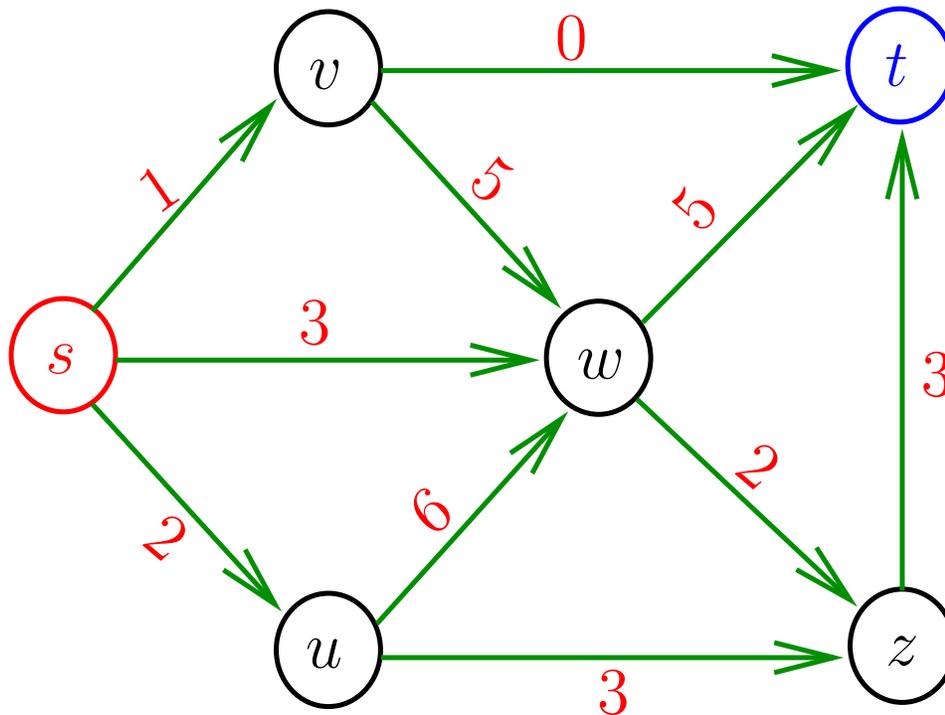


Melhores momentos

AULA PASSADA

Fluxos

Uma **fluxo** é uma função de A em \mathbb{Z}_{\geq} .

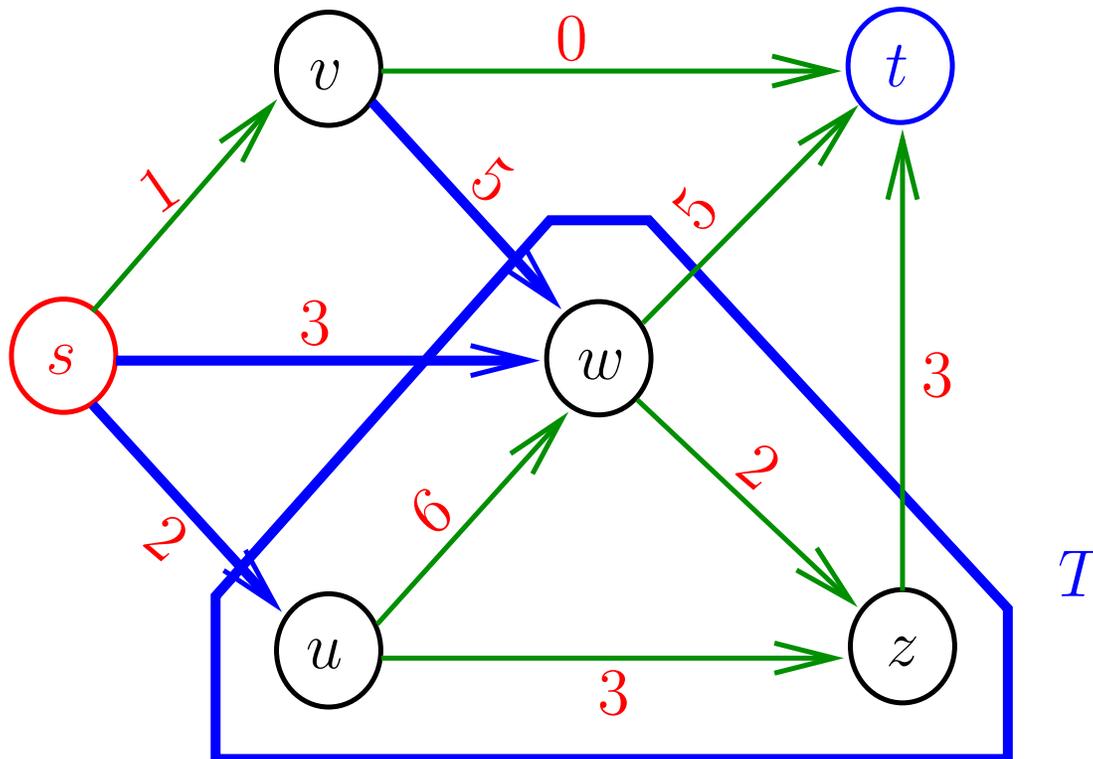


Excesso

Se x é um fluxo e T é uma parte de N então

$$x(\bar{T}, T) := \sum (x(ij) : ij \in (\bar{T}, T))$$

Exemplo: $x(\bar{T}, T) = 2 + 3 + 5 = 10$

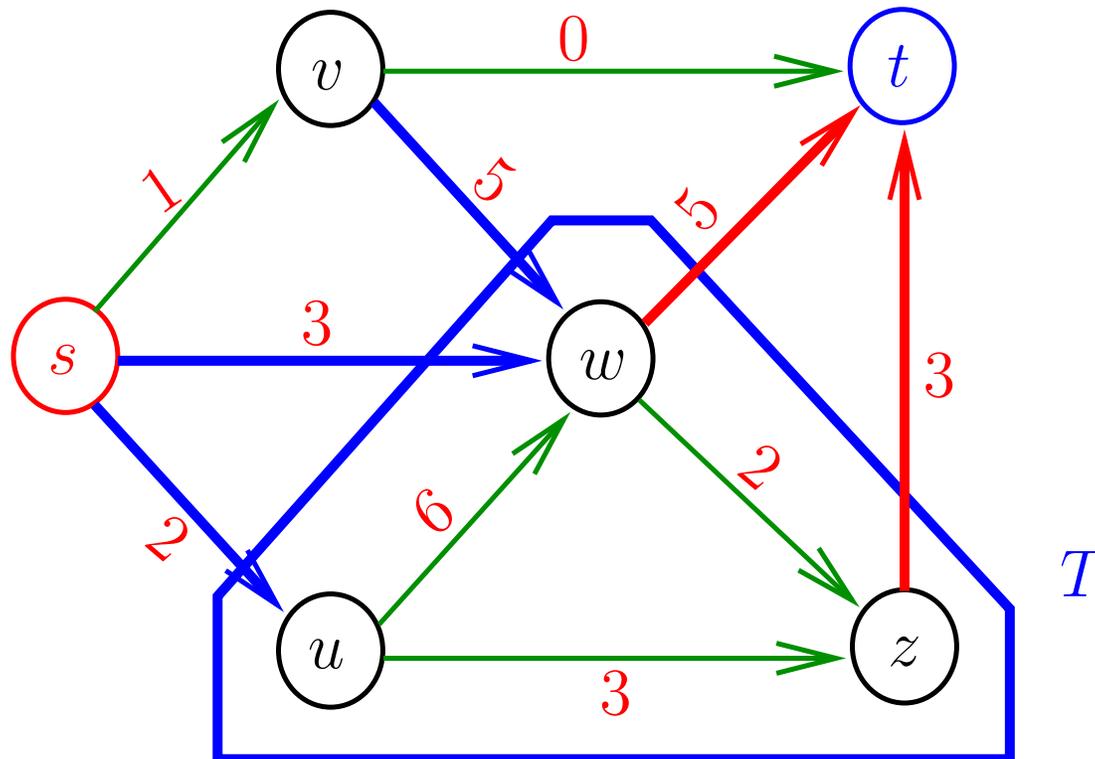


Excesso

O **excesso** ou **acúmulo** de x em T é a diferença entre o que **entra** em T e o que **sai** de T :

$$x(\bar{T}, T) - x(T, \bar{T})$$

Exemplo: $x(\bar{T}, T) - x(T, \bar{T}) = 10 - 8 = 2$

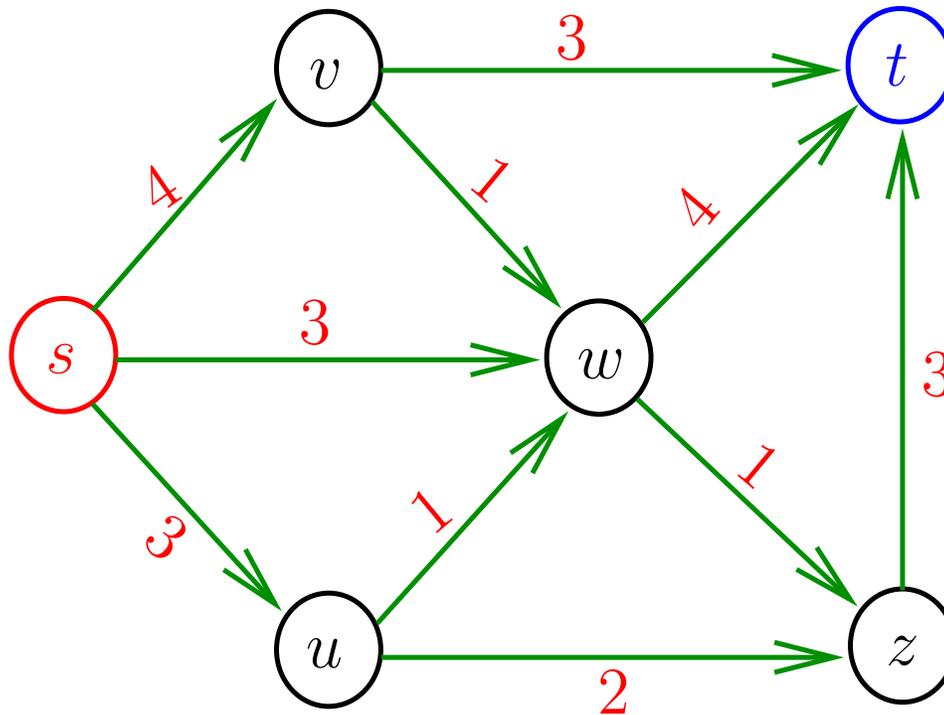


Fluxo entre dois nós

Um **fluxo de s a t** é qualquer fluxo x tal que

$$x(\bar{j}, j) - x(j, \bar{j}) = 0$$

para todo j em $N - \{s, t\}$ e $x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) \geq 0$.

