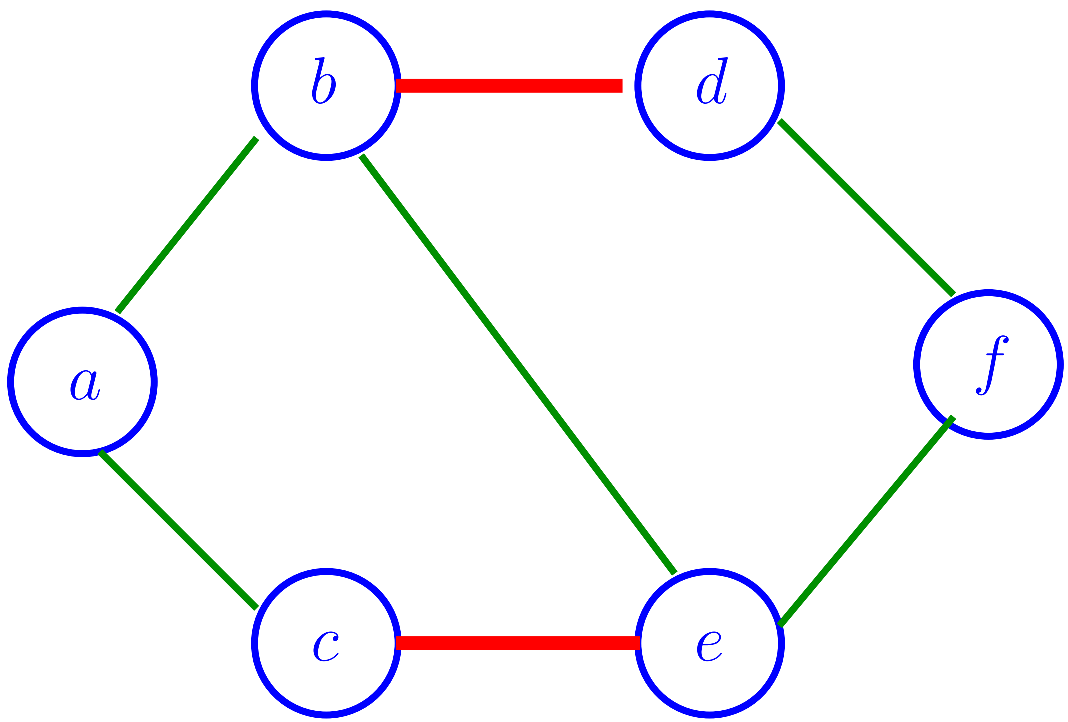
AULA 12

Emparelhamentos de peso máximo

Emparelhamentos

Um emparelhamento em um grafo (não-orientado) é um conjunto de arestas que duas-a-duas não tem ponta em comum.

Exemplo: $\{b, d\}$ e $\{c, e\}$ formam um emparelhamento

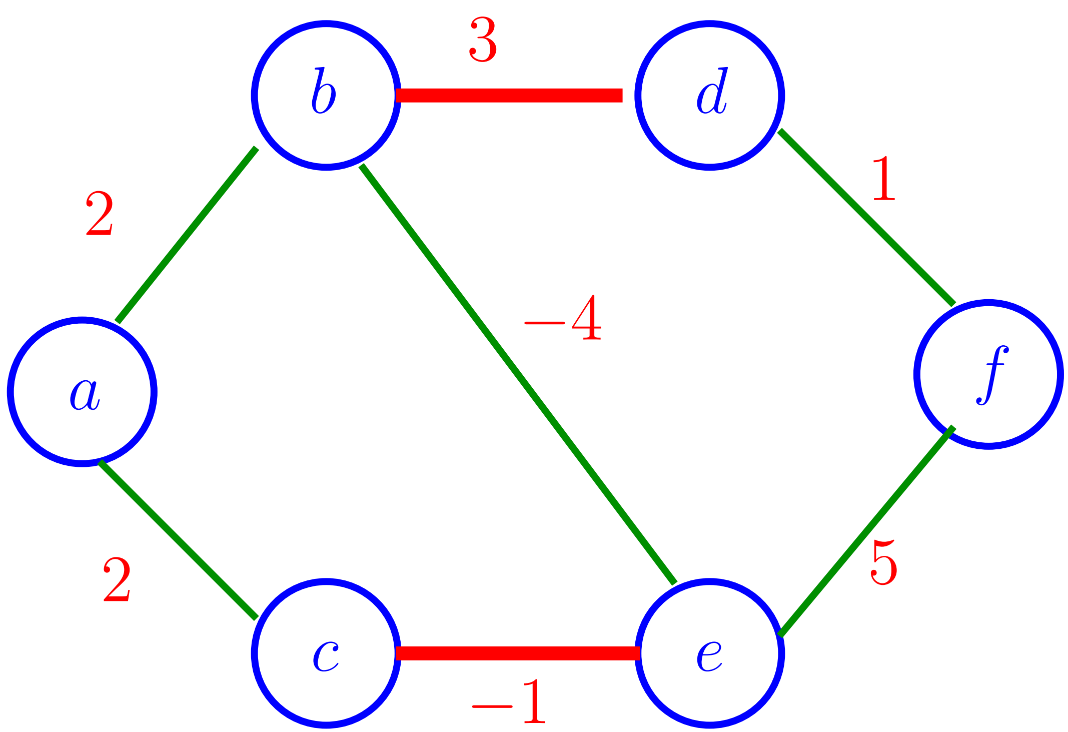


Peso de arestas

Seja $G = (N, E)$ um grafo (não-orientado) e $w : E \to \mathbb{Z}$ uma função-peso. O peso de um conjunto de arestas M é

