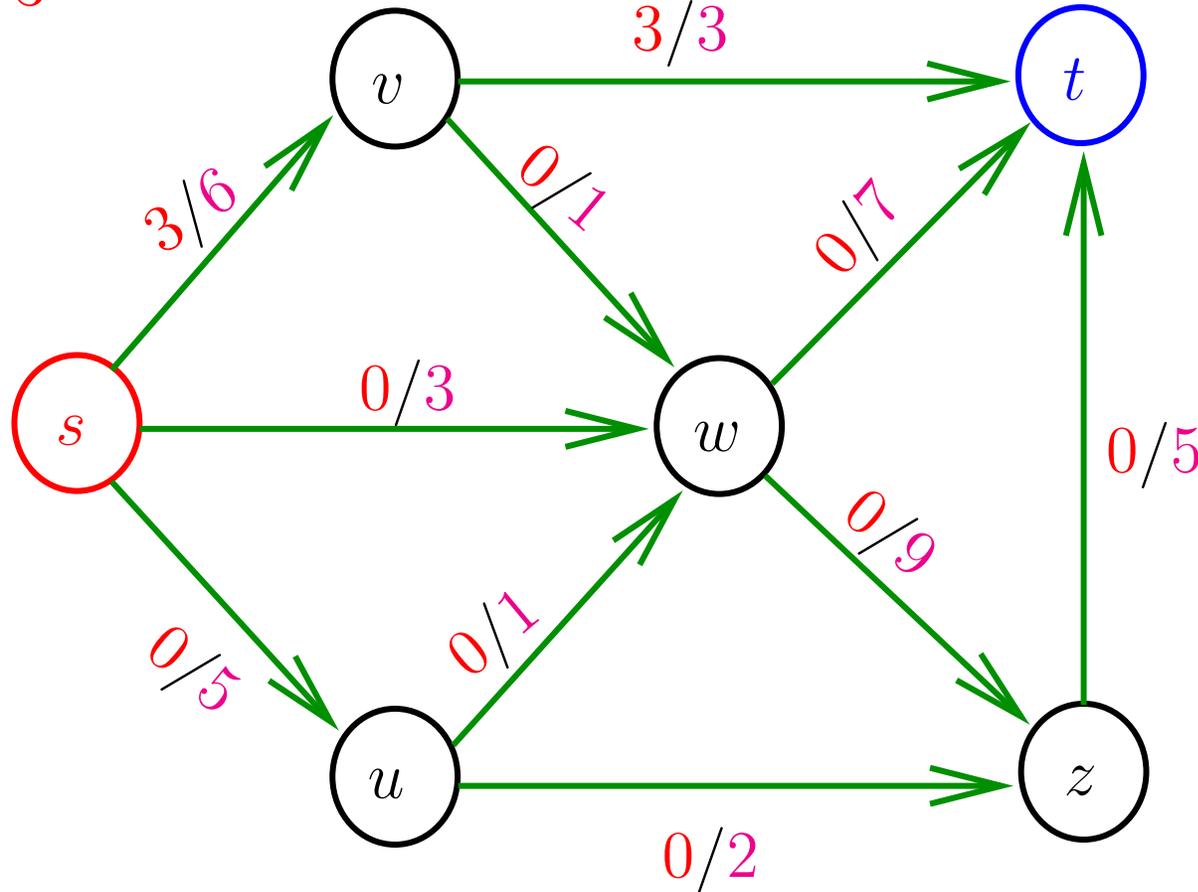
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3$$

