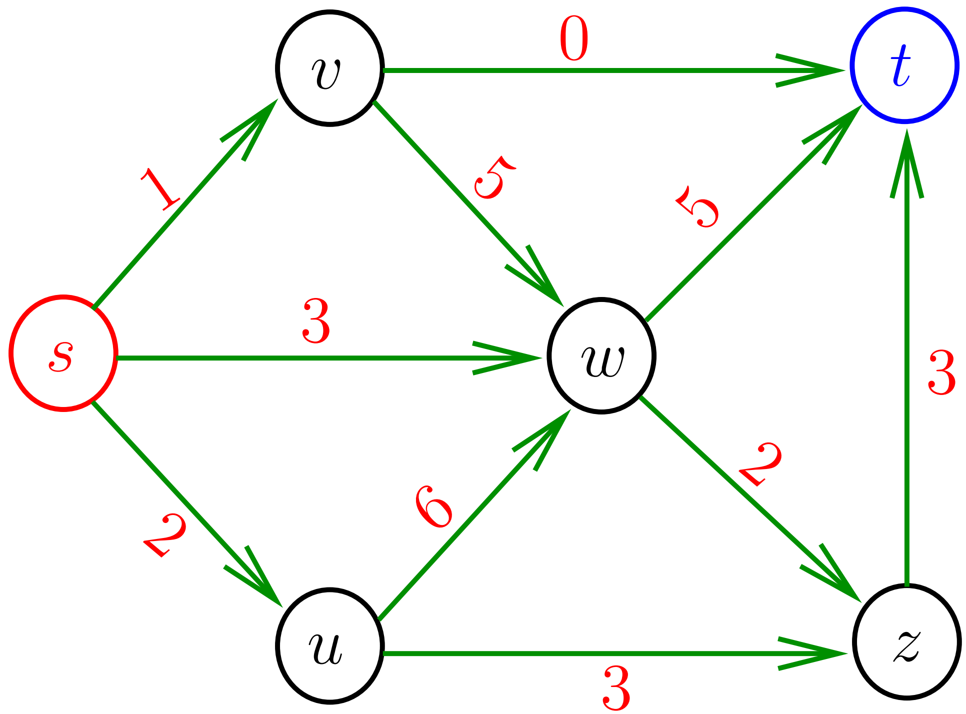
AULA 13

Fluxos

PF 10.1, 10.2, 10.3

Fluxos

Um fluxo é uma função de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

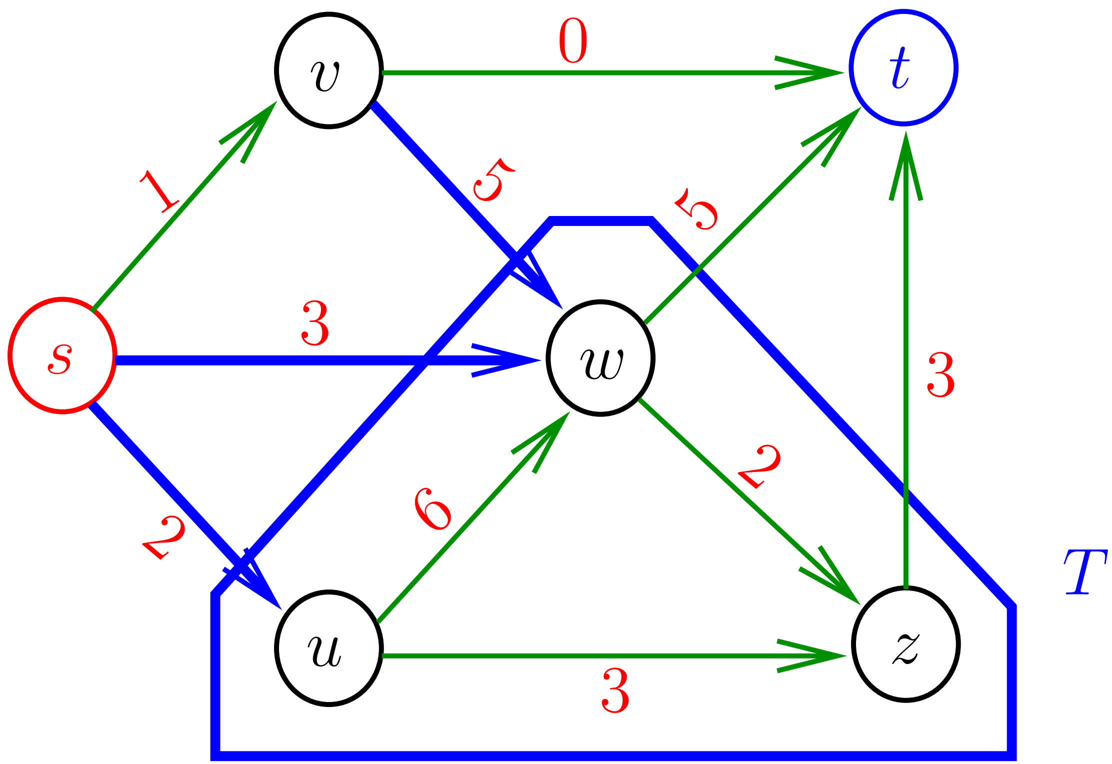


Excesso

Se x é um fluxo e T é uma parte de N então

$$x(\overline{T}, T) := \sum (x(ij) : ij \in (\overline{T}, T))$$

Exemplo: $x(\overline{T}, T) = 2 + 3 + 5 = 10$

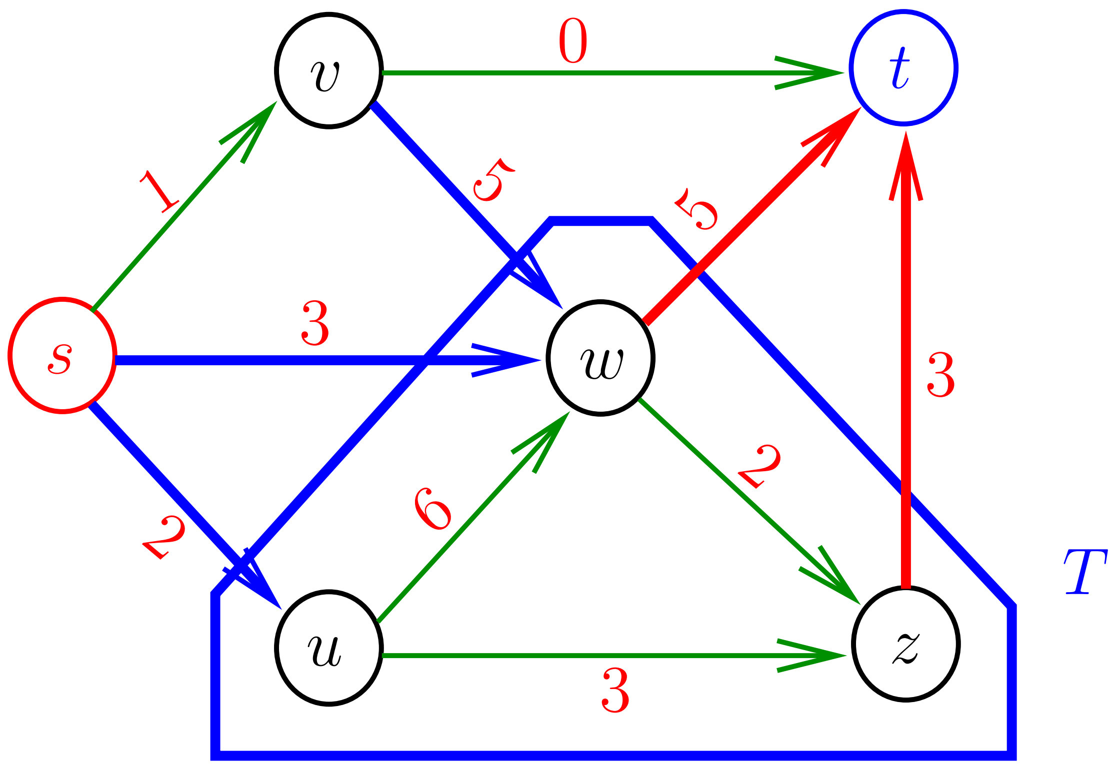


Excesso

O excesso ou acúmulo de x em T é a diferença entre o que entra em T e o que sai de T:

$$x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T})$$

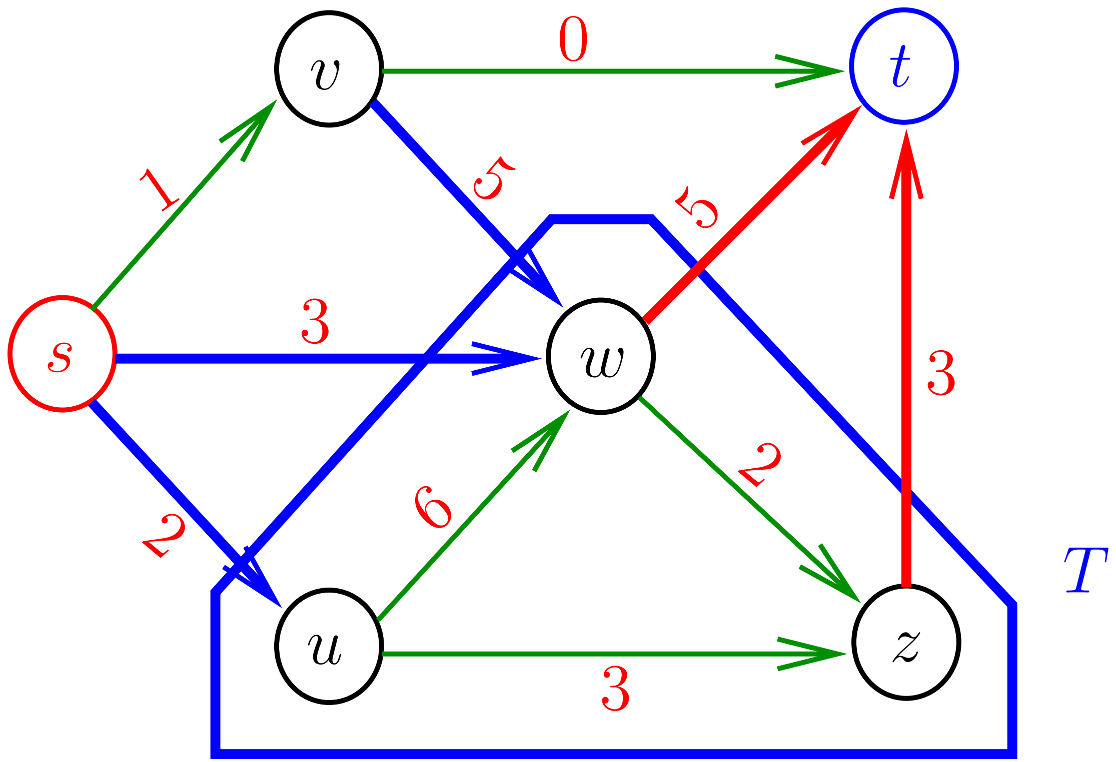
Exemplo: $x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) = 10 - 8 = 2$



Soma de excessos

$$\sum(x(\bar{t},t) - x(t,\bar{t}) : t \in T) = x(\overline{T},T) - x(T,\overline{T})$$

Exemplo: $x(\overline{T},T) - x(T,\overline{T}) = 10 - 8 = 2$

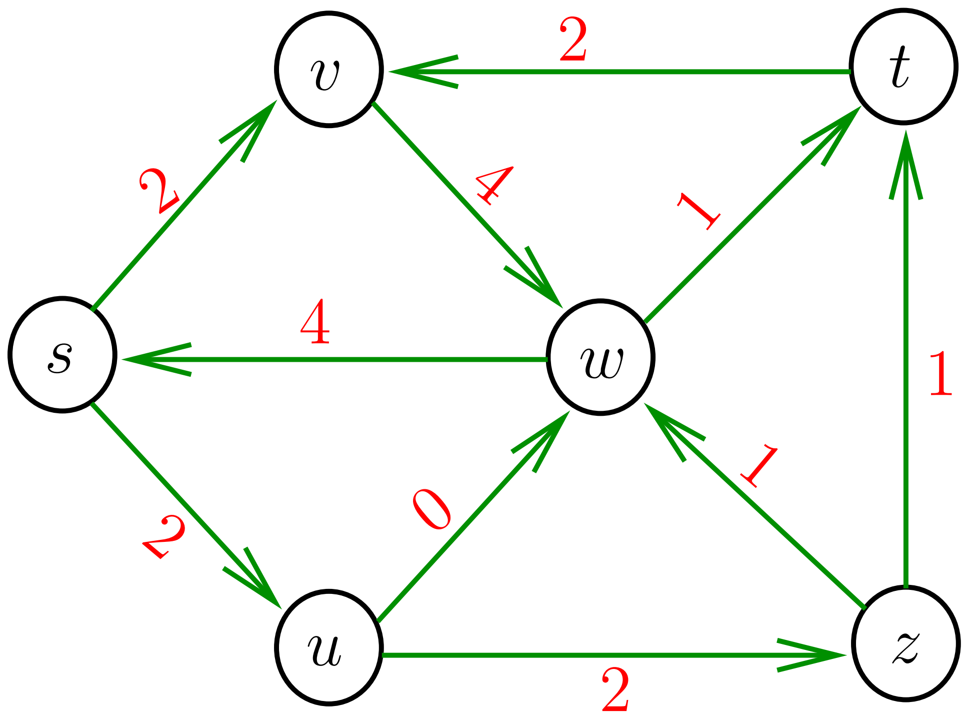


Circulação

Um circulação é qualquer fluxo x tal que

$$x(\overline{j}, j) = x(j, \overline{j})$$

para todo nó j.

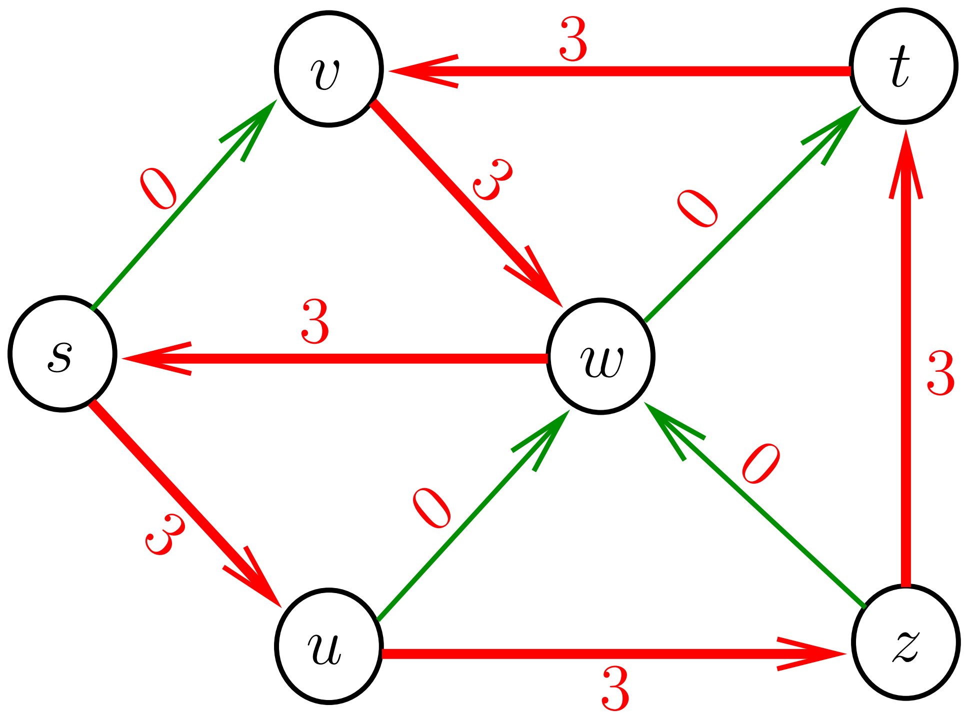


Circulações elementares

Se C é um ciclo e α é um inteiro não-negativo então

$$x(ij) := \begin{cases} \alpha & \text{se } C \text{ passa por } ij \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

é a circulação elementar definida por C e α.

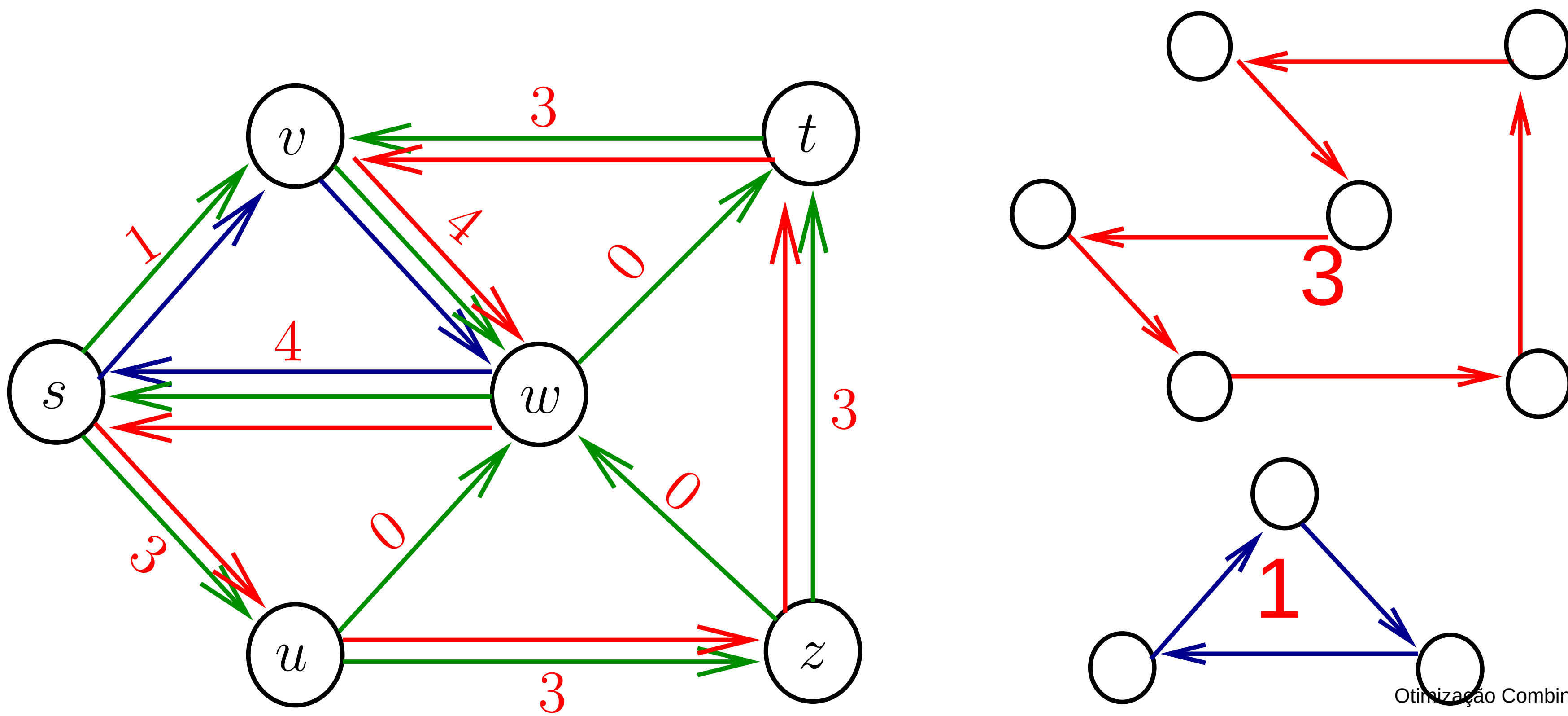


Mais circulações

Se $\mathcal{C}$ é uma coleção de ciclos e λ é uma função de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{Z}_{\geq}$, então o fluxo dado por