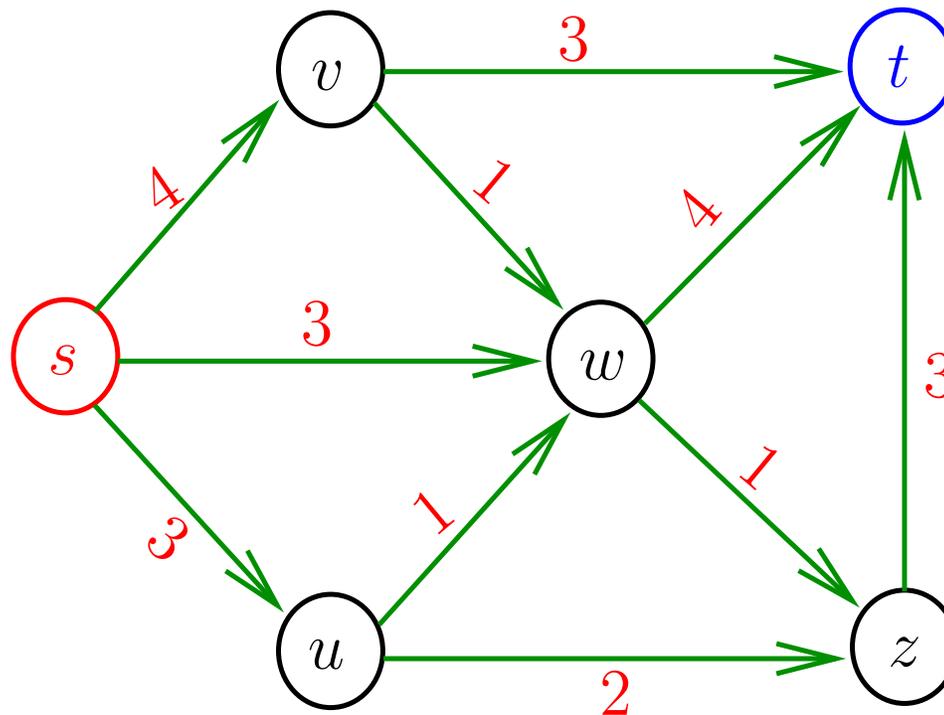


Valor de um st -fluxo

O **valor** de um st -fluxo x é

$$\mathbf{val}(x) := x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}).$$

Exemplo: $\mathbf{val}(x) = 3 + 3 + 4 - 0 = 10$

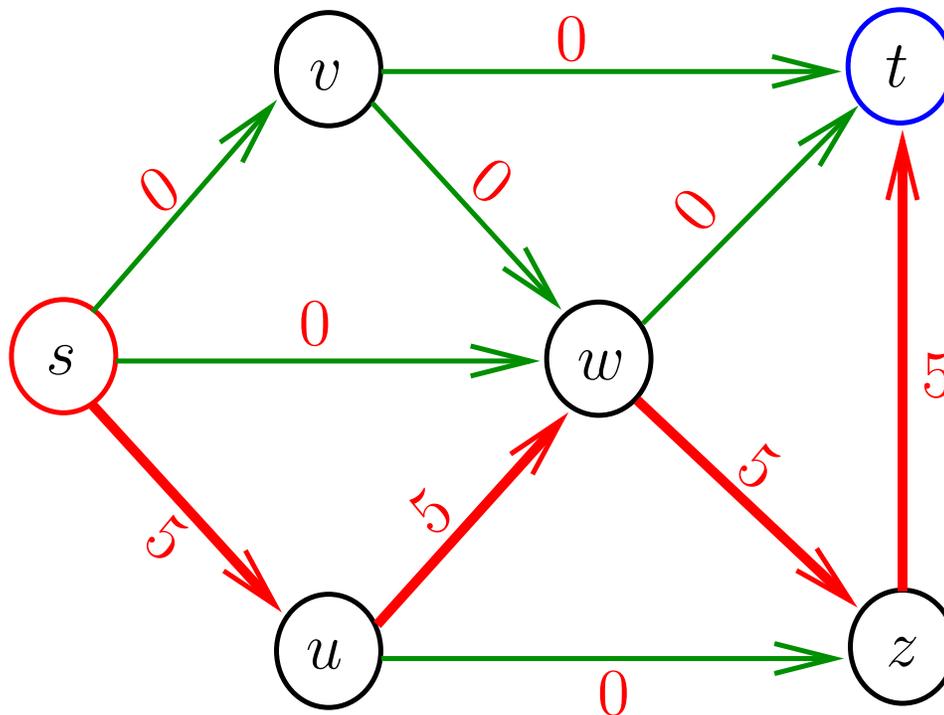


st-fluxos elementares

Se P é um *st*-caminho e α é um inteiro não-negativo então

$$x^{(ij)} := \begin{cases} \alpha & \text{se } P \text{ passa por } ij \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

é a *st*-fluxo elementar definida por P e α .

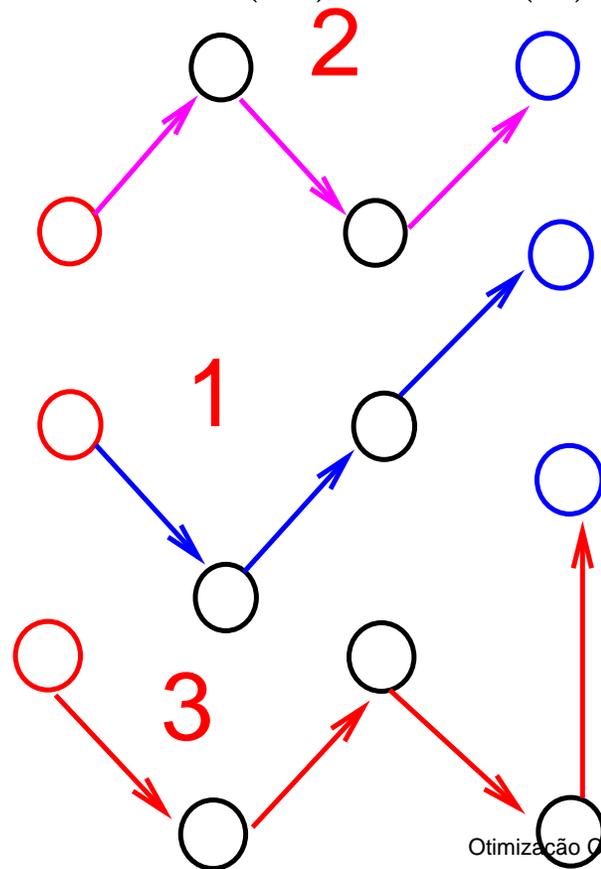
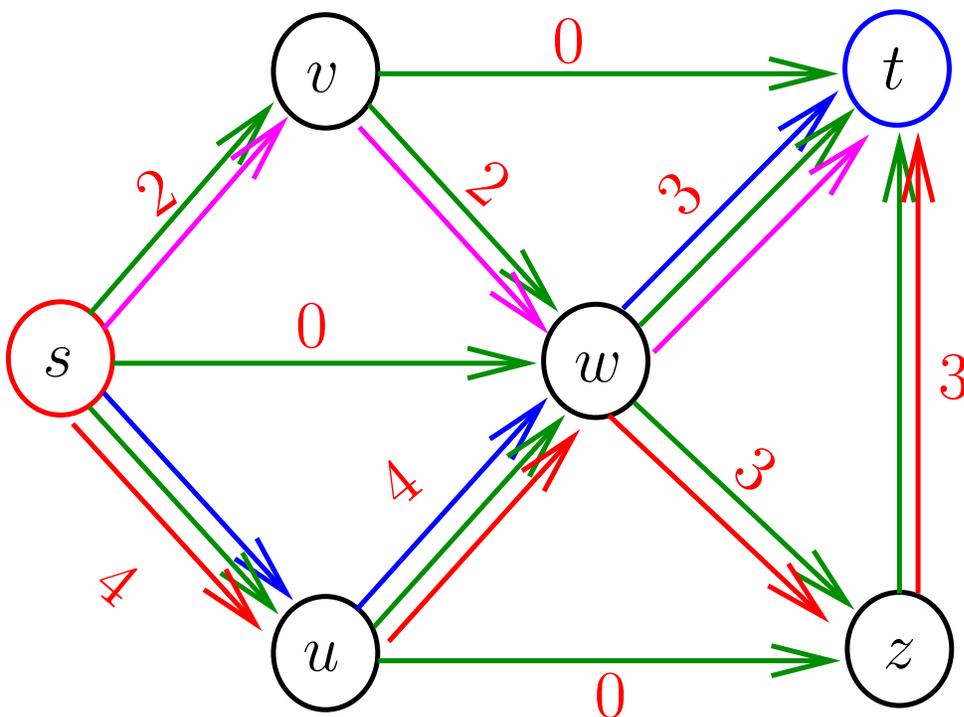


Decomposição de st -fluxos

Se x é uma st -fluxo então existe um coleção de st -caminhos \mathcal{P} , $|\mathcal{P}| \leq m$, e $\lambda : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq}$ tais que o st -fluxo

$$x'(ij) := \sum (\lambda(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij 'representa' x : $x' \leq x$ e $\text{val}(x') = \text{val}(x)$.