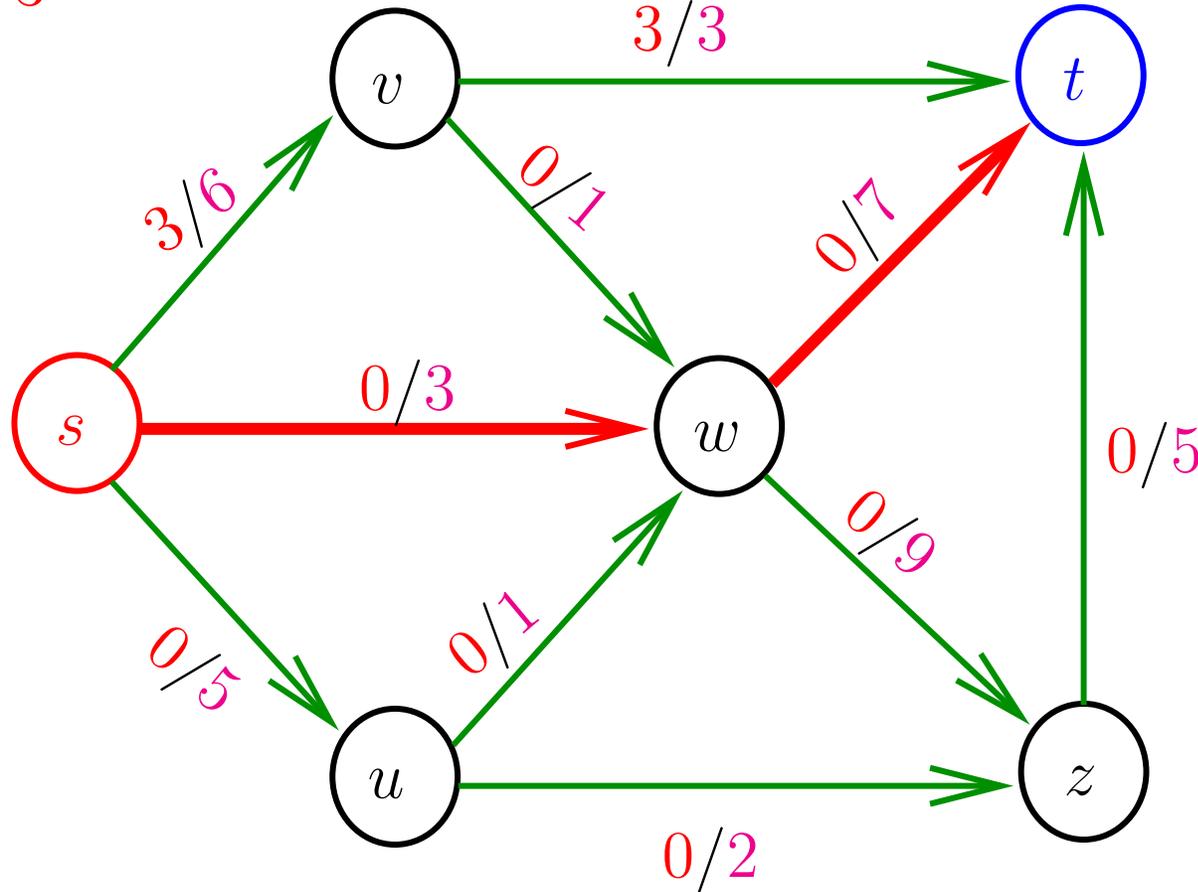
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3$$

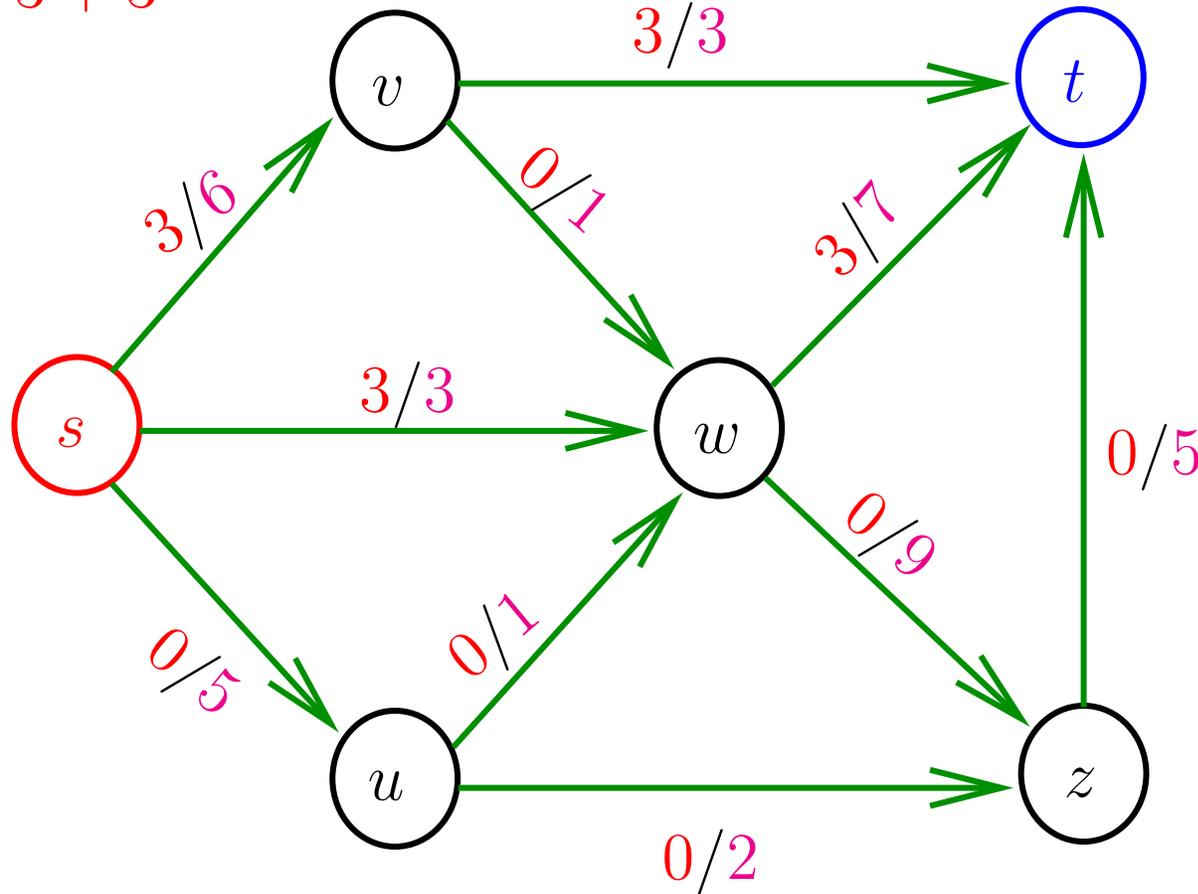
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3 + 3$$