$$w(M) := \sum_{e \in M} w(e)\,.$$

Exemplo: Peso das arestas vermelhas é 2



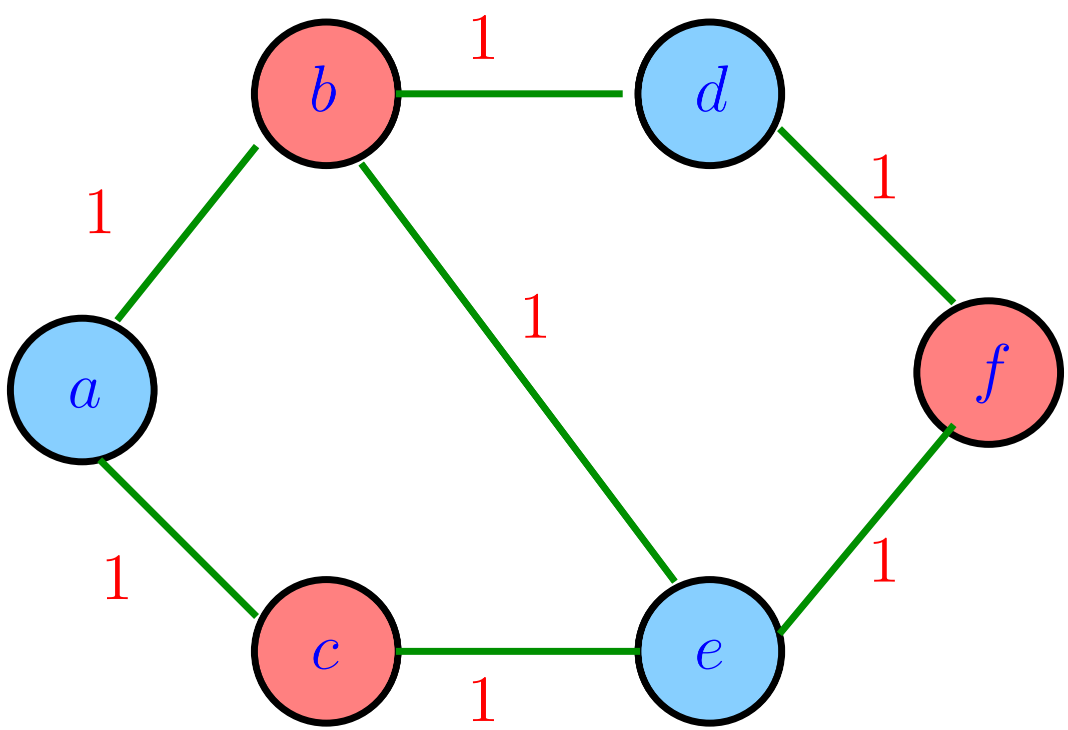
Problema

Problema do emparelhamento de peso máximo: Dado uma grafo bipartido $G = (N, E)$ e uma função-peso $w : E \to \mathbb{Z}$, encontrar um emparelhamento de peso máximo.

Problema

Problema do emparelhamento de peso máximo: Dado uma grafo bipartido $G = (N, E)$ e uma função-peso $w : E \to \mathbb{Z}$, encontrar um emparelhamento de peso máximo.

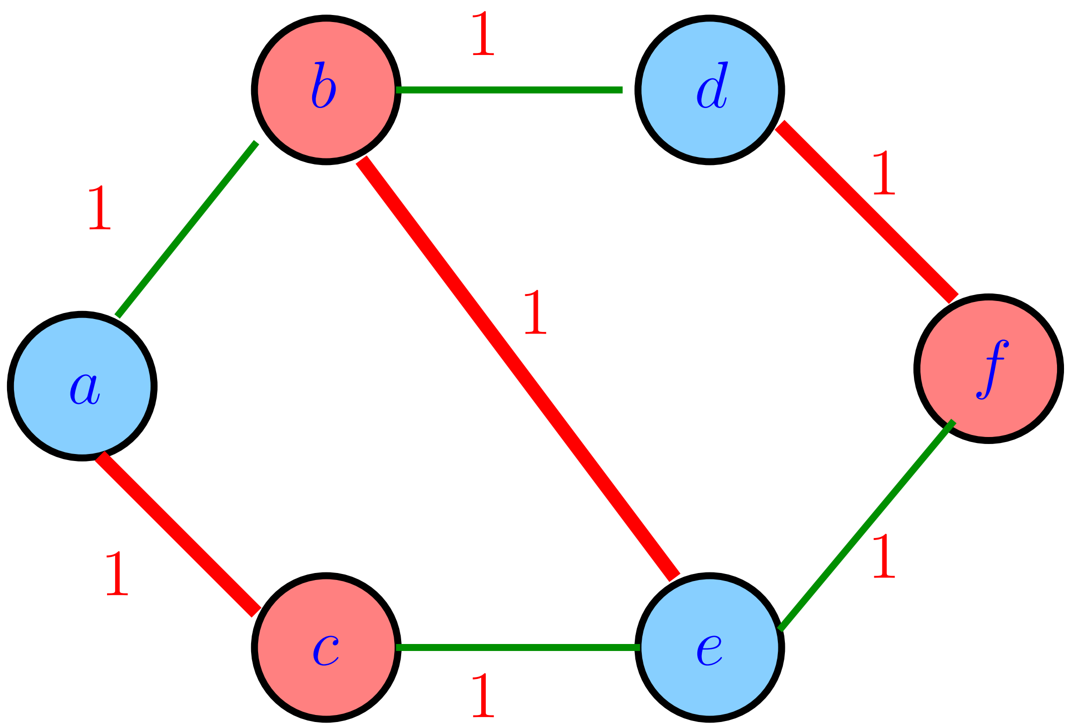
Entra:



Problema

Problema do emparelhamento de peso máximo: Dado uma grafo bipartido $G = (N, E)$ e uma função-peso $w : E \to \mathbb{Z}$, encontrar um emparelhamento de peso máximo.