AULA 14

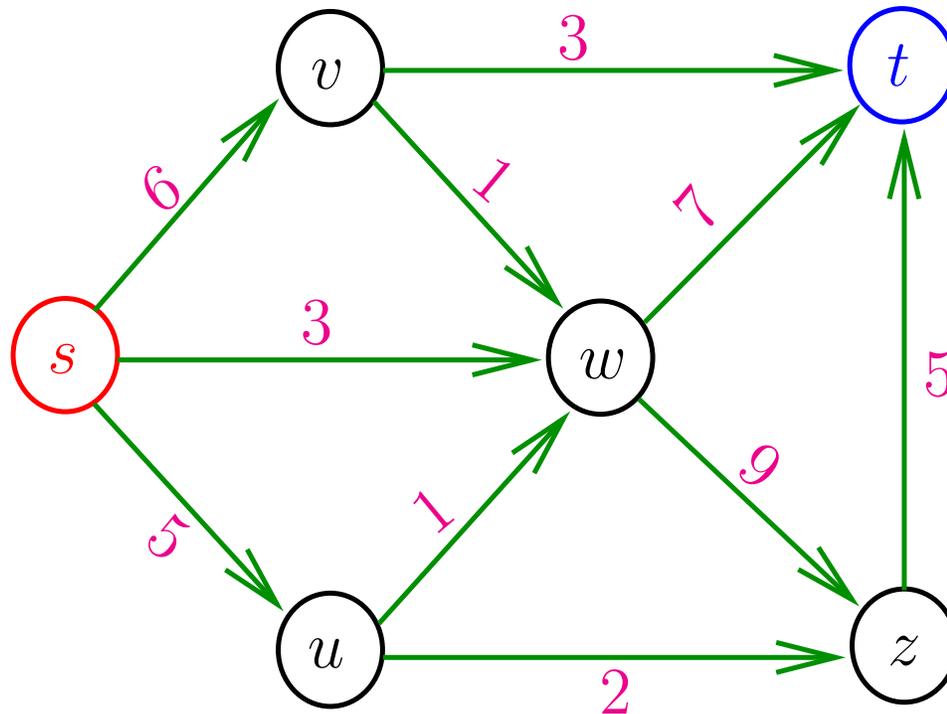
Fluxo máximo

PF 11.1, 11.2, 11.3

Capacidades

Uma **função-capacidade** em um grafo (N, A) é qualquer função de A em \mathbb{Z}_{\geq} :

$$u : A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq} .$$

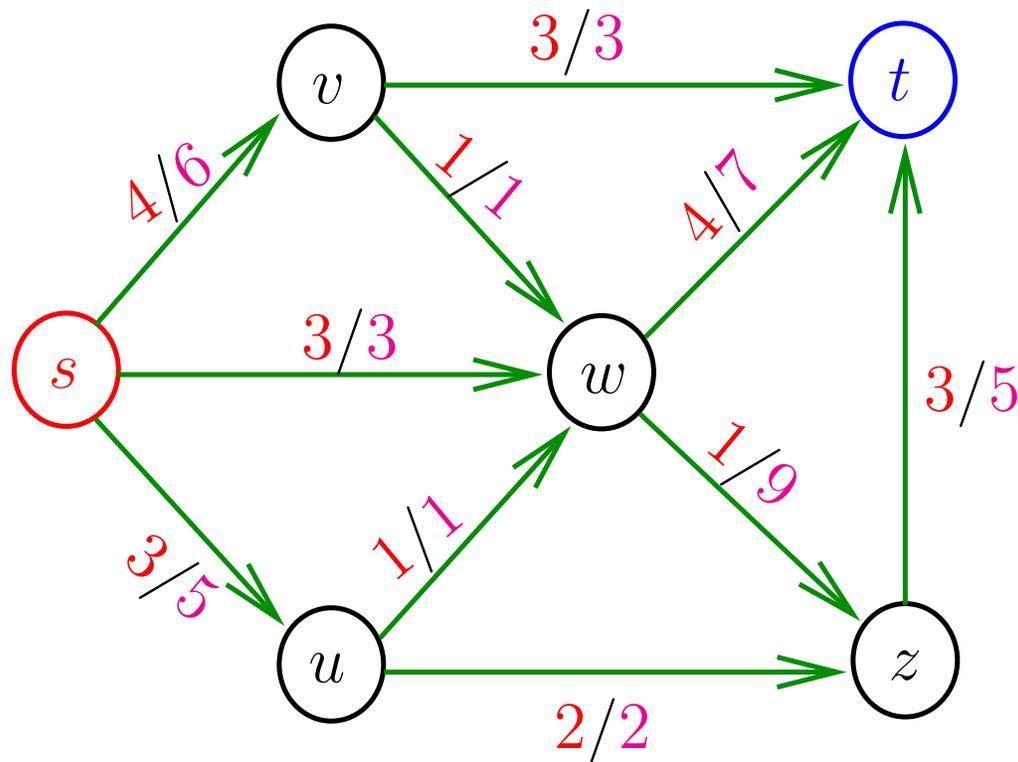


Capacidades

Uma função x de A em \mathbb{Z}_{\geq} respeita u de $x \leq u$:

$$x(ij) \leq u(ij),$$

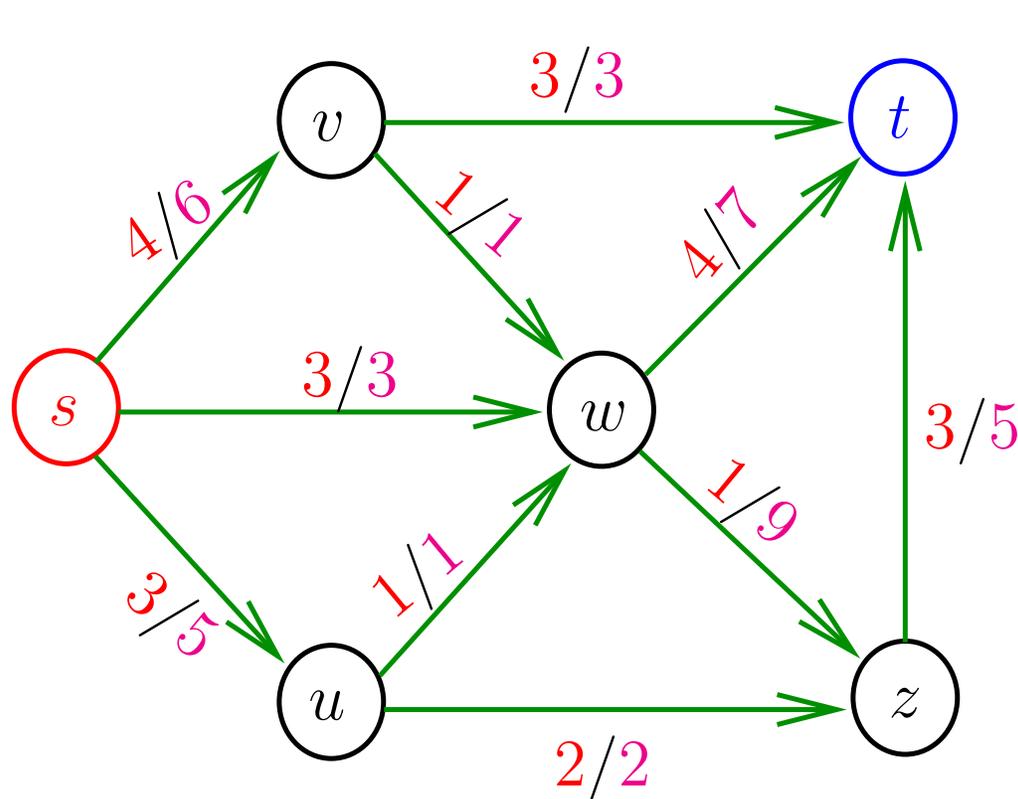
para cada arco ij .



$$x(ij)/u(ij)$$

Problema

Problema do fluxo máximo: Dados nós s e t de uma rede (N, A, u) com função-capacidade u , encontrar um st -fluxo que repete u e tenha valor máximo.



$$x(ij)/u(ij)$$

Fluxo máximo (problema primal)

Podemos supor que a rede (N, A, u) possui um arco ts de capacidade $+\infty$. (Exercício 11.1)

O problema do fluxo máximo é **equivalente** ao seguinte programa linear, que chamamos de **primal**: encontrar um vetor x indexado por A que

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x(ts) \\ \text{sob as restrições} & x(\bar{j}, j) - x(j, \bar{j}) = 0 \quad \text{para cada } j \in N, \\ & x(ij) \leq u(ij) \quad \text{para cada } ij \in A, \\ & x(ij) \geq 0 \quad \text{para cada } ij \in A. \end{array}$$