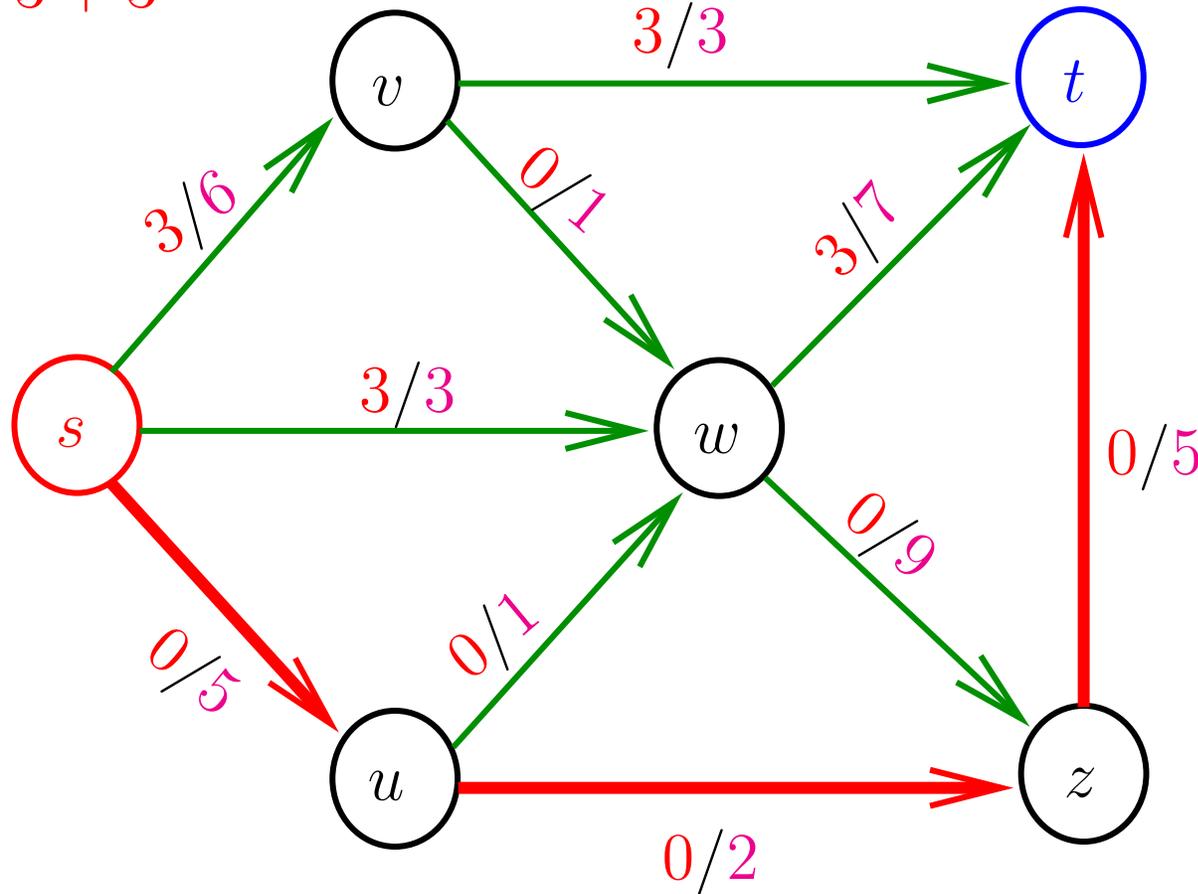
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3 + 3$$