$$x(ij) := \sum(\lambda(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij é uma circulação.

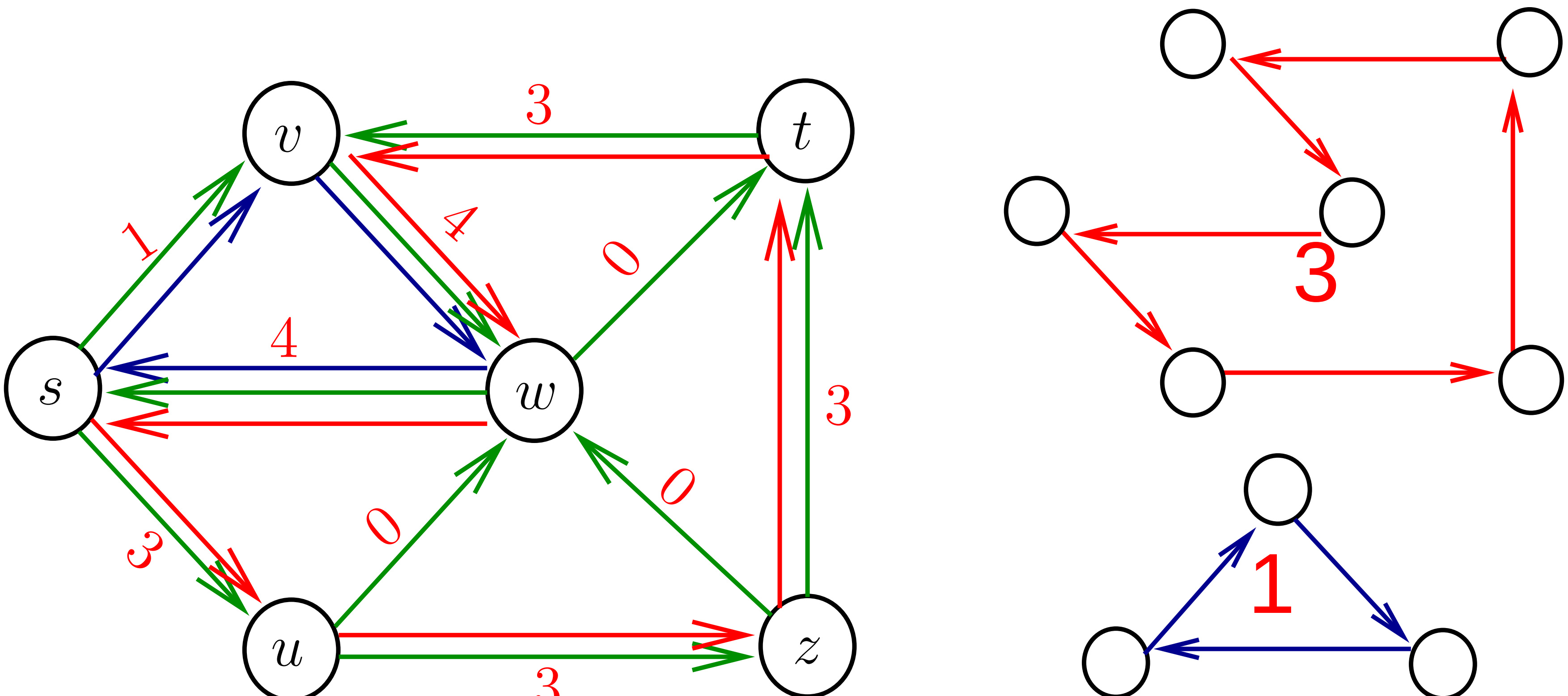


Decomposição de circulações

Se x é uma circulação então existe um coleção de ciclos $\mathcal{C}$ e $\lambda : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_{\geq}$ tais que $|\mathcal{C}| \leq m$ e

$$x(ij) = \sum(\lambda(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij.



Demonstração

A prova desse fato é algorítmica.

DECOMPOSIÇÃO-DE-CIRCULAÇÃO (N, A, x)

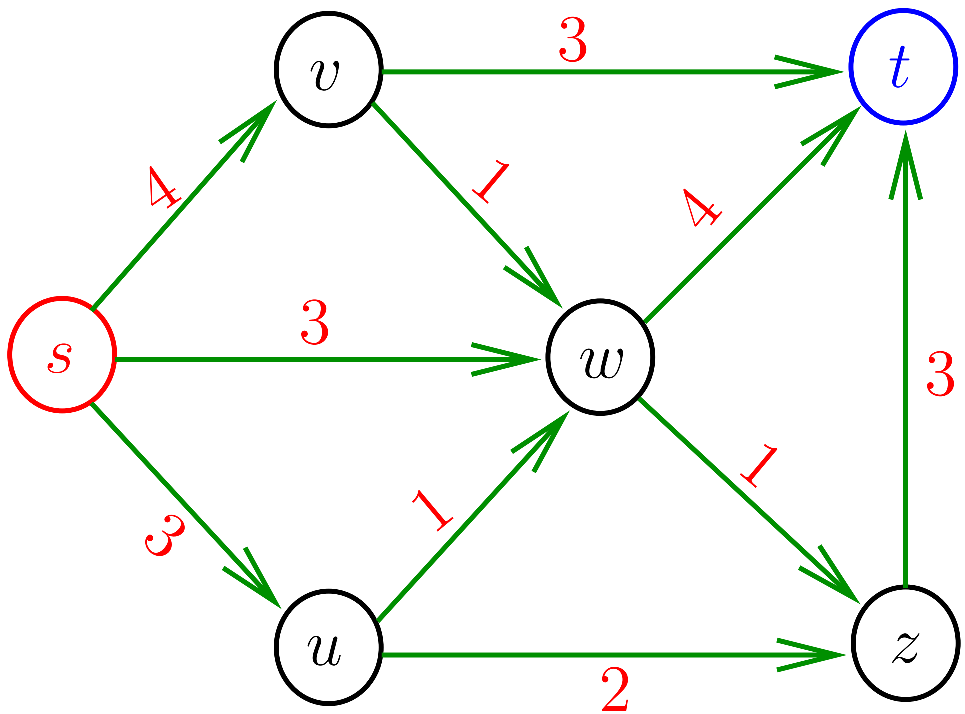
$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$
$A_x \leftarrow \{ij : x(ij) > 0\}$
enquanto $A_x \neq \emptyset$ **faça**
    escolha pq em A_x
    $P \leftarrow$ BUSCA(N, A_x, q, p)
    $C \leftarrow P \cdot \langle p, q \rangle$
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{C\}$
    $\lambda(C) \leftarrow \min\{x(ij) : ij$ é arco de $C\}$
    para cada arco ij de C **faça**
        $x(ij) \leftarrow x(ij) - \lambda(C)$
        se $x(ij) = 0$
            então $A_x \leftarrow A_x - \{ij\}$
devolva $\mathcal{C}$ e λ

Fluxo entre dois nós

Um fluxo de s a t é qualquer fluxo x tal que

$$x(\overline{j}, j) - x(j, \overline{j}) = 0$$

para todo j em $N - \{s, t\}$ e $x(\overline{t}, t) - x(t, \overline{t}) \geq 0$.