Problema dual

O correspondente problema **dual** é: encontrar vetores y indexado por N e z indexado por A que

minimize uz

sob as restrições $y(s) - y(t) + z(ts) \geq 1,$

$y(j) - y(i) + z(ij) \geq 0$ para $ij \in A - \{ts\}$

$z(ij) \geq 0$ para cada $ij \in A.$

Note que se y', z' é solução do problema acima então

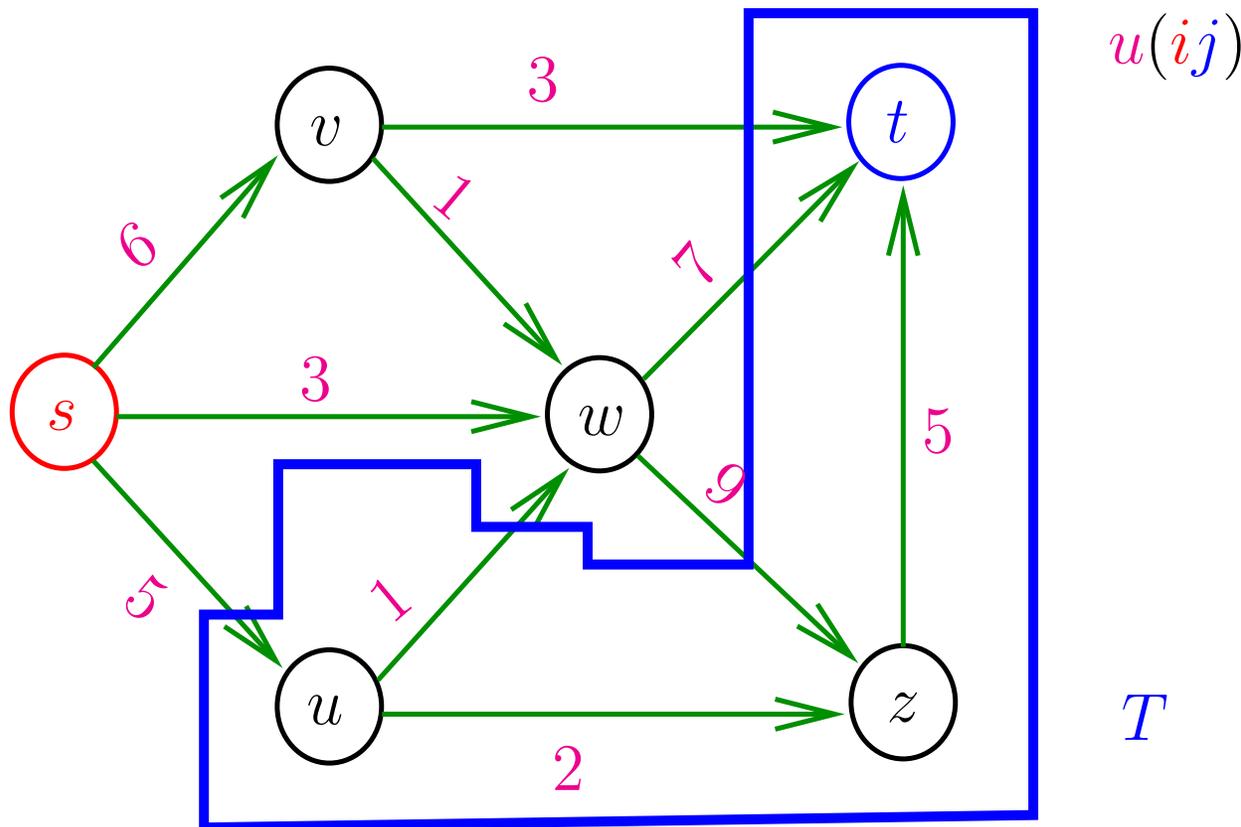
$$z'(ts) = 0.$$

Gargalo

A capacidade de um corte $\nabla(\bar{T}, T)$ é o número

$$u(\bar{T}, T) := \sum (u(ij) : ij \in \nabla(\bar{T}, T))$$

Exemplo: capacidade de $\nabla(\bar{T}, T)$ é $3 + 7 + 9 + 5 = 24$

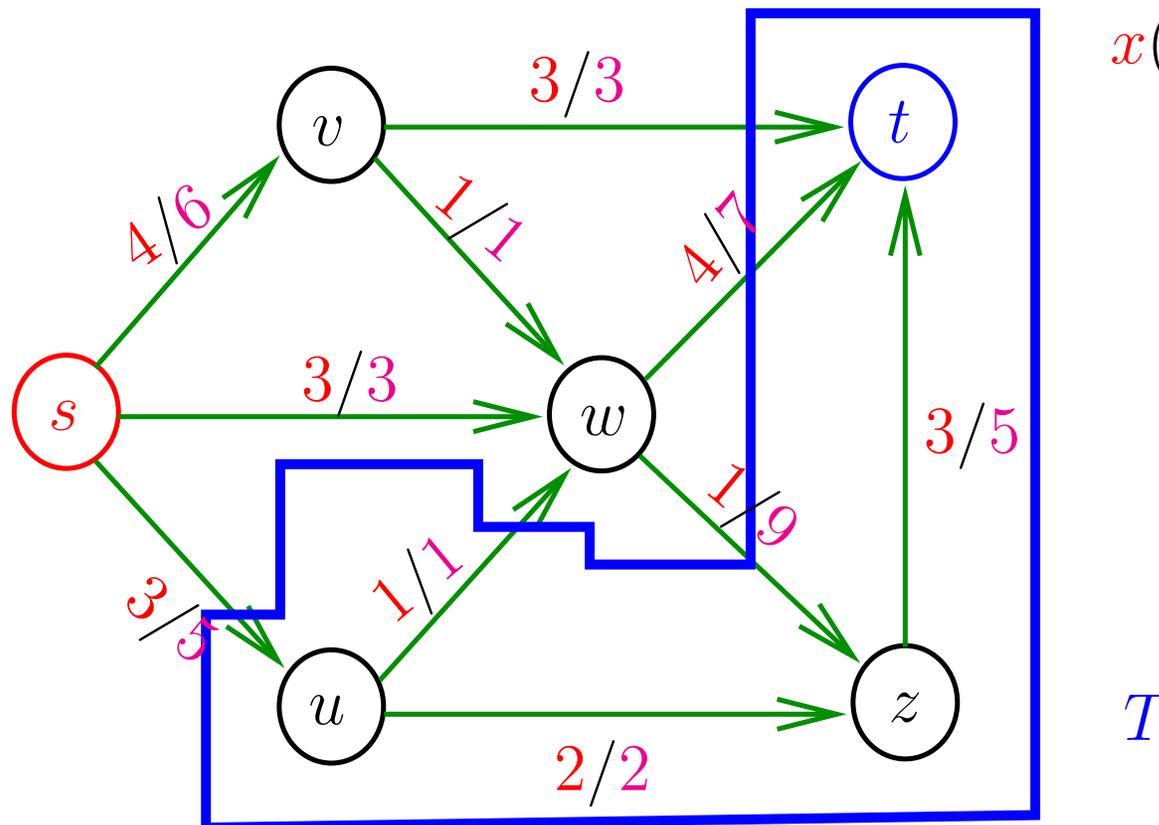


Lema da dualidade

Se x é um st -fluxo que respeita u e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte então

$$\text{val}(x) \leq u(\bar{T}, T).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 10 \leq 24 = u(\bar{T}, T)$.