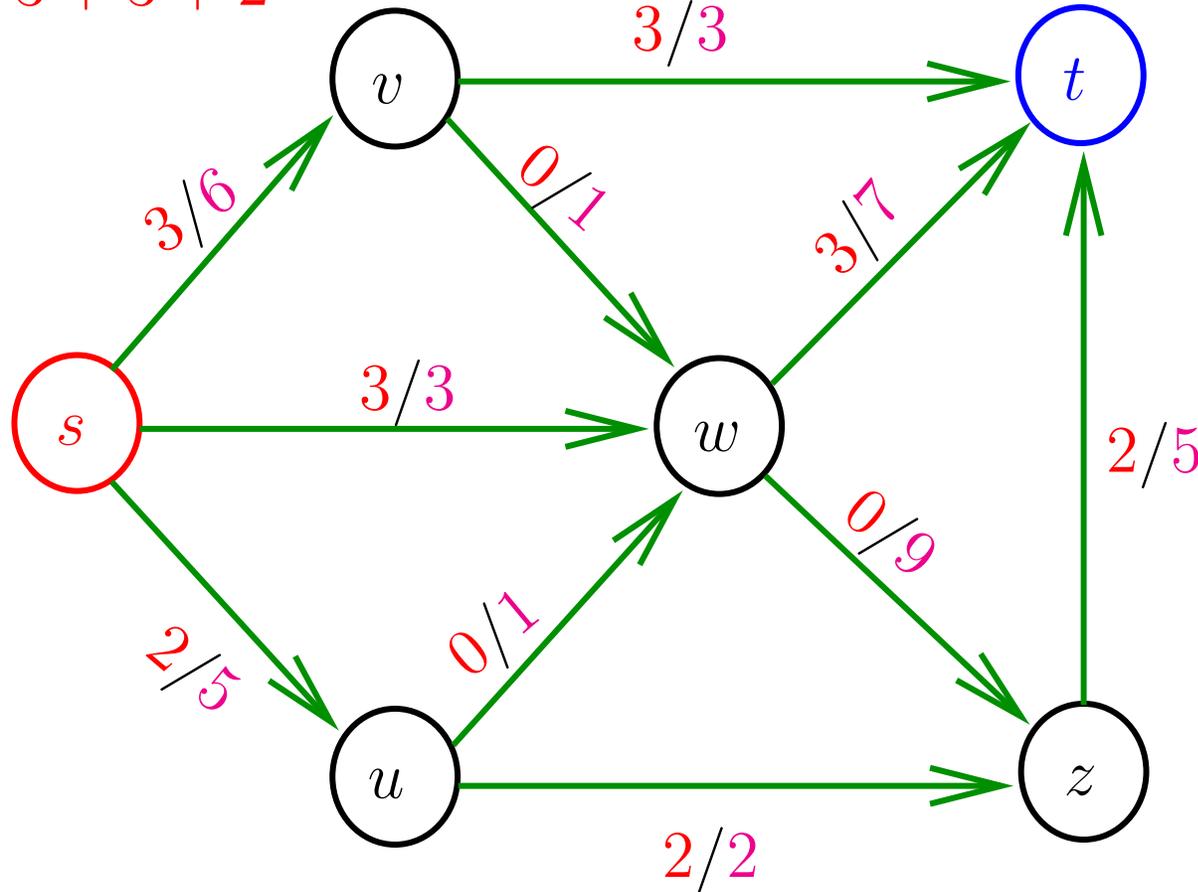
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2$$