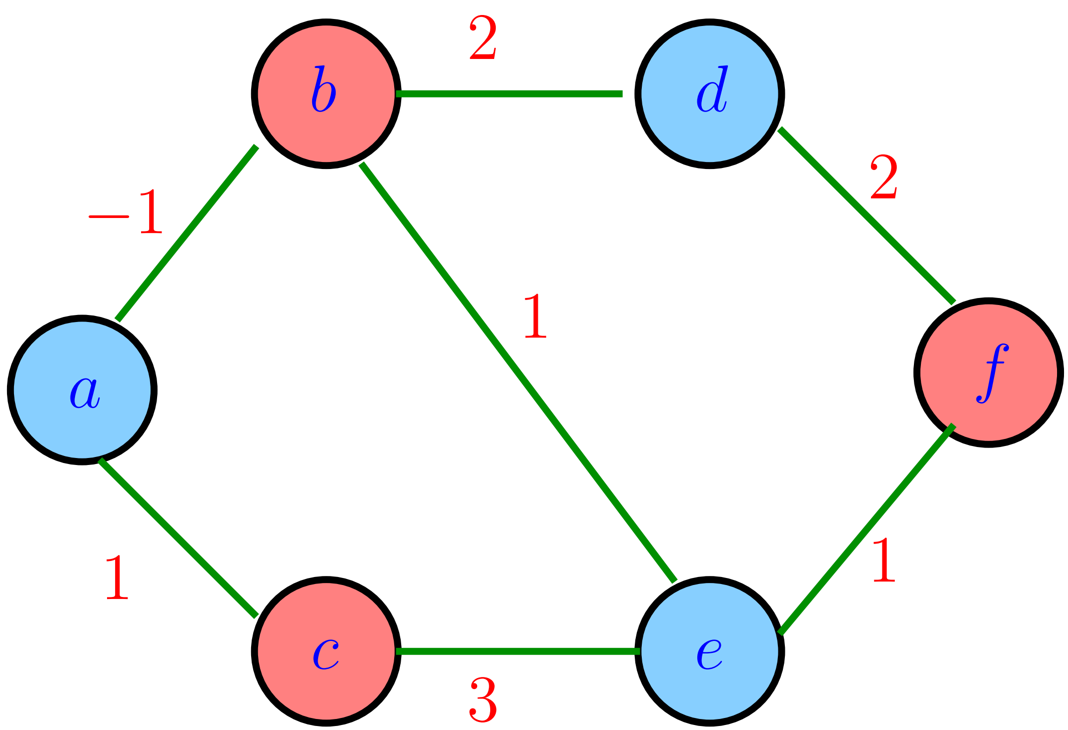
Sai:



Problema

Problema do emparelhamento de peso máximo: Dado uma grafo bipartido $G = (N, E)$ e uma função-peso $w : E \to \mathbb{Z}$, encontrar um emparelhamento de peso máximo.

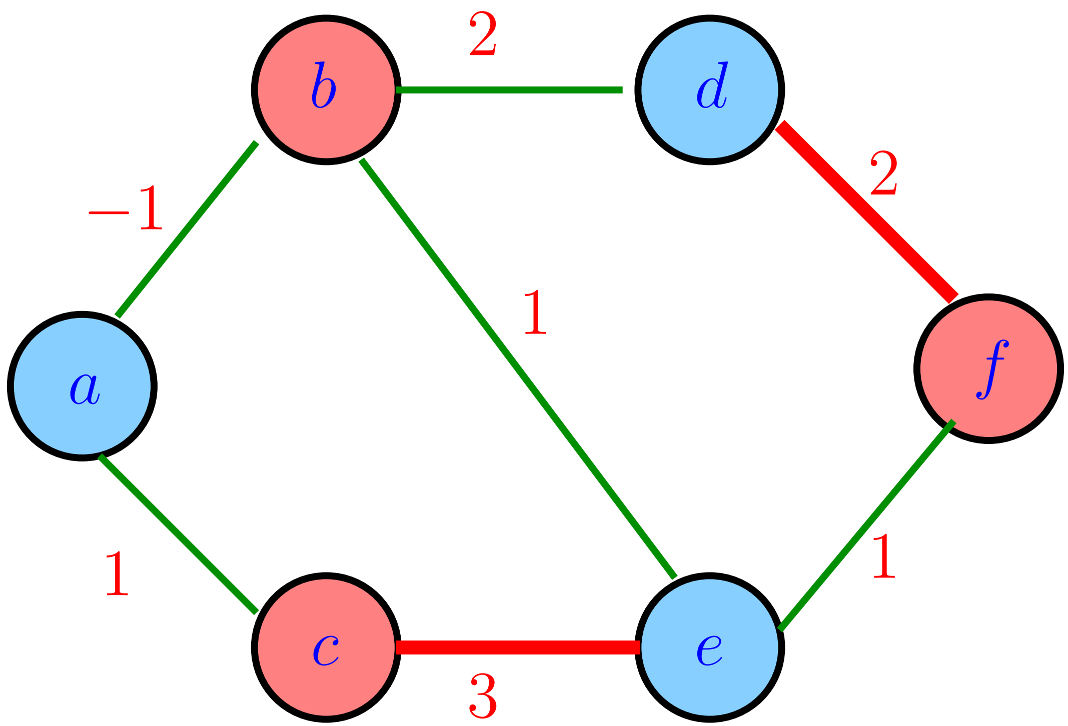
Entra:



Problema

Problema do emparelhamento de peso máximo: Dado uma grafo bipartido $G = (N, E)$ e uma função-peso $w : E \to \mathbb{Z}$, encontrar um emparelhamento de peso máximo.

Sai:



Caminhos aumentadores

Seja M um emparelhamento em um grafo G.
Um caminho $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_t \rangle$ é M-aumentador se

- t é ímpar e $v_0, v_1, \ldots, v_t$ são distintos;
- $v_1 v_2, v_3 v_4, \ldots, v_{t-2} v_{t-1}$ então em M;
- v_0 e v_1 não são pontas de arestas em M.

Exemplo: $\langle a, b, c, d, e, f \rangle$ é um caminho M-aumentador

Se P é um caminho M-aumentador, então $M' = M \oplus P$ é um emparelhamento tal que $|M'| = |M| + 1$

Método húngaro

Desenvolvido por H.W. Kuhn [1955], usando trabalho de Egerváry [1931].

Um emparelhamento M é extremo se tem peso máximo dentre os emparelhamentos com $|M|$ arestas.

O método húngaro encontra, iterativamente,

> emparelhamentos extremos $M_0, M_1, M_2, \ldots$ tais que $|M_k| = k$

e devolve o emparelhamento de peso máximo entre $M_0, M_1, M_2, \ldots$

Iteração

Suponha que M é um emparelhamento extremo.