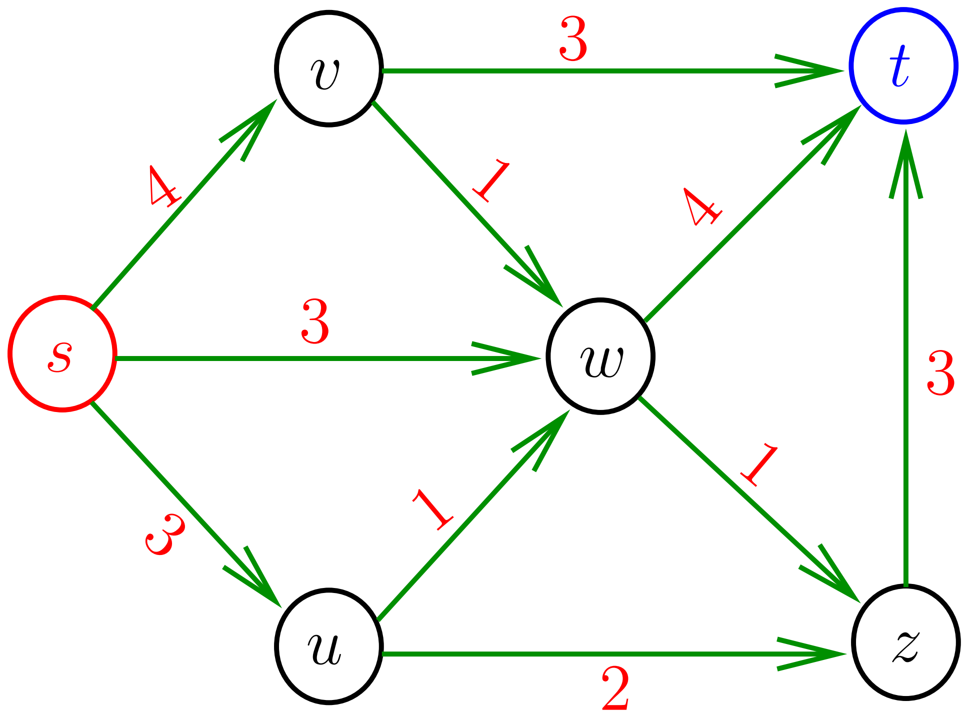


Valor de um st-fluxo

O valor de um st-fluxo x é

$$\text{val}(x) := x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 3 + 3 + 4 - 0 = 10$

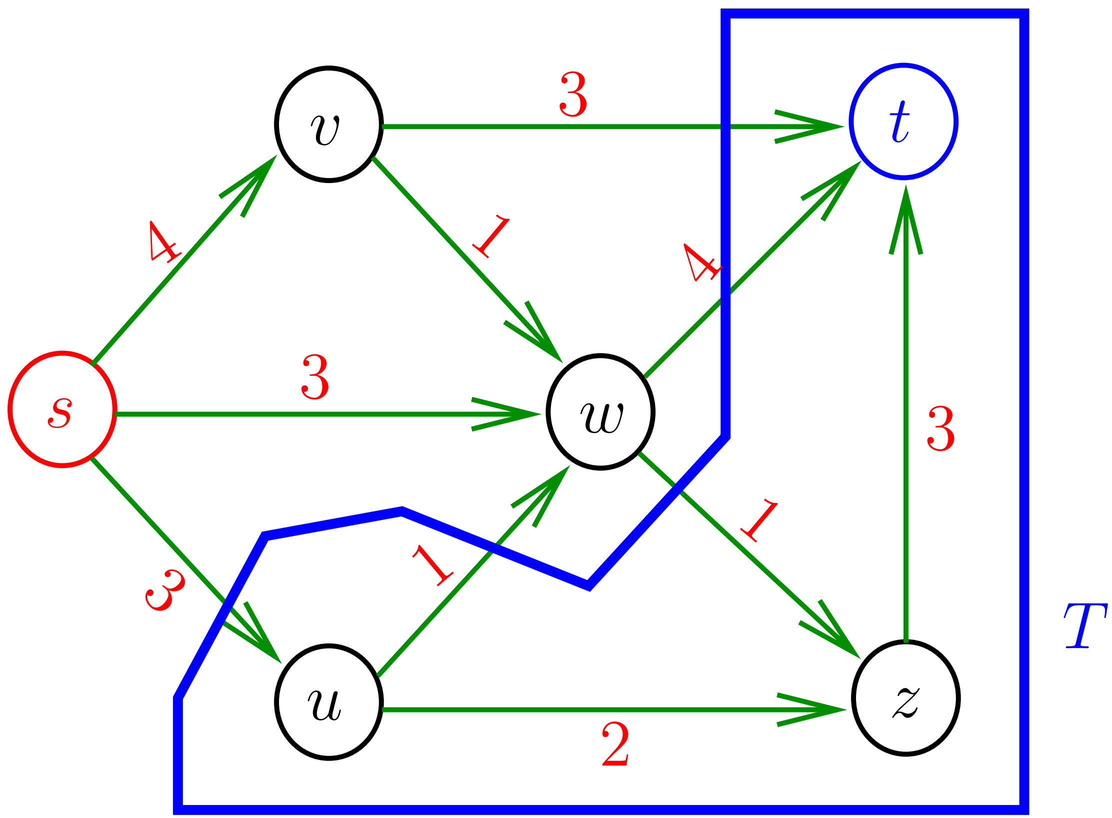


Valor de um st-fluxo

Para qualquer st-fluxo x e qualquer st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$

$$\text{val}(x) := x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = (3 + 1 + 4 + 3) - 1 = 10$

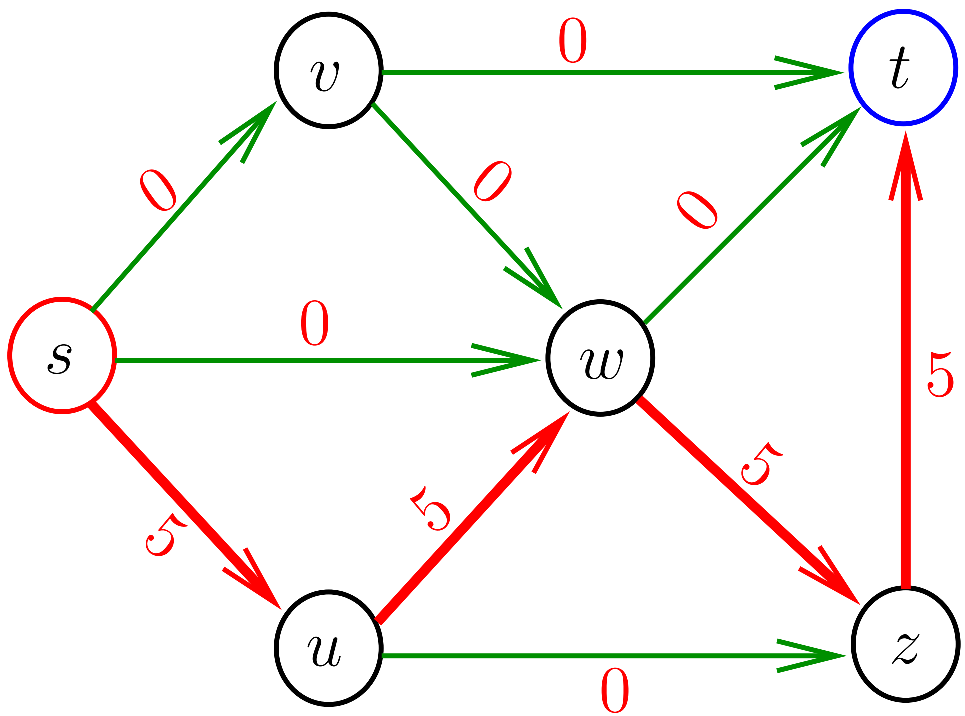


st-fluxos elementares

Se P é um st-caminho e α é um inteiro não-negativo então

$$x(ij) := \begin{cases} \alpha & \text{se } P \text{ passa por } ij \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

é a st-fluxo elementar definida por P e α.