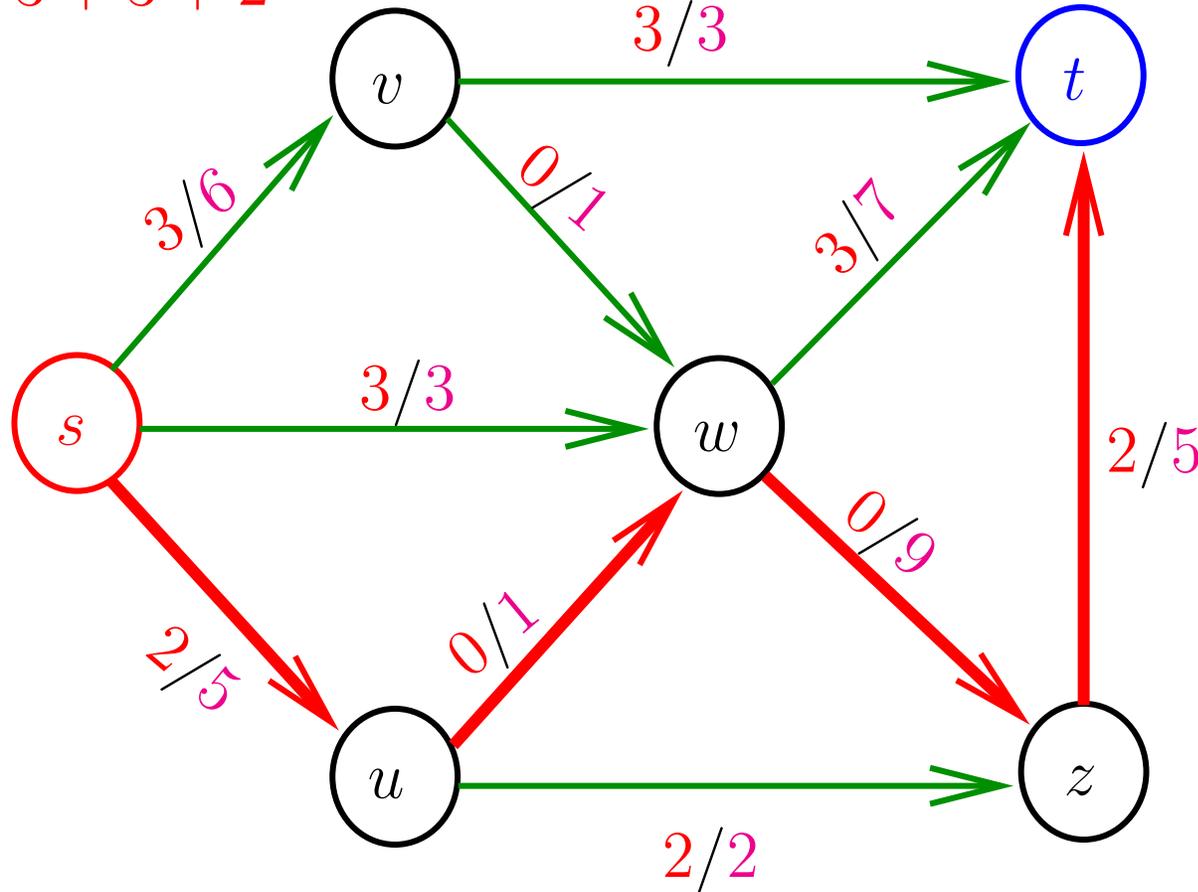
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2$$

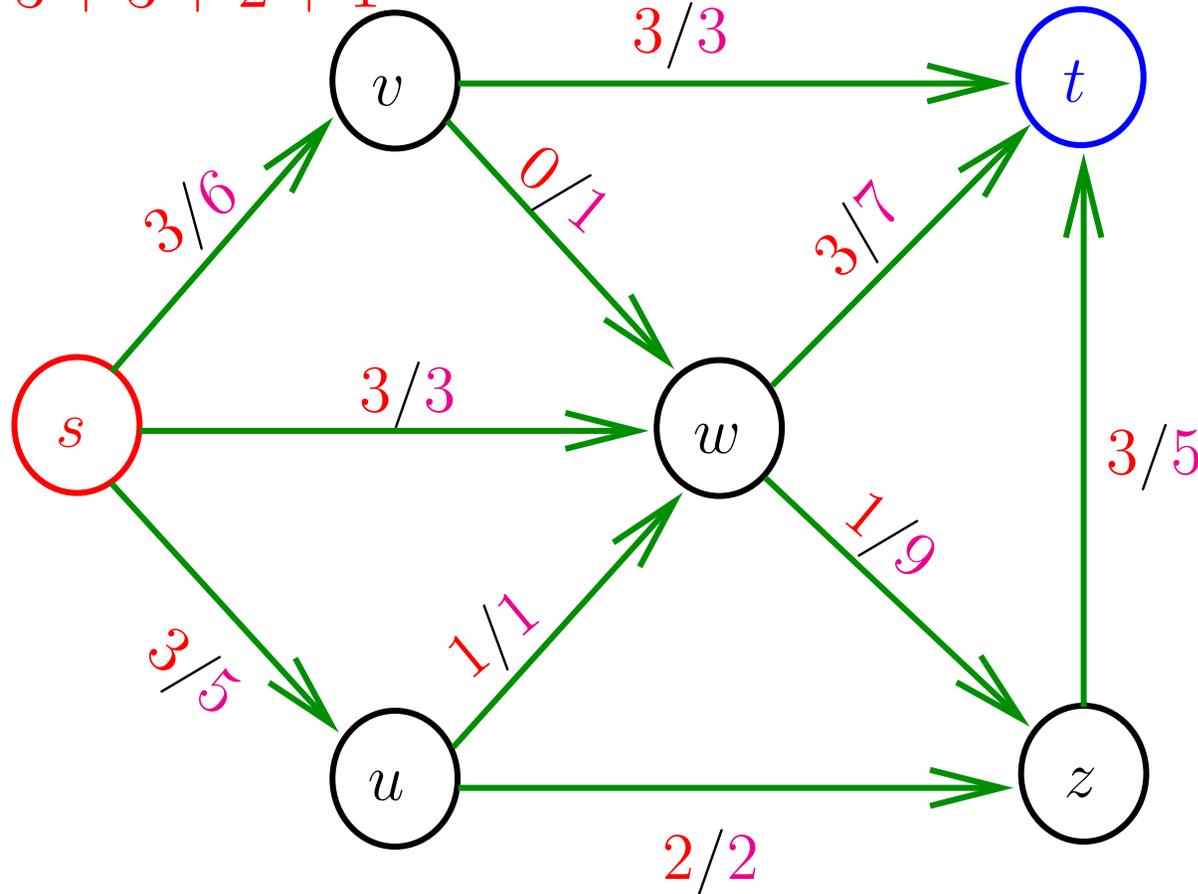
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1$$