Defina uma função-custo $c : E \to \mathbb{Z}$ da seguinte maneira:

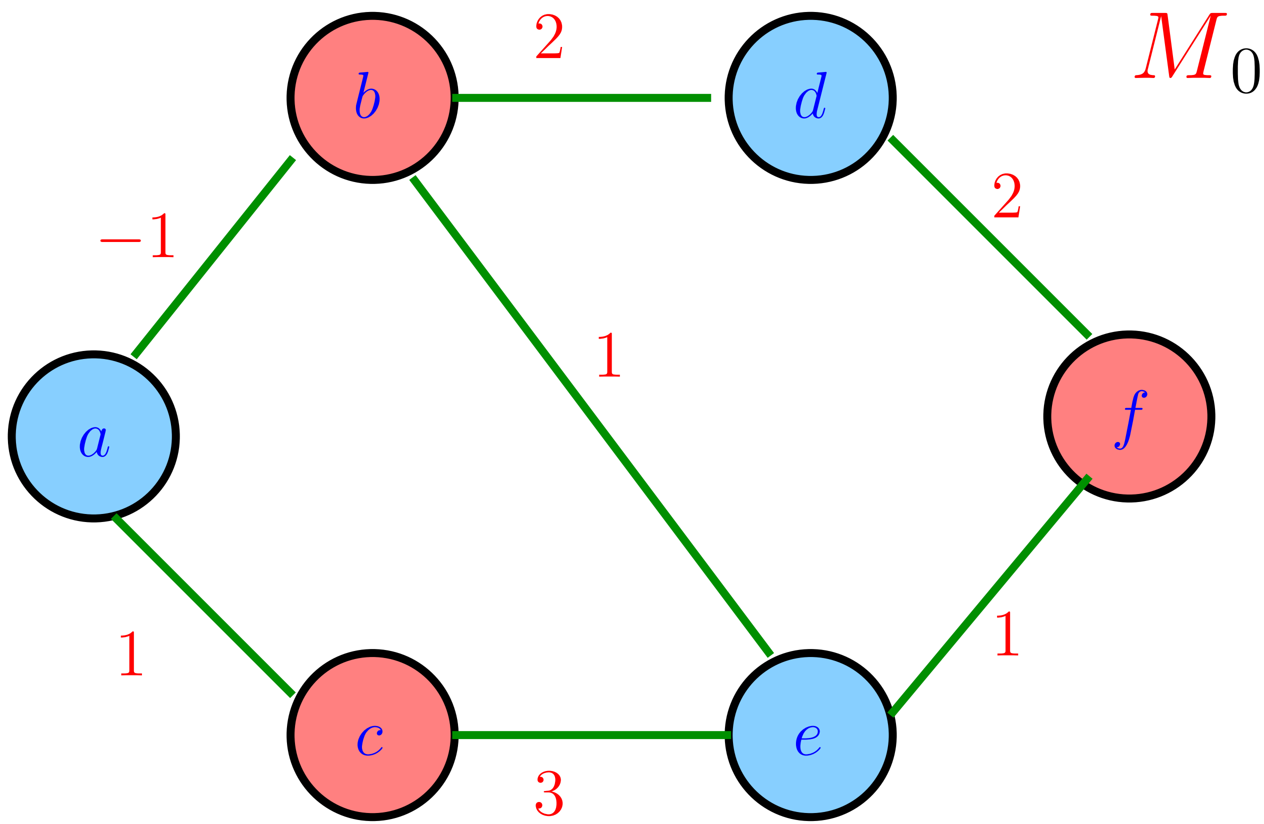
$$c(e) := w(e) \quad \text{se } e \in M$$

$$c(e) := -w(e) \quad \text{se } e \notin M$$

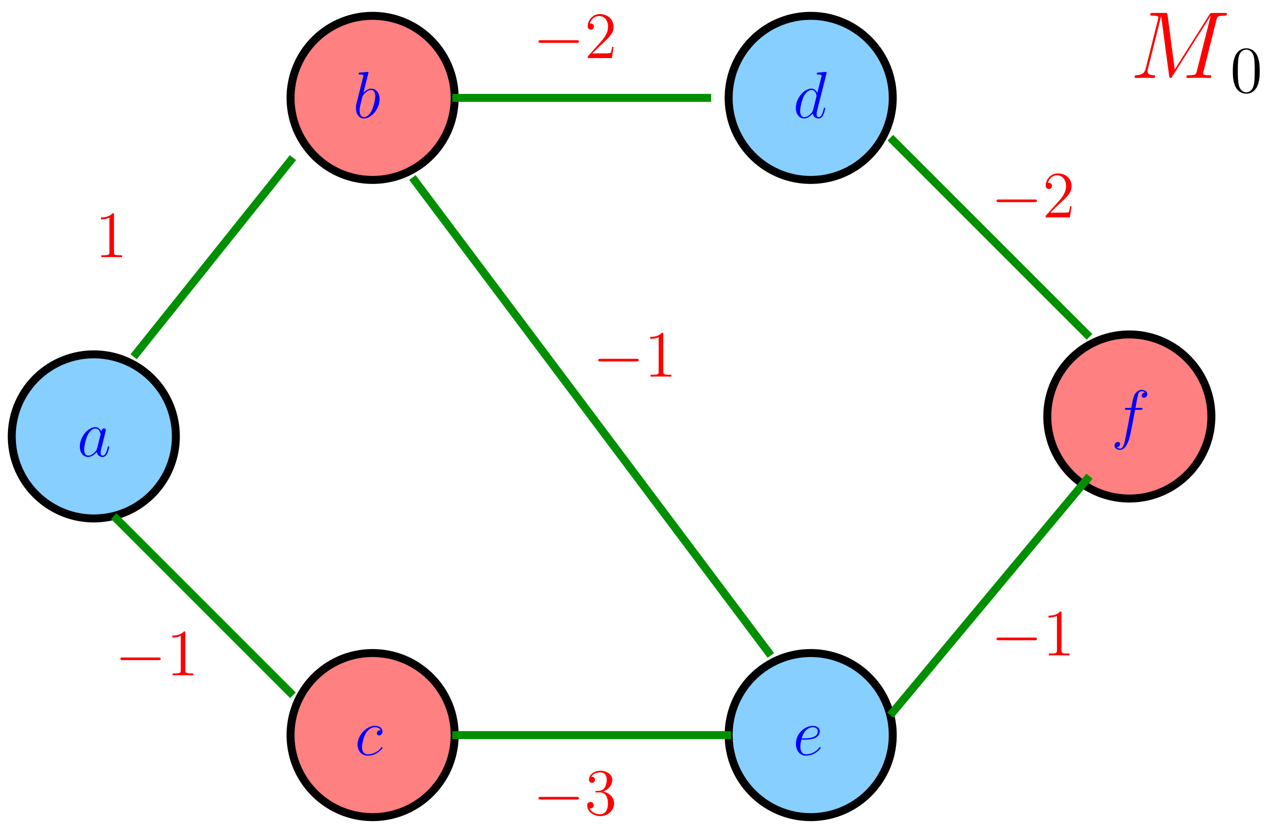
Vale que

> Se P é um caminho M-aumentador de custo mínimo, então $M' := M \oplus P$ é um emparelhamento extremo.