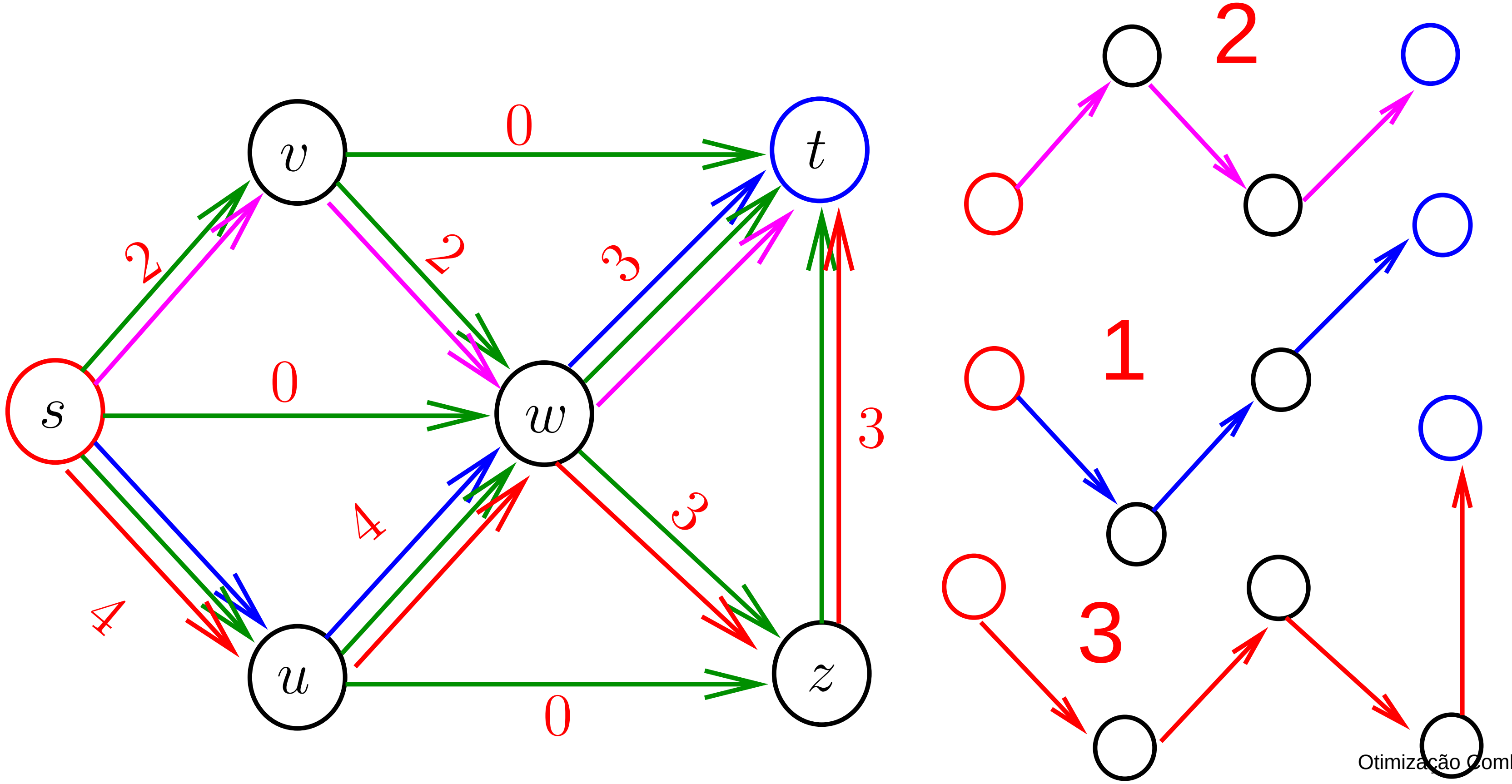


Mais st-fluxos

Se $\mathcal{P}$ é uma coleção de st-caminhos e λ é uma função de $\mathcal{P}$ em $\mathbb{Z}_{\geq}$, então o fluxo dado por

$$x(ij) := \sum(\lambda(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij é uma st-fluxo

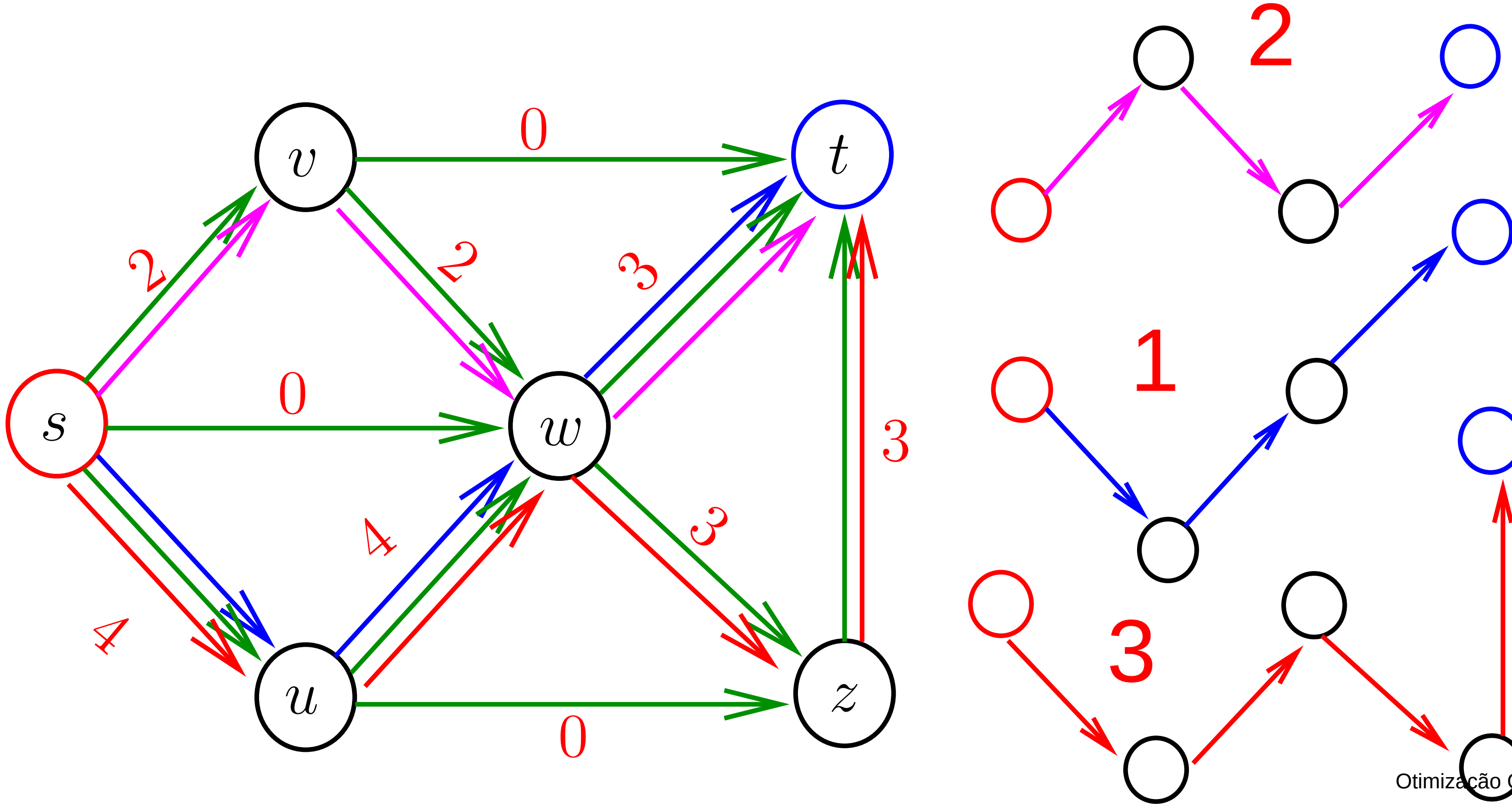


Decomposição de st-fluxos

Se x é uma st-fluxo então existe um coleção de st-caminhos $\mathcal{P}$, $|\mathcal{P}| \leq m$, e $\lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{Z}_{\geq}$ tais que o st-fluxo

$$x'(ij) := \sum(\lambda(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij ‘representa’ x: $x' \leq x$ e $\text{val}(x') = \text{val}(x)$.



Demonstração

A prova desse fato é algorítmica.

DECOMPOSIÇÃO (N, A, x)

$\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$
$A_x \leftarrow \{ij : x(ij) > 0\}$
enquanto val$(x) > 0$ **faça**
    $P \leftarrow$ BUSCA (N, A_x, s, t)
    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$
    $\lambda(P) \leftarrow \min\{x(ij) : ij$ é arco de $P\}$
    para cada arco ij de P **faça**
        $x(ij) \leftarrow x(ij) - \lambda(P)$
        se $x(ij) = 0$
            então $A_x \leftarrow A_x - \{ij\}$
devolva $\mathcal{P}$ e λ

Conseqüência

(Carathéodory) Se x é um st-fluxo então existem

- uma coleção $\mathcal{P}$ de st-caminhos
- uma função $\lambda_1 : \mathcal{P} \to \mathbb{Z}_\geq$
- uma coleção $\mathcal{C}$ de ciclos
- uma função $\lambda_2 : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_\geq$

tais que $|\mathcal{P} \cup \mathcal{C}| \leq m$ e

$$x(ij) = \sum(\lambda_1(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$
$$+ \sum(\lambda_2(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cara arco ij.

Decomposição de fluxos

A demonstração é algorítmica.

DECOMPOSIÇÃO-DE-FLUXO (N, A, x)

1 $\mathcal{P}, \lambda_1 \leftarrow$ DECOMPOSIÇÃO (N, A, x)

2 $\mathcal{C}, \lambda_2 \leftarrow$ DECOMPOSIÇÃO-DE-CIRCULAÇÃO (N, A, x)

3 **devolva** $\mathcal{P}, \lambda_1, \mathcal{C}, \lambda_2$

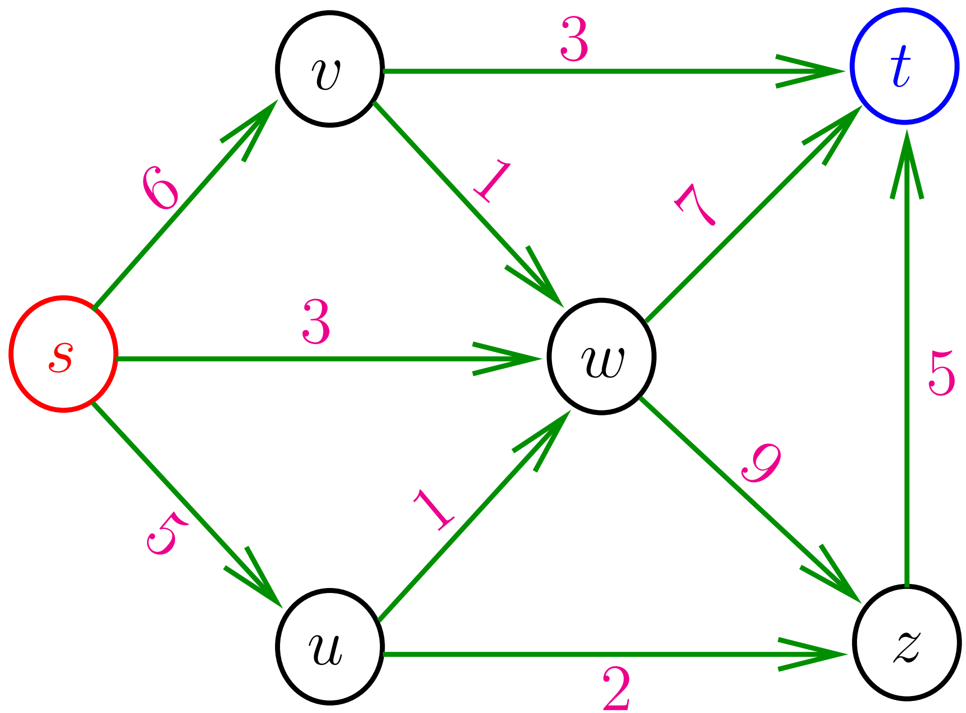
Fluxo máximo

PF 11.1, 11.2, 11.3

Capacidades

Uma função-capacidade em uma grafo (N, A) é qualquer função de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$:

$$u : A \to \mathbb{Z}_{\geq} \; .$$



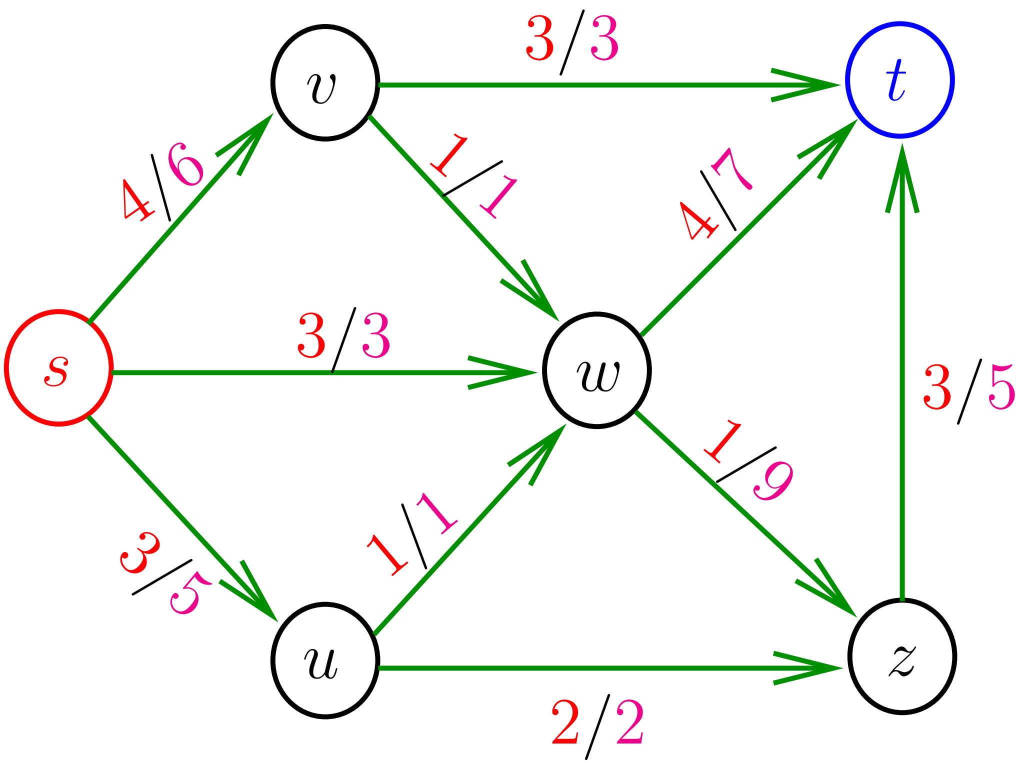
Capacidades

Uma função x de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$ respeita u de $x \leq u$:

$$x(ij) \leq u(ij),$$

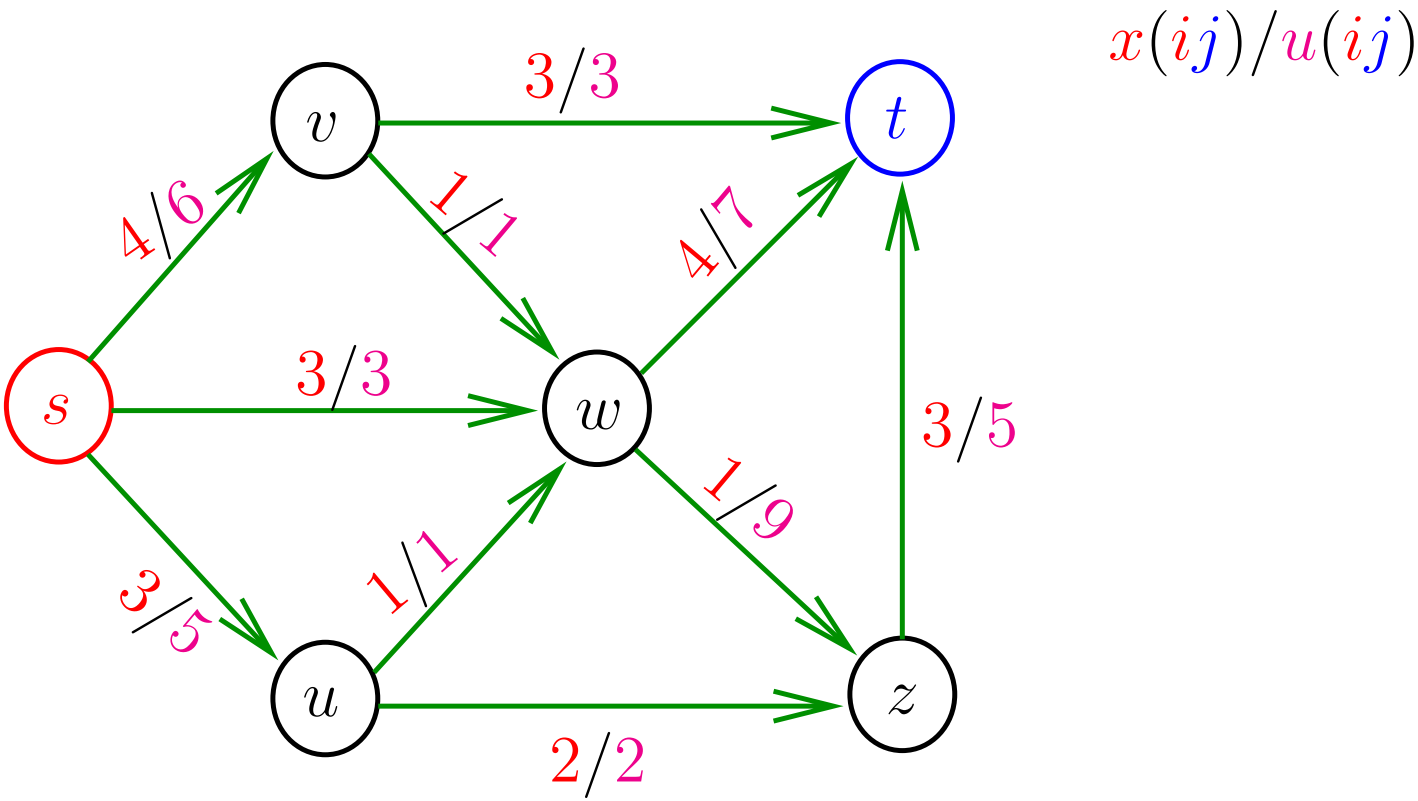
para cada arco ij.

$x(ij)/u(ij)$



Problema

Problema do fluxo máximo: Dados nós s e t de uma rede (N, A, u) com função-capacidade u, encontrar um st-fluxo que repeite u e tenha valor máximo.



Fluxo máximo (problema primal)

Podemos supor que a rede (N, A, u) possui um arco ts de capacidade $+\infty$. (Exercício 11.1)

O problema do fluxo máximo é equivalente ao seguinte programa linear, que chamamos de primal: encontrar um vetor x indexado por A que

$$\begin{array}{rrcll} \text{maximize} & x(ts) & & & \\ \text{sob as restrições} & x(\bar{j}, j) - x(j, \bar{j}) & = & 0 & \text{para cada } j \in N, \\ & x(ij) & \leq & u(ij) & \text{para cada } ij \in A, \\ & x(ij) & \geq & 0 & \text{para cada } ij \in A. \end{array}$$

Problema dual

O correspondente problema dual é: encontrar vetores y indexado por N e z indexado por A que

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimize} & uz & & & \\
\text{sob as restrições} & y(s) - y(t) + z(ts) & \geq & 1, & \\
 & y(j) - y(i) + z(ij) & \geq & 0 & \text{para } ij \in A - \{ts\} \\
 & z(ij) & \geq & 0 & \text{para cada } ij \in A.
\end{array}
$$