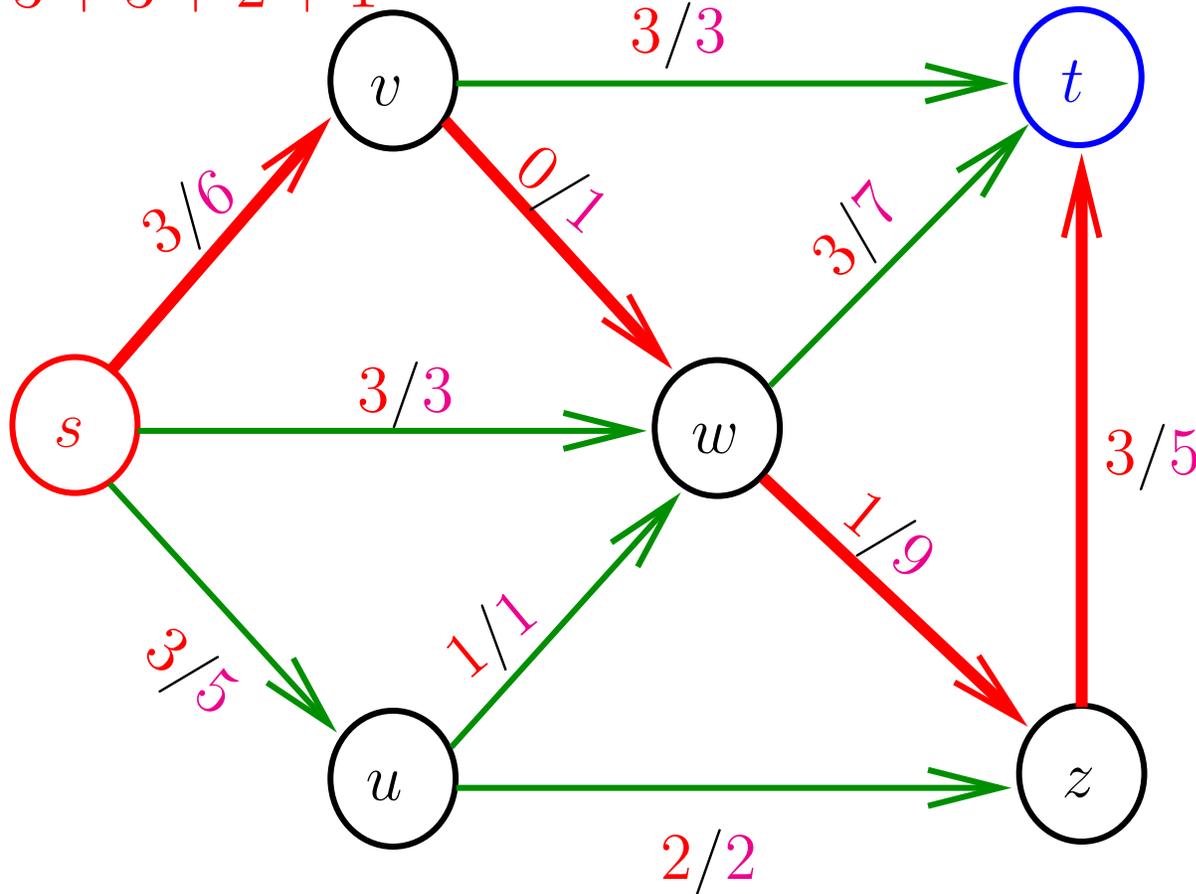
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1$$