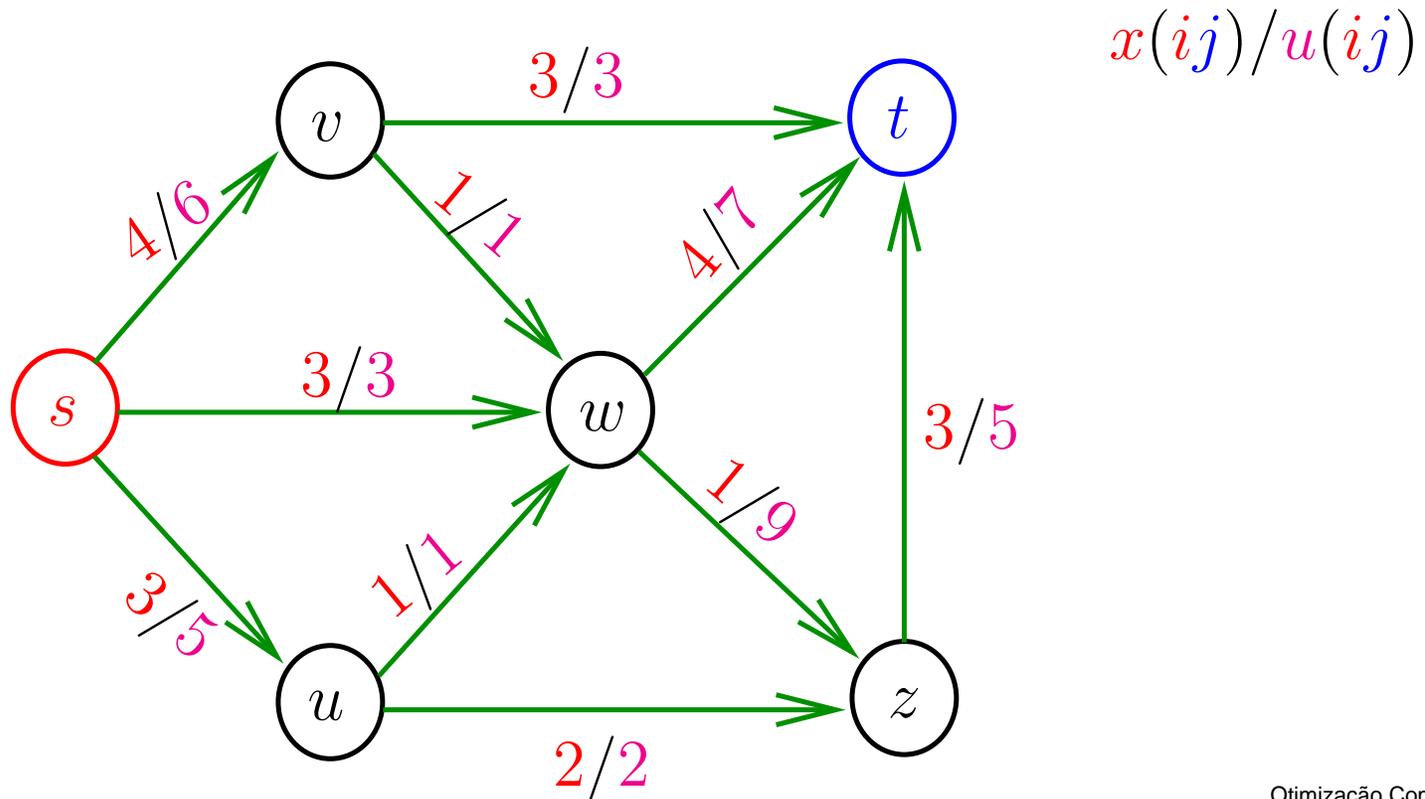


Consequência

Se x é um st -fluxo que respeita u e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T)$$

então x é um st -fluxo de **valor máximo** e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte de **capacidade mínima**.

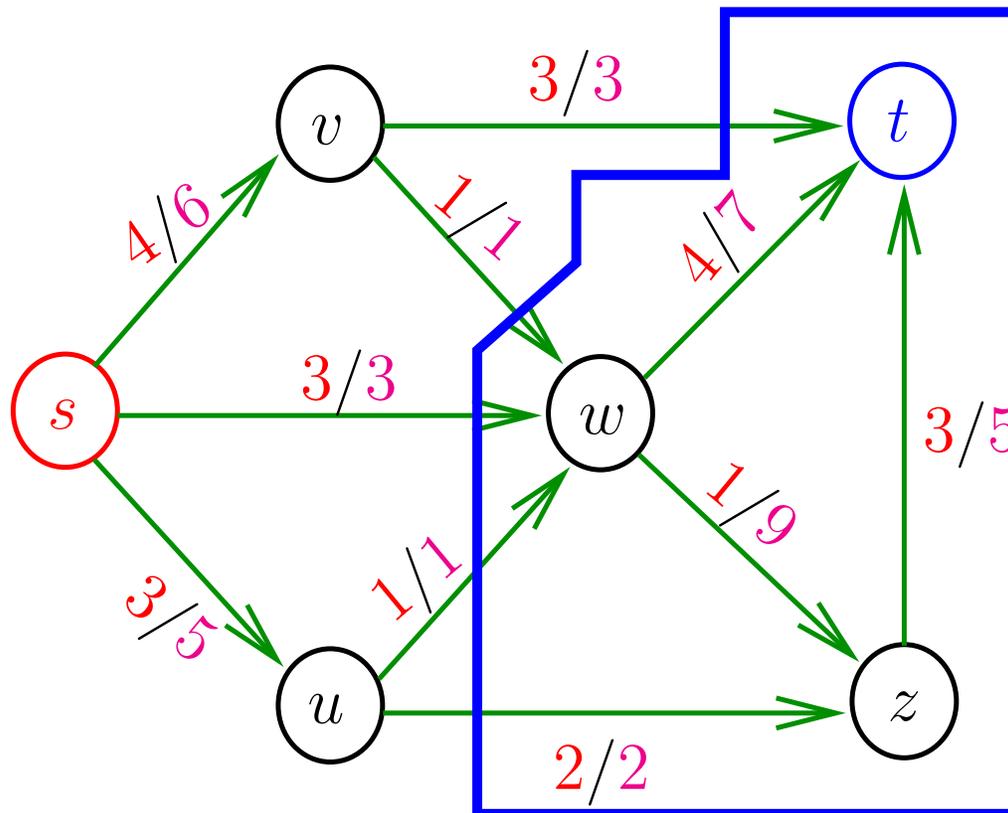


Consequência

Se x é um st -fluxo que respeita u e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T)$$

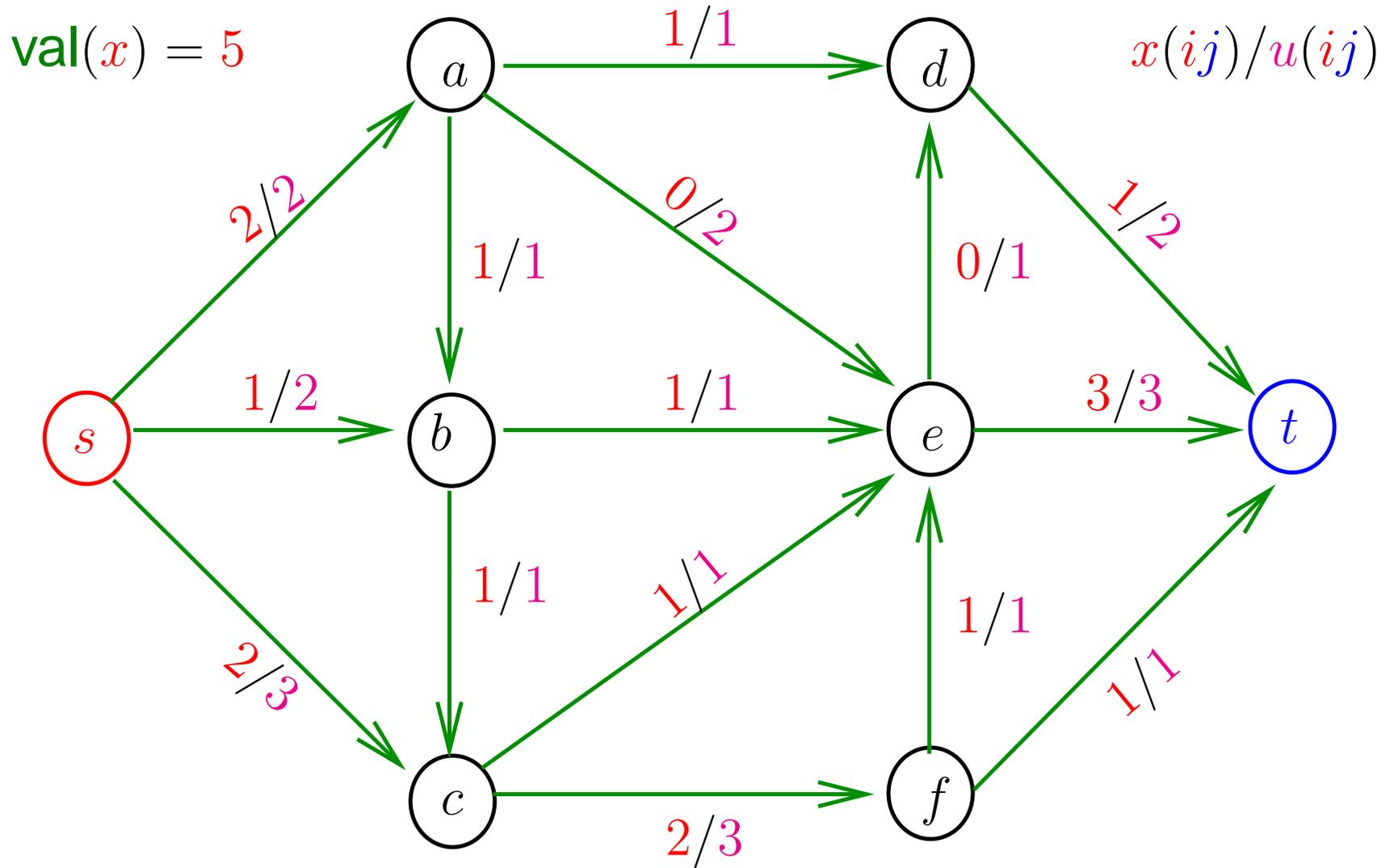
então x é um st -fluxo de **valor máximo** e $\nabla(\bar{T}, T)$ é um st -corte de **capacidade mínima**.