Note que se y', z' é solução do problema acima então

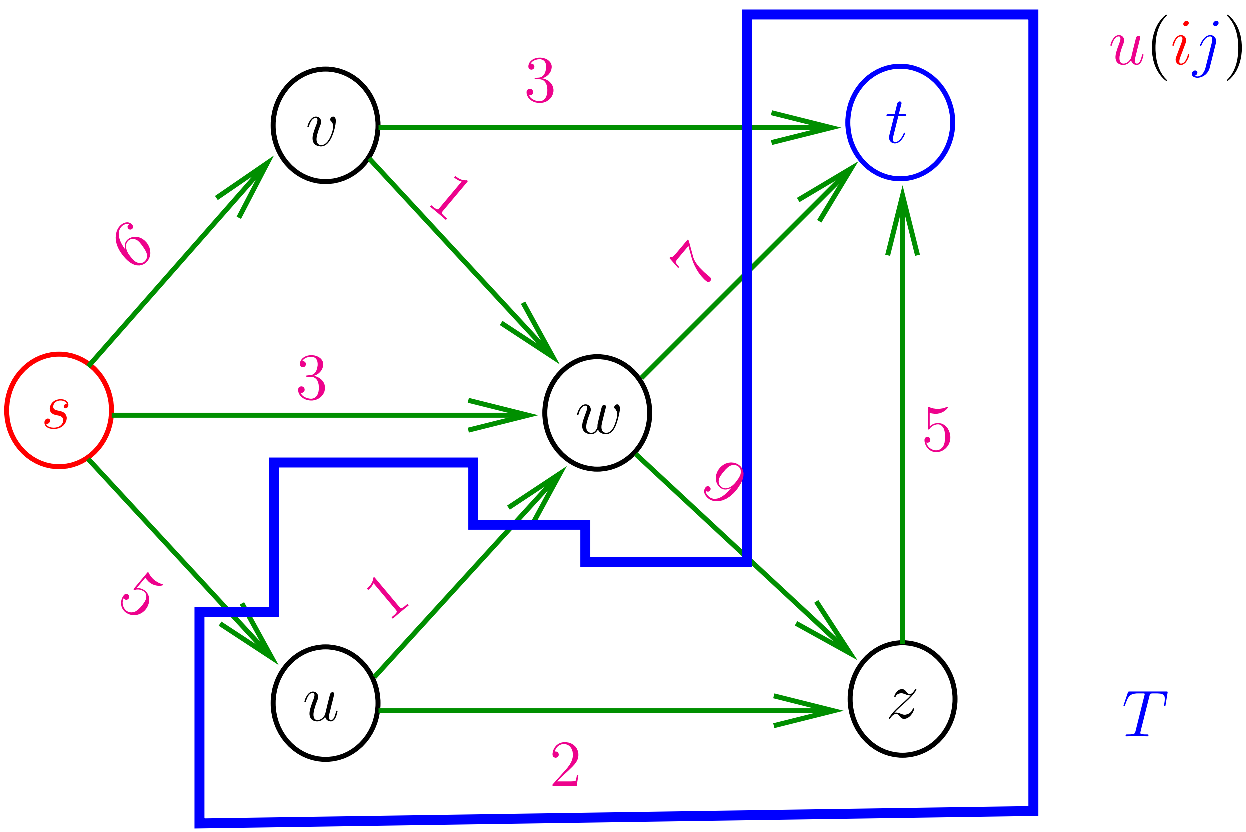
$$z'(ts) = 0.$$

Gargalo

A capacidade de um corte $\nabla(\overline{T}, T)$ é o número

$$u(\overline{T}, T) := \sum (u(ij) : ij \in \nabla(\overline{T}, T))$$

Exemplo: capacidade de $\nabla(\overline{T}, T)$ é $3 + 7 + 9 + 5 = 24$

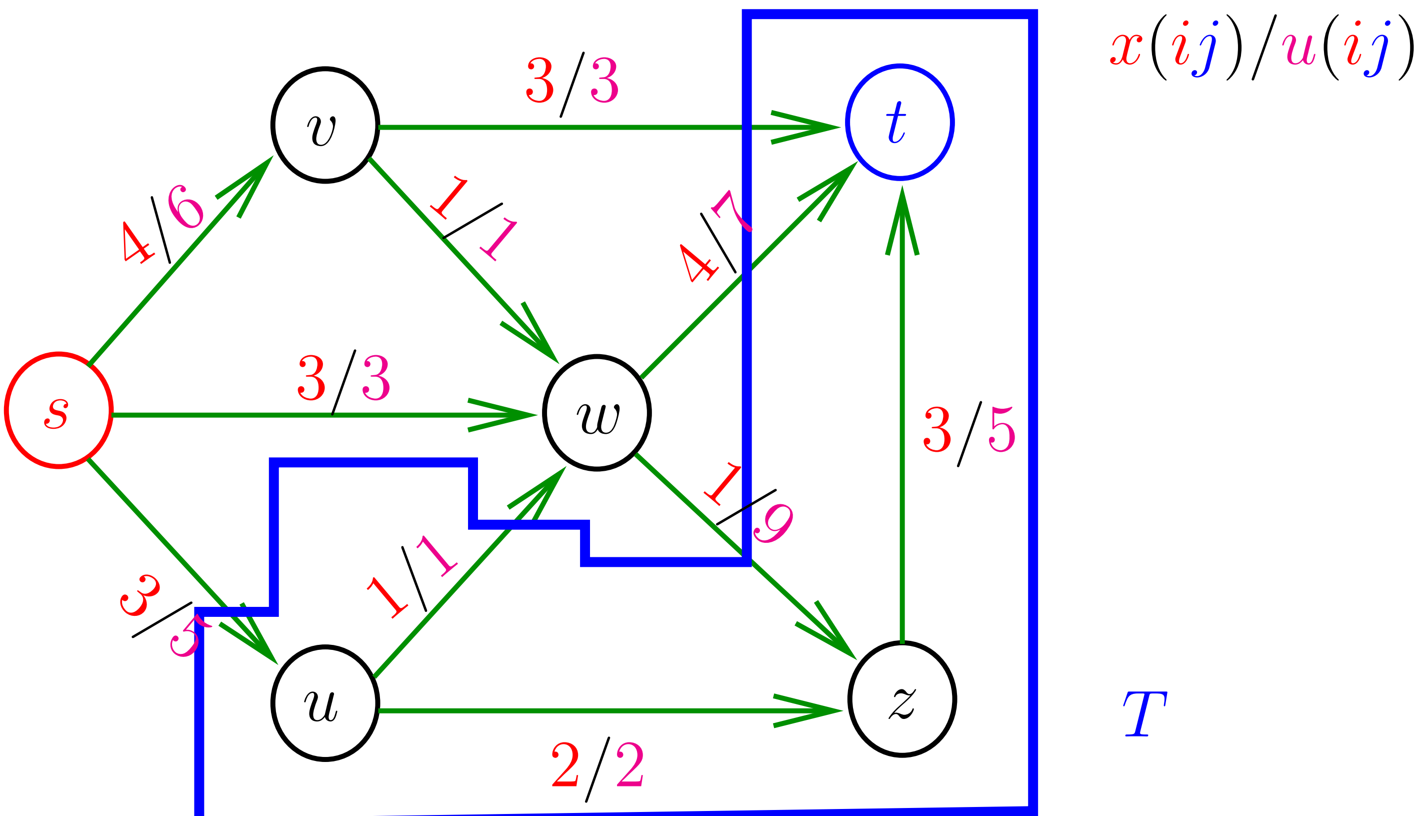


Lema da dualidade

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte então

$$\text{val}(x) \leq u(\overline{T}, T).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 10 \leq 24 = u(\overline{T}, T)$.

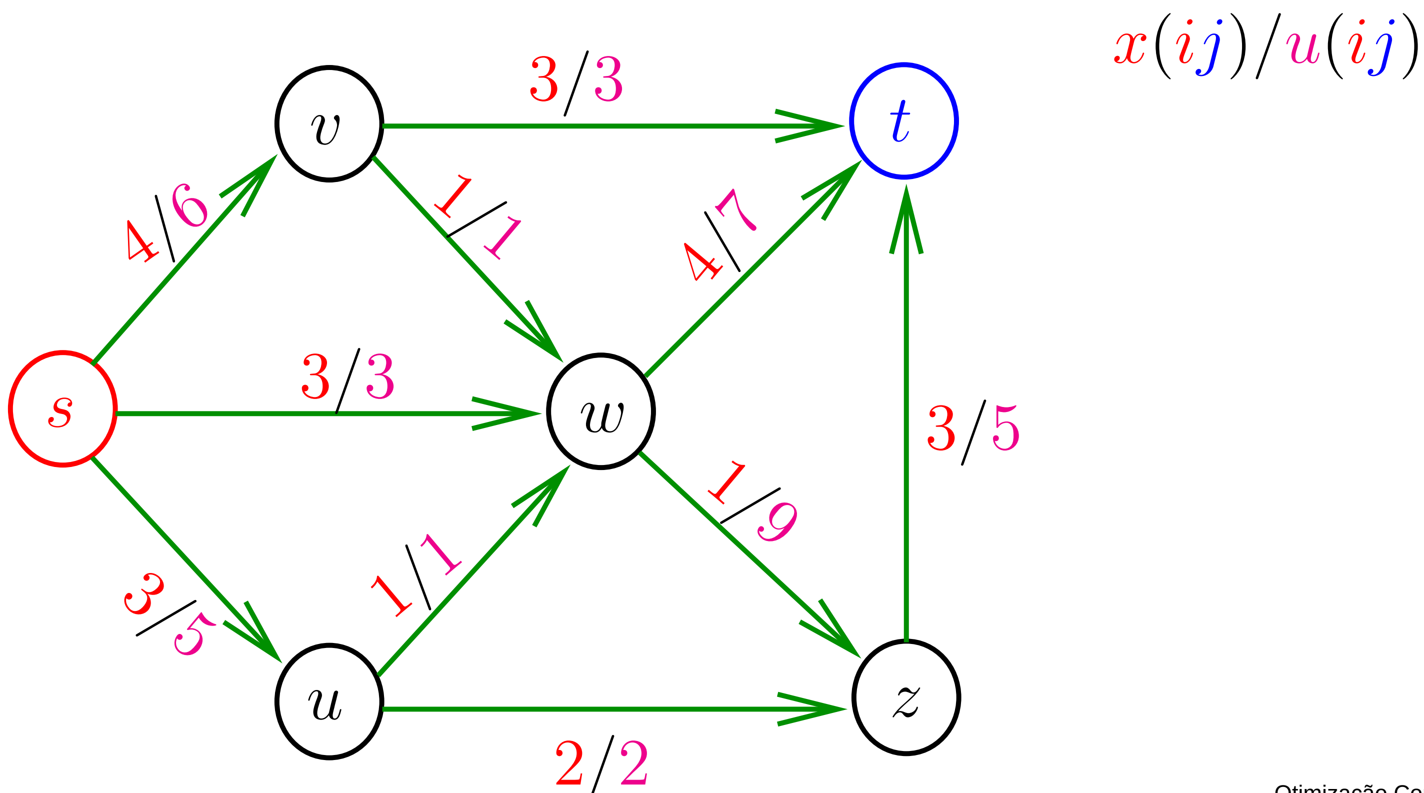


Conseqüência

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\mathsf{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.