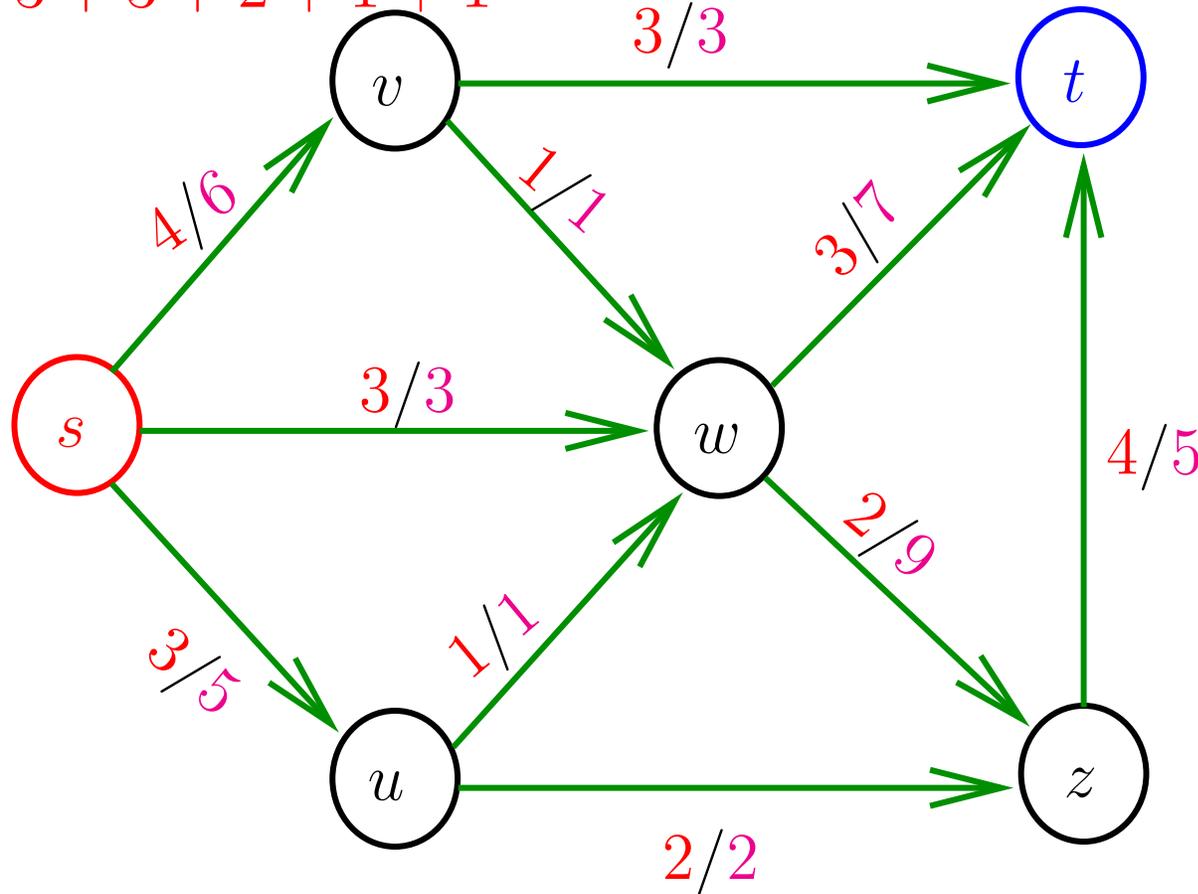
$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

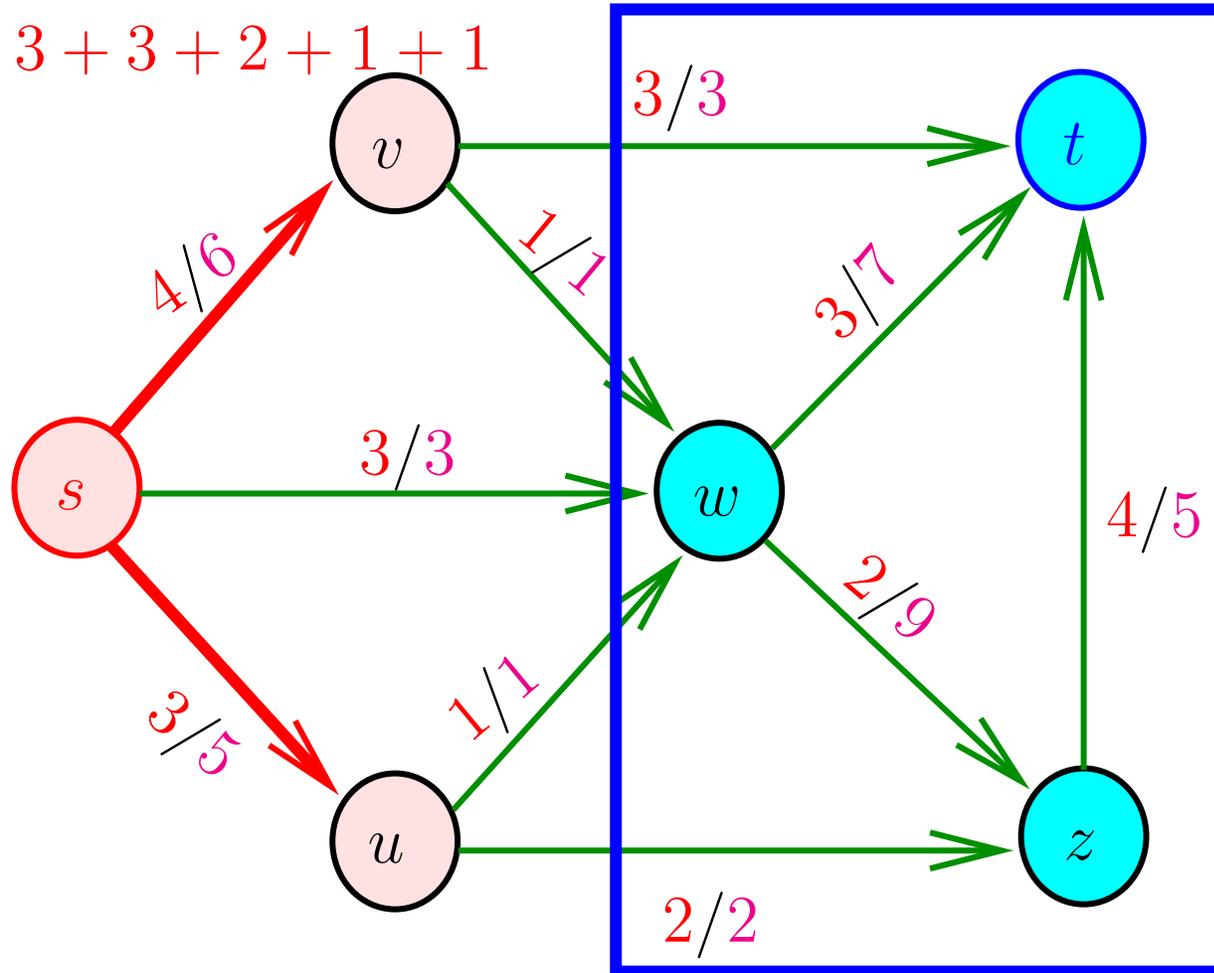
$$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1 + 1$$