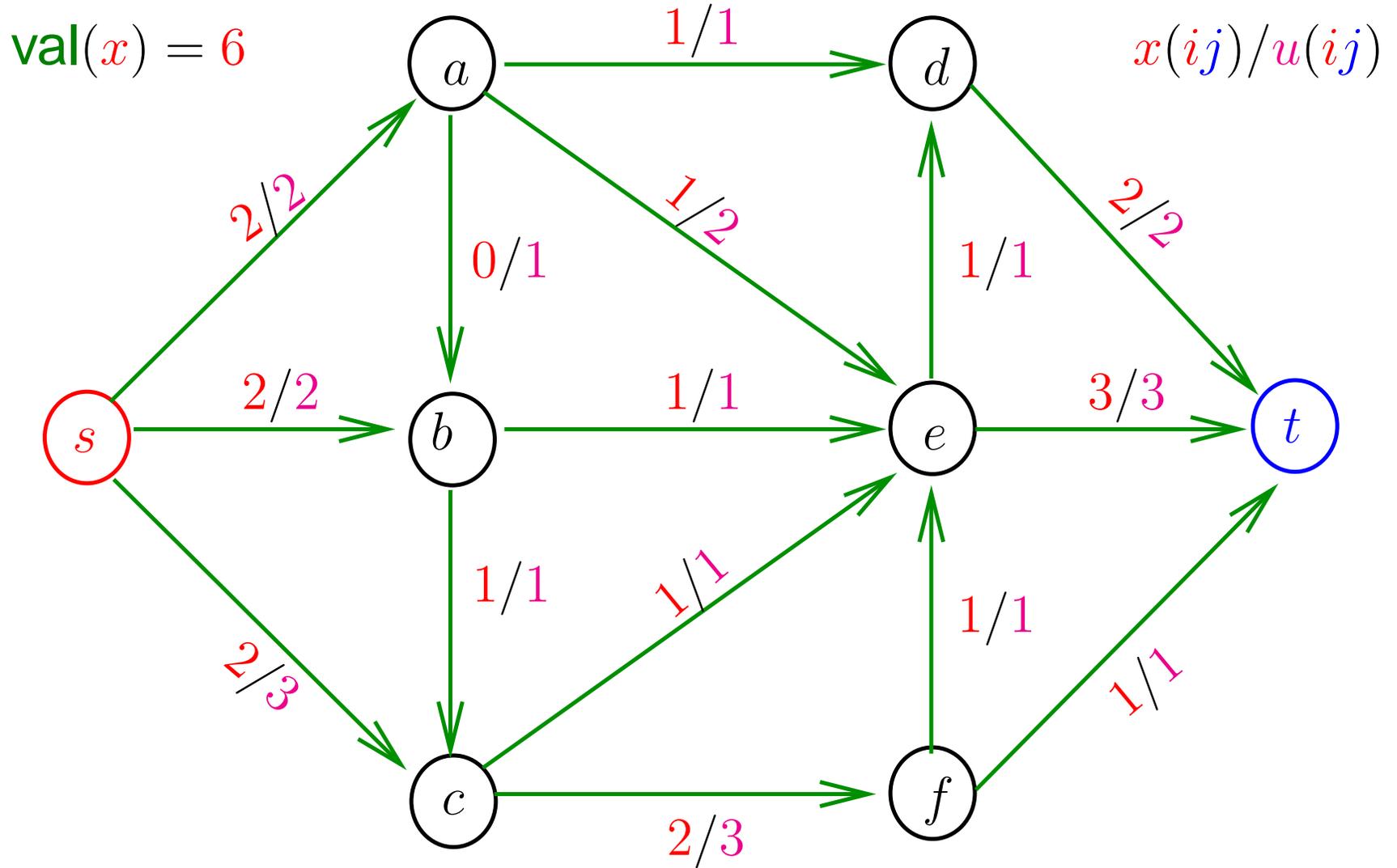
$$x(ij)/u(ij)$$

T

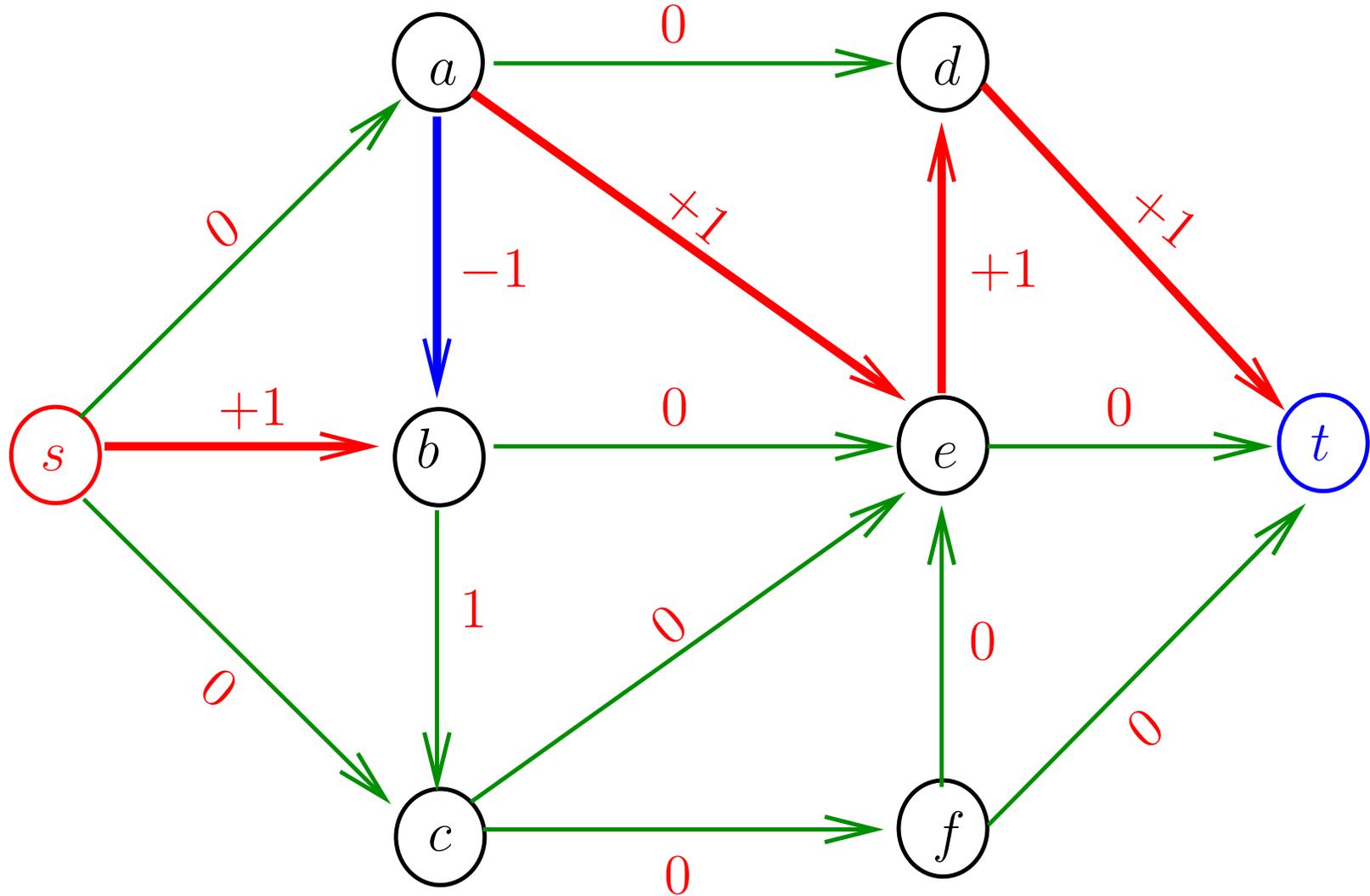
x é máximo?



E agora? x é máximo?



Onde mudou?

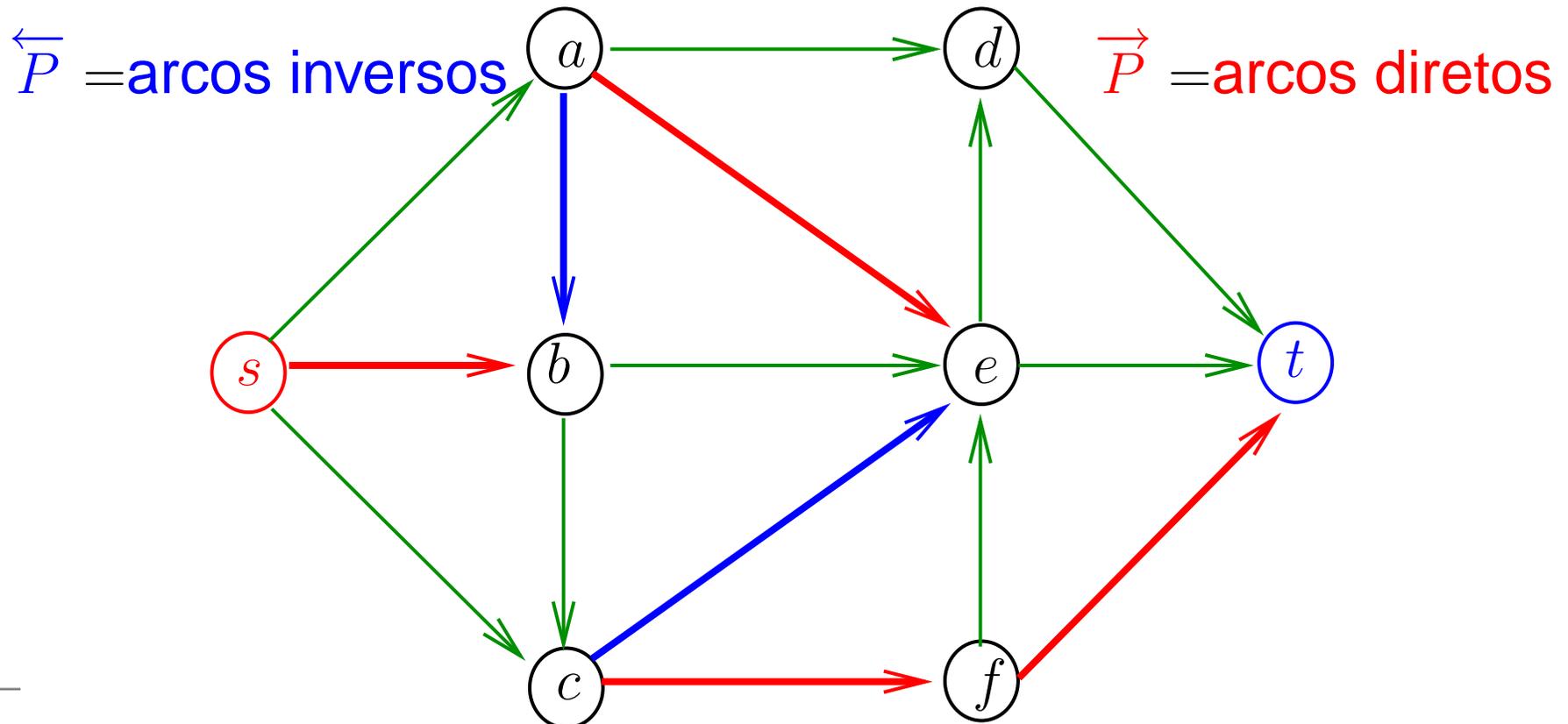


Pseudo-caminho

Um **pseudo-caminho** é uma seqüência

$$\langle i_0, a_1, i_1, \dots, a_q, i_q \rangle$$

em que i_0, \dots, i_q são nós distintos e $a_k = i_{k-1}i_k$ ou $a_k = i_k i_{k-1}$.