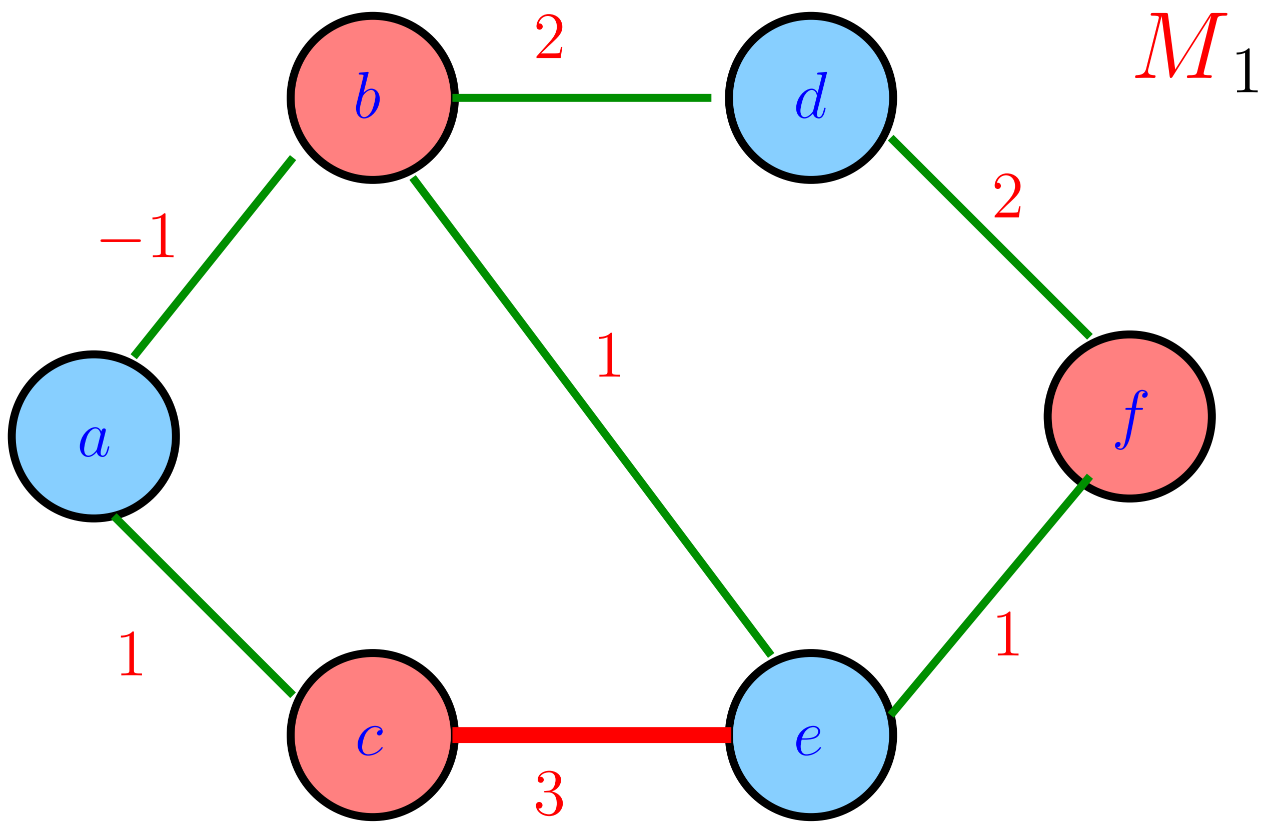
Exemplo



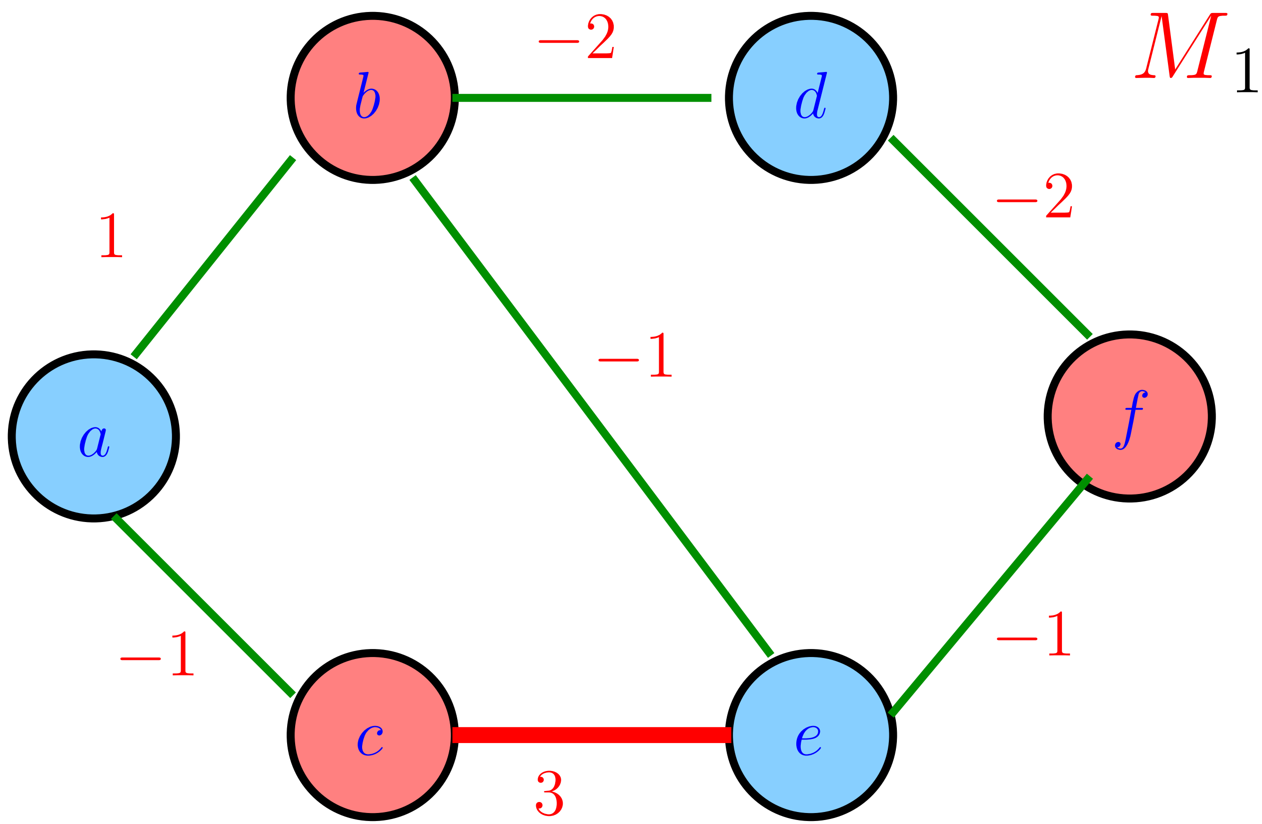
Exemplo