$$x(ij)/u(ij)$$



Método dos incrementos máximos

$$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1 + 1$$



$$x(ij)/u(ij)$$

T

Lema da dualidade

Se y é uma função potencial tal que

$$y(j) \geq \min\{y(i), u(ij)\}$$

para cada arco ij e P é um caminho de s a t , então

$$y(t) \geq \min\{y(s), \min\{u(ij) : ij \text{ está em } P\}\}$$

Consequência

Se y é uma função potencial tal que $y(s) = \infty$ e

$$y(j) \geq \min\{y(i), u(ij)\}$$

para cada arco ij e P é st -caminho tais que

$$y(t) = \min\{y(s), \min\{u(ij) : ij \text{ está em } P\}\}$$

então P é um st -caminho de capacidade máxima.

Caminho de capacidade máxima

Uma pequena variante do algoritmo **DIJKSTRA** encontra caminhos de capacidade máxima.

CAMINHO-MAX-CAPACITY (N, A, u, s) $\triangleright u \geq 0$

```
1  para cada  $i$  em  $N$  faça
2       $y(i) \leftarrow 0$    $\pi(i) \leftarrow \text{NIL}$ 
3   $y(s) \leftarrow \infty$ 
4   $Q \leftarrow N$    $\triangleright Q$  func. como uma fila com prioridades
5  enquanto  $Q \neq \langle \rangle$  faça
6      retire de  $Q$  um nó  $i$  com  $y(i)$  máximo
7      para cada  $ij$  em  $A(i)$  faça
8          se  $y(j) < \min\{y(i), u(ij)\}$ 
9              então  $y(j) \leftarrow \min\{y(i), u(ij)\}$ 
10                  $\pi(j) \leftarrow i$ 
11 devolva  $\pi$  e  $y$ 
```

Algumas invariantes

Na linha 5, antes da verificação da condição “ $Q \neq \langle \rangle$ ” valem as seguintes invariantes:

- (i0) para cada arco ij no grafo de predecessores tem-se $y(j) = \min\{y(i), u(ij)\}$ (igual!);
- (i1) $\pi(s) = \text{NIL}$ e $y(s) = \infty$;
- (i2) para cada nó j distinto de s , $y(j) > 0 \Leftrightarrow \pi(j) \neq \text{NIL}$;
- (i3) para cada nó j , se $\pi(j) \neq \text{NIL}$ então existe um caminho de s a j no grafo de predecessores de capacidade $y(j)$;
- (i4) se $y(j) < \min\{y(i), u(ij)\}$ para algum arco ij então i e j estão em Q .

Consumo de tempo

O número de iterações é $< n$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$O(n)$
3	$O(1)$
4	$O(n)$
5	$n O(1) = O(n)$
6	$n O(n) = O(n^2)$
7-10	$m O(1) = O(m)$
11	$O(n)$
total	$O(1) + 4 O(n) + O(m) + O(n^2)$ $= O(n^2)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
CAMINHO-MAX-CAPACITY é $O(n^2)$.