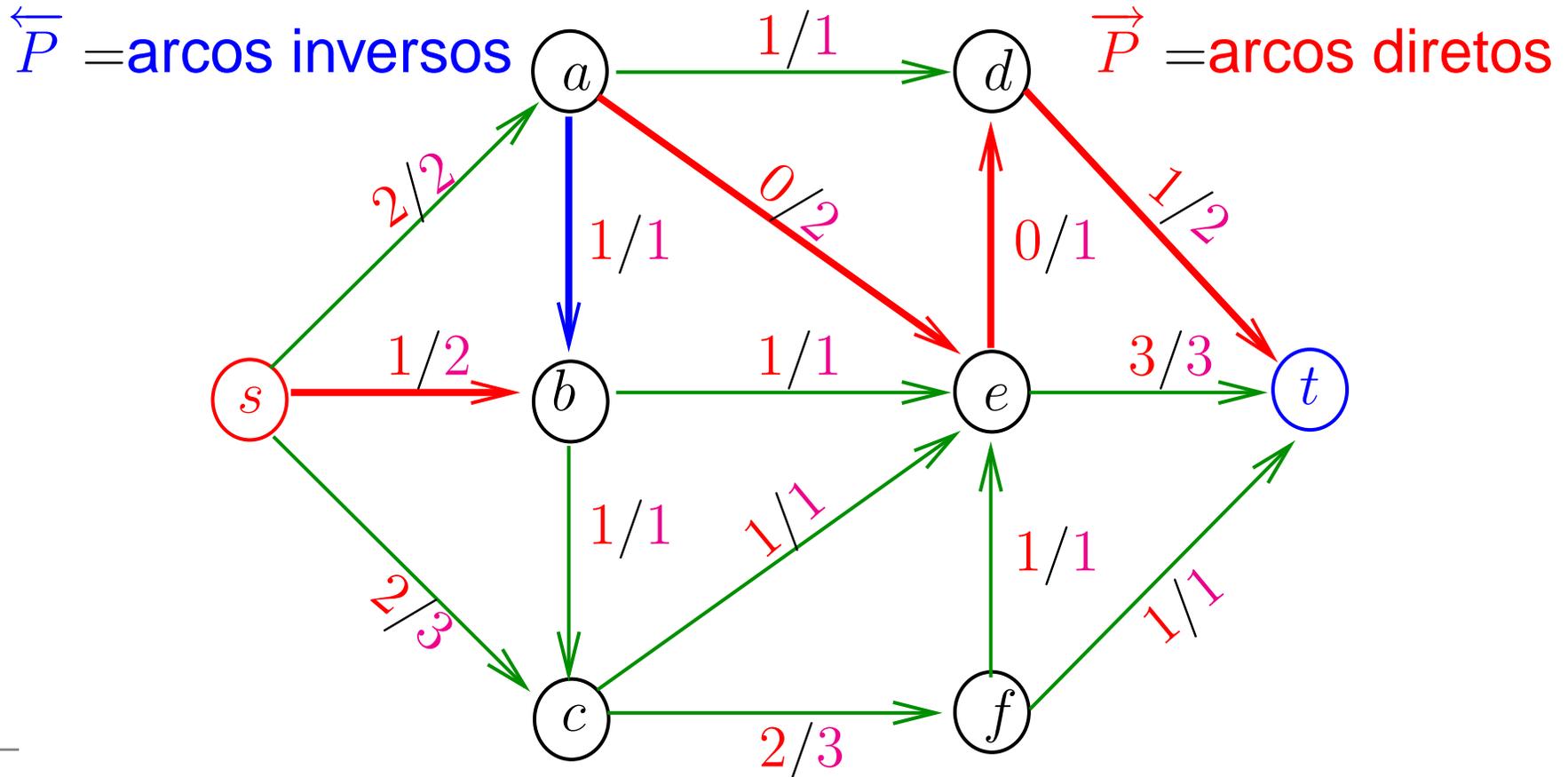


Pseudo-caminho de incremento

Um pseudo-caminho P é **de incremento** se

$$x(ij) < u(ij) \quad \text{para cada } ij \text{ em } \vec{P}$$

$$x(ij) > 0 \quad \text{para cada } ij \text{ em } \overleftarrow{P}$$



Lema do incremento

Se x é um st -fluxo e P é um pseudo-caminho de incremento de s a t , então x **não** é um fluxo máximo.

Rascunho da demonstração: Seja δ o maior valor tal que

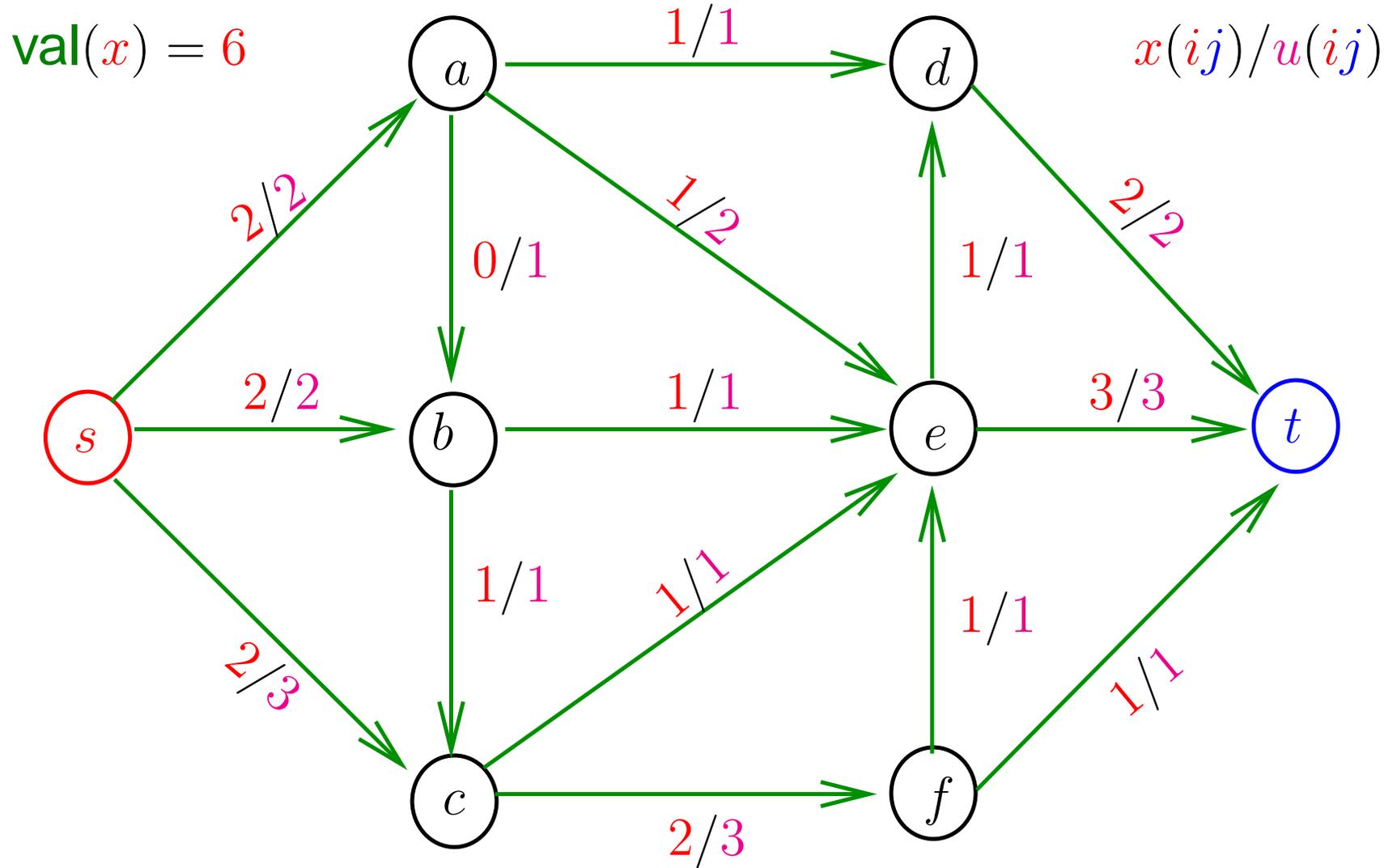
$$\begin{aligned} \delta &\leq u(ij) - x(ij) && \text{para cada } ij \in \vec{P} \\ \delta &\leq x(ij) && \text{para cada } ij \in \overleftarrow{P}. \end{aligned}$$