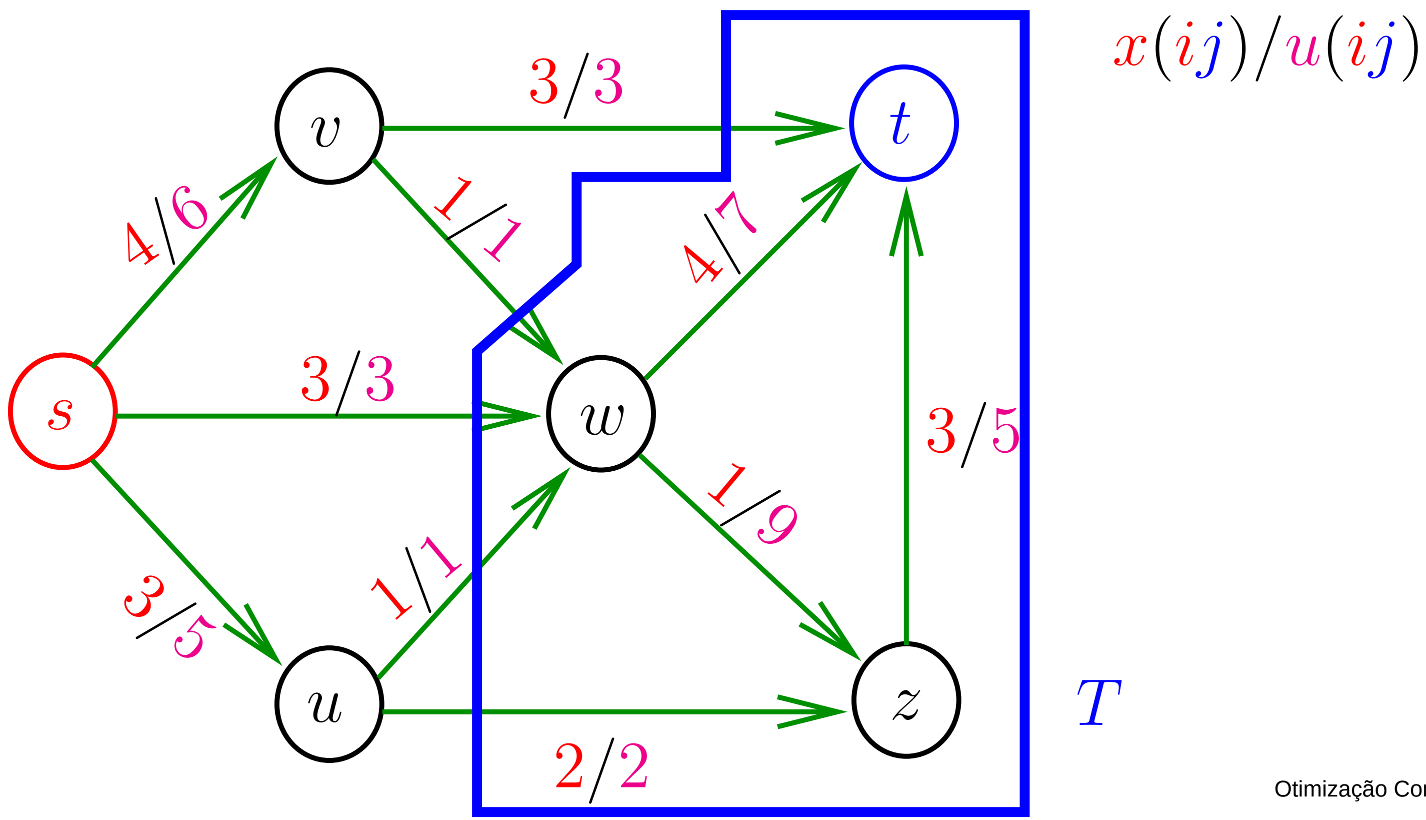


Conseqüência

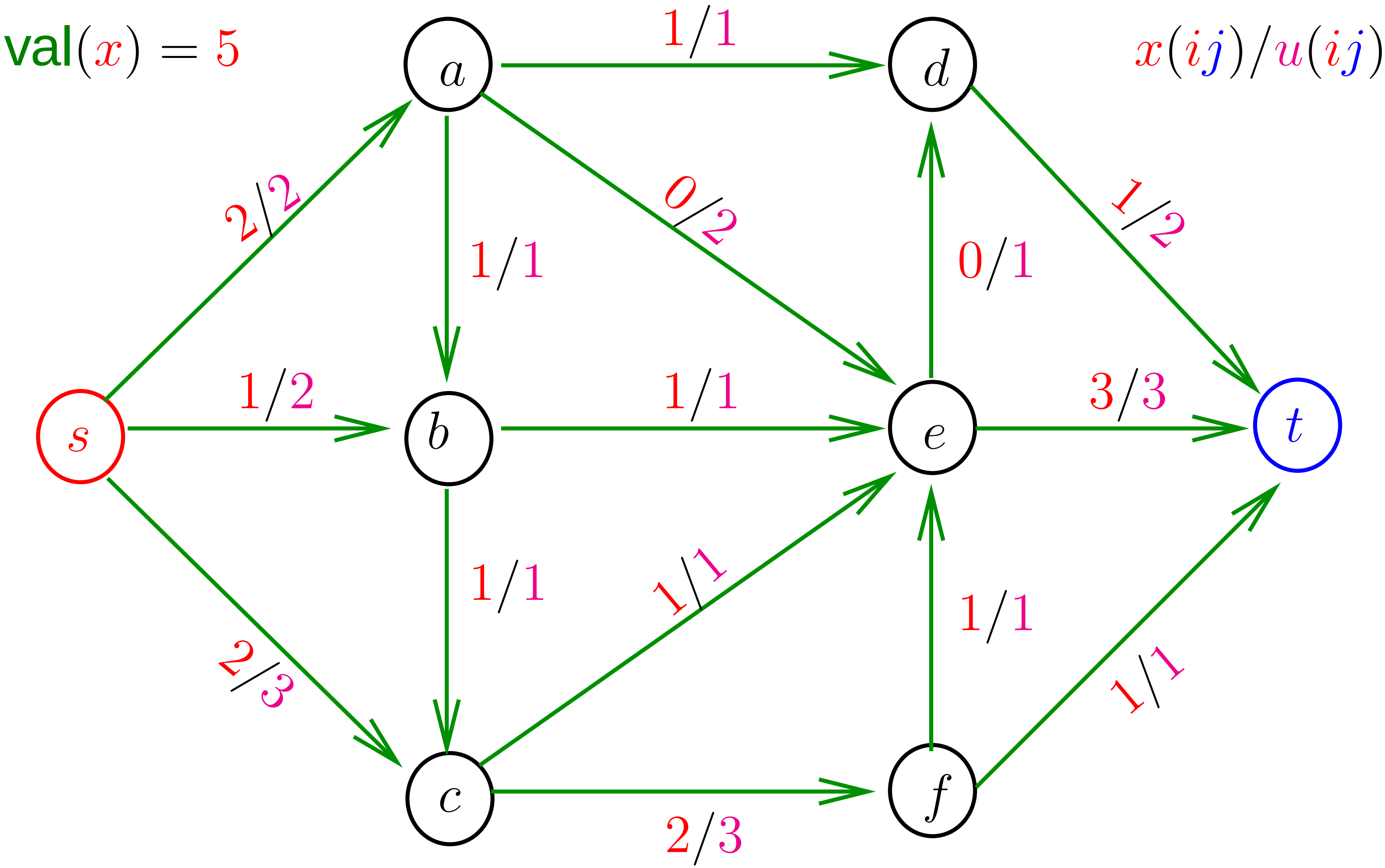
Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\mathsf{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.



x é máximo?



$\mathrm{val}(x) = 5$
$x(ij)/u(ij)$
a
b
c
d
e
f
s
t
1/1
2/2
0/2
1/2
1/1
0/1
1/2
1/1
3/3
1/1
1/1
1/1
2/3
1/1
2/3