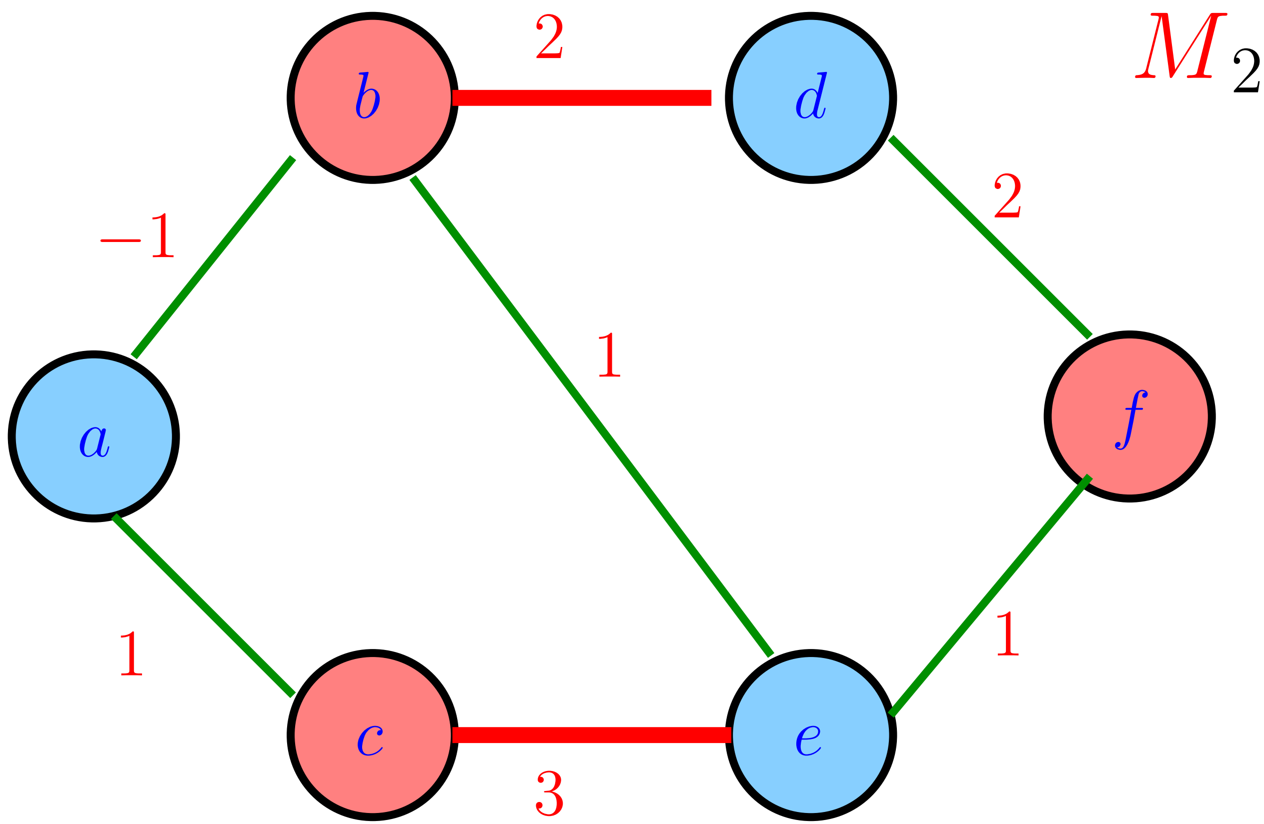
Exemplo



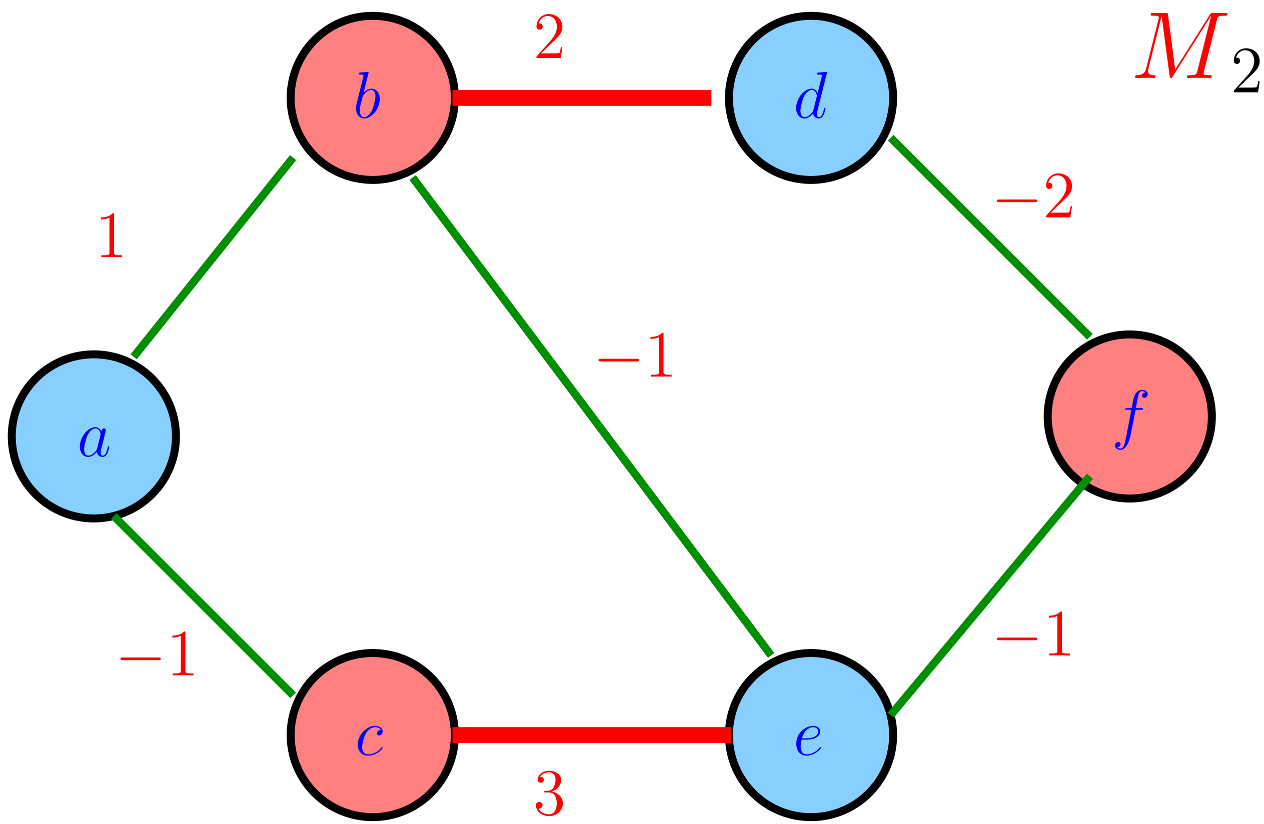
Exemplo



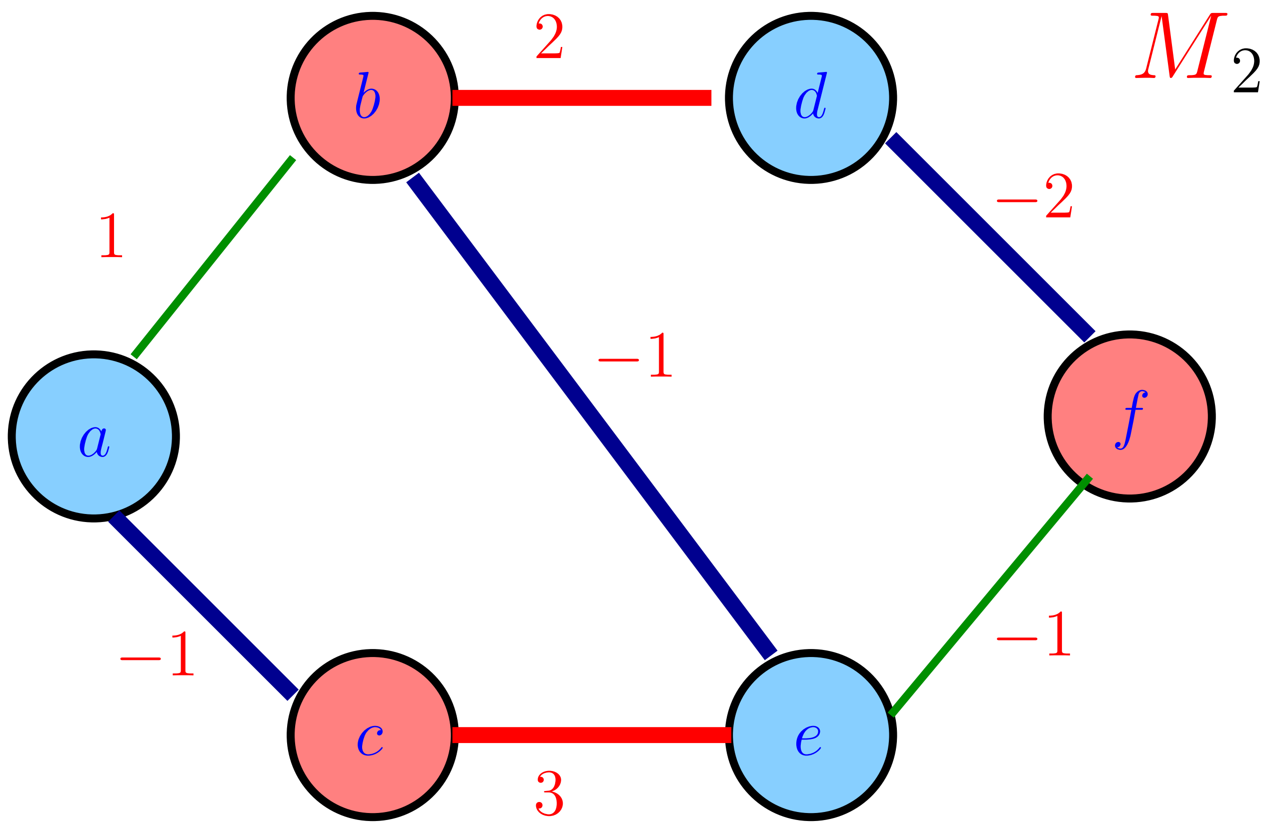
Exemplo



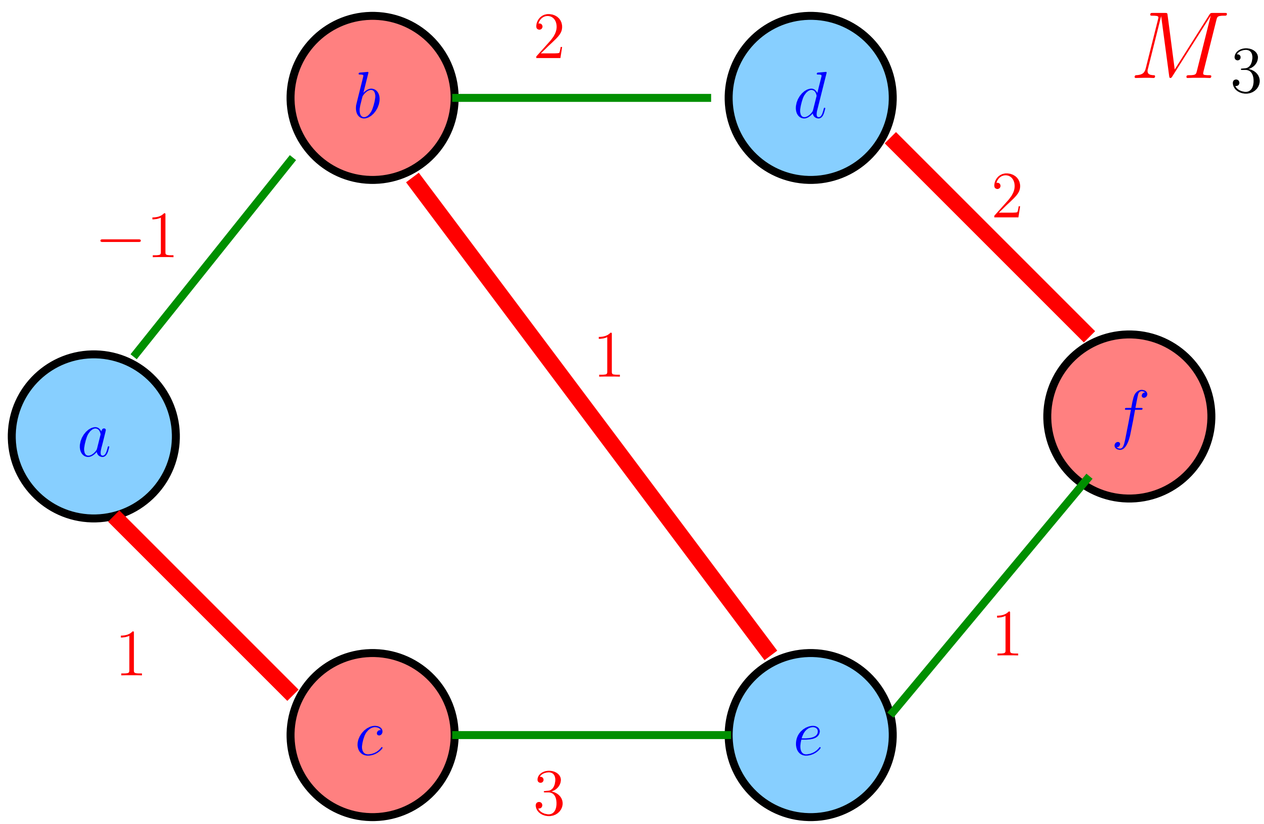
Exemplo



Exemplo



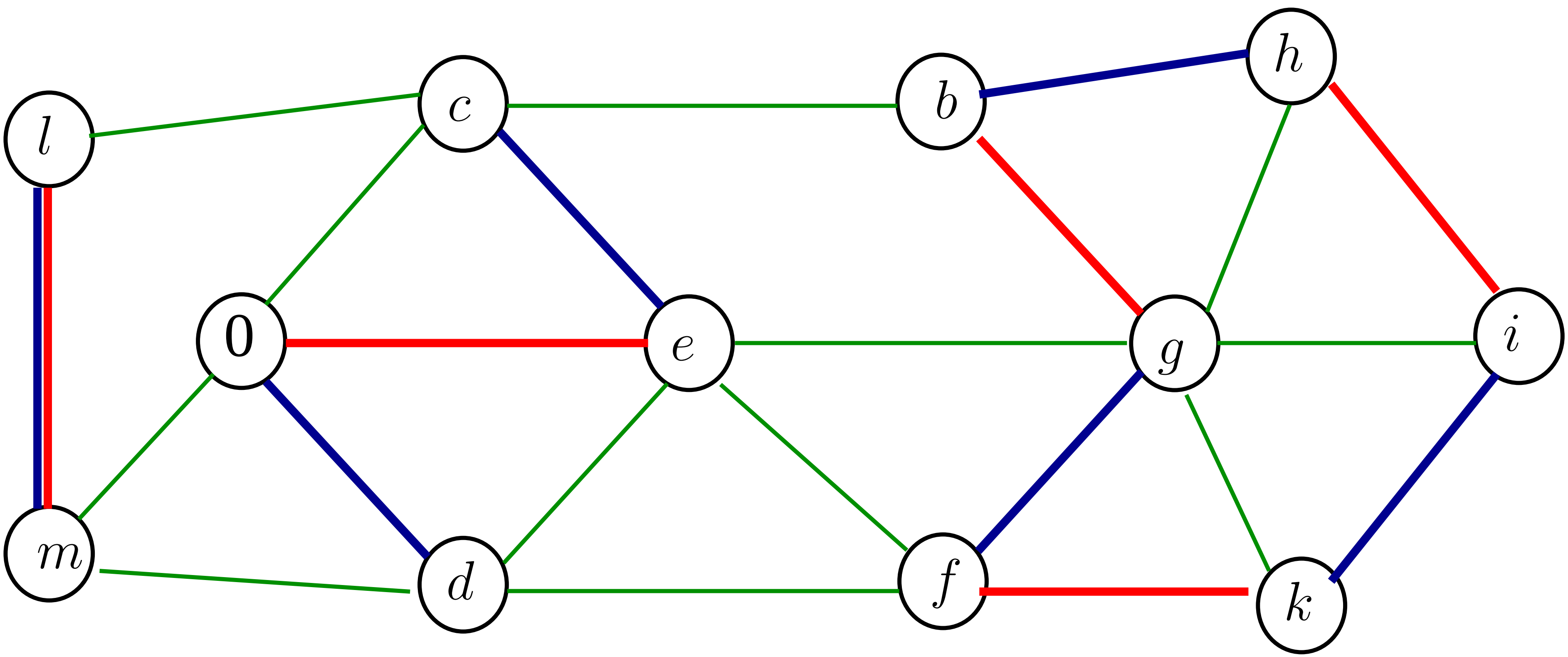
Exemplo



Demonstração

Considere qualquer emparelhamento N com $|M| + 1$ arestas.