É evidente que $\delta > 0$. Seja x' o st -fluxo

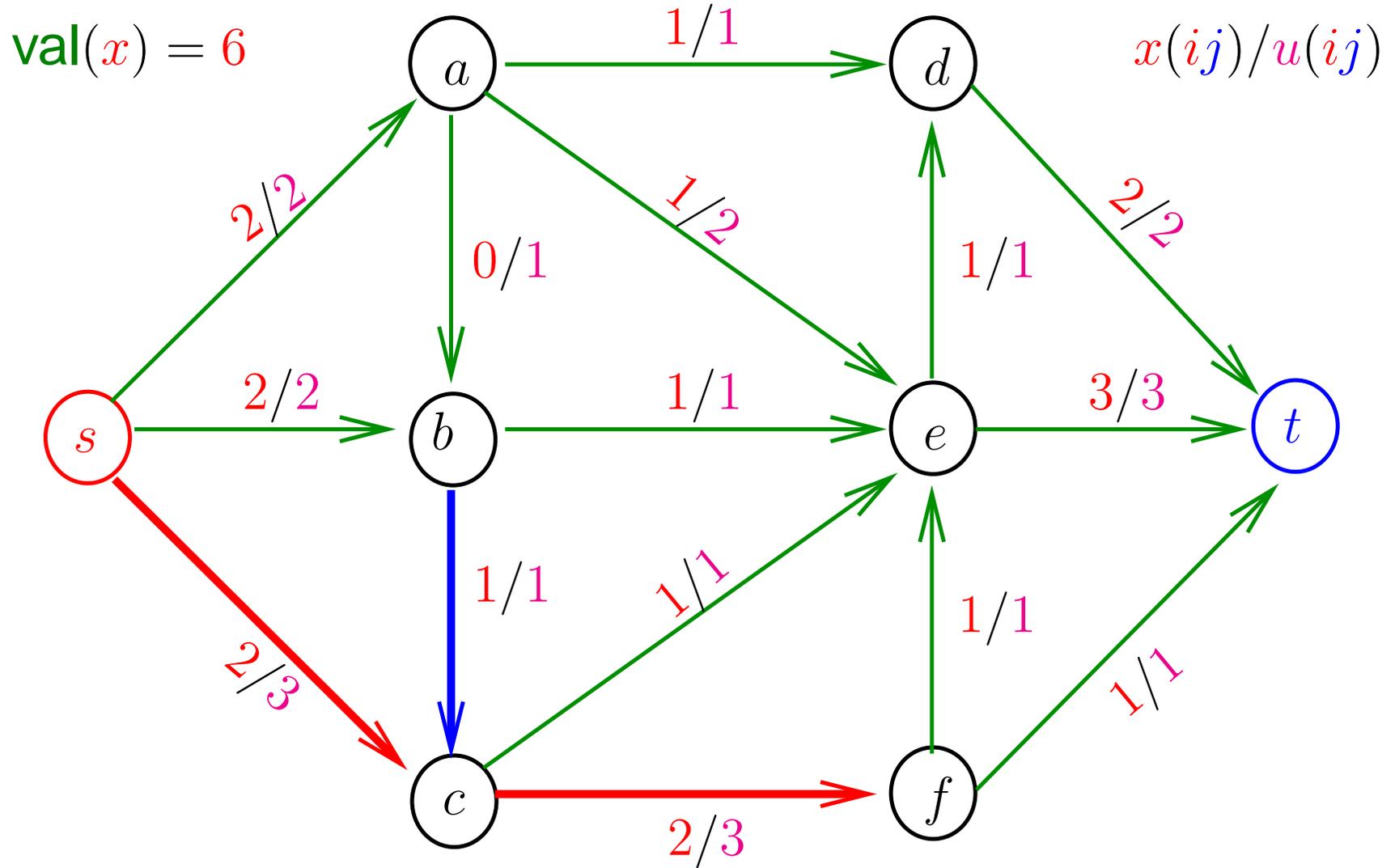
$$x'(ij) := \begin{cases} x(ij) + \delta & \text{se } ij \in \vec{P} \\ x(ij) - \delta & \text{se } ij \in \overleftarrow{P} \\ x(ij) & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Temos que $\text{val}(x') = \text{val}(x) + \delta$.

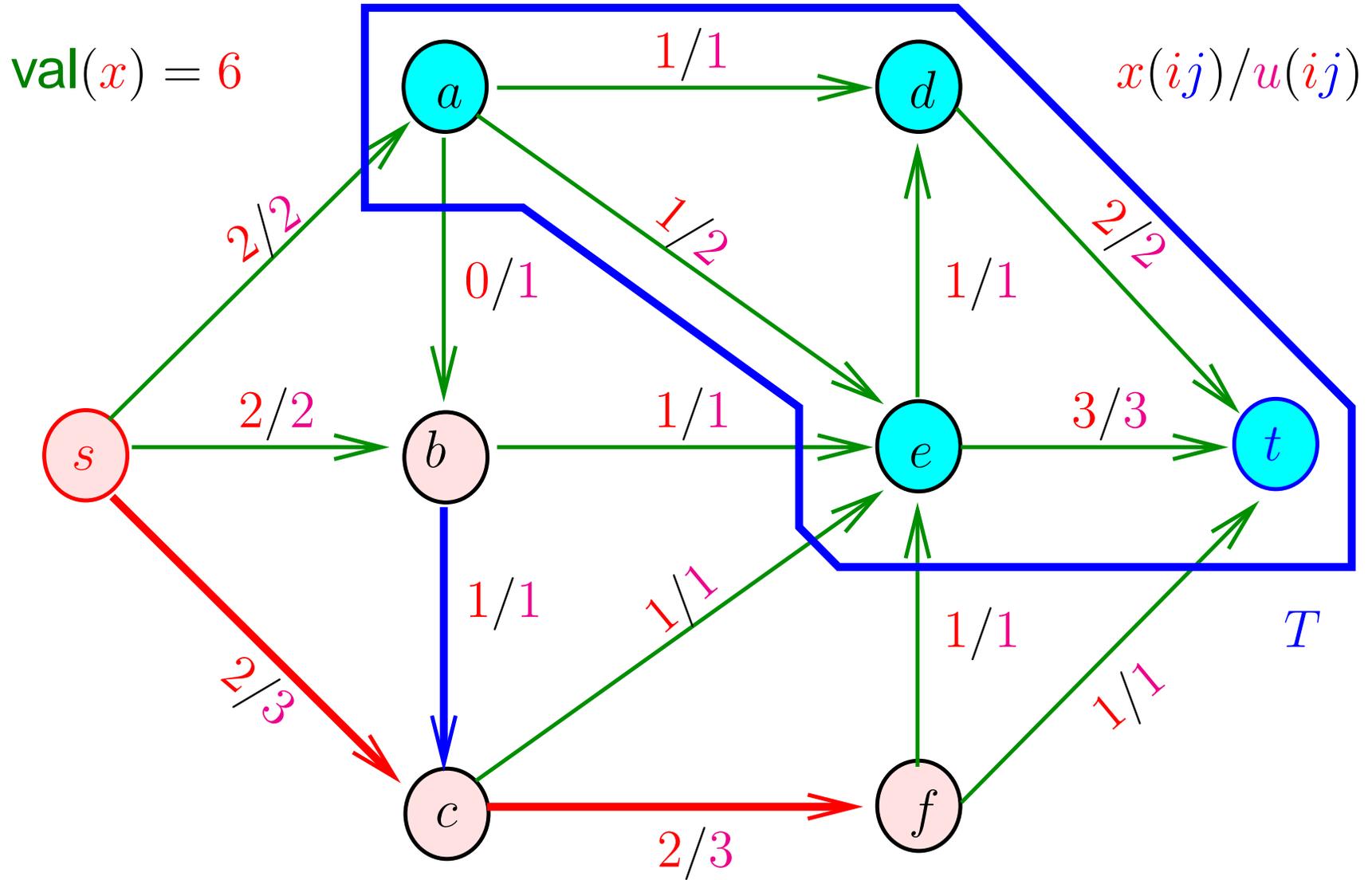
E agora? x é máximo?



E agora? x é máximo?



E agora? x é máximo?



Lema do certificado

Se x é um st -fluxo e **não existe** um pseudo-caminho de incremento de s a t , então existe um st -corte $\nabla(\bar{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T).$$

Rascunho da demonstração: Seja S o conjunto de nós que são **términos** de algum pseudo-caminho de incremento que começa em s e seja $T := \bar{S}$.

Da definição segue que $x(\bar{T}, T) = u(\bar{T}, T)$ e $x(T, \bar{T}) = 0$.
Logo,

$$\begin{aligned}\text{val}(x) &= x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) \\ &= x(\bar{T}, T) - x(T, \bar{T}) \\ &= x(\bar{T}, T) \\ &= u(\bar{T}, T)\end{aligned}$$

Consequência

Para quaisquer dois nós s e t em uma rede (N, A, u) com função-capacidade u , existe um st -fluxo x que respeita u tal que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T)$$

para algum st -corte $\nabla(\bar{T}, T)$.

Rascunho de demonstração:

Seja x um st -fluxo de **valor máximo**.

Pelo lema do incremento não existe um pseudo-caminho de incremento de s a t .

Pelo lema do certificado existe um st -corte $\nabla(\bar{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\bar{T}, T).$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois nós s e t em uma rede (N, A, u) com função-capacidade u tem-se que

$$\max\{\text{val}(x) : x \text{ é } st\text{-fluxo}\} = \min\{u(\bar{T}, T) : T \text{ é } st\text{-corte}\}.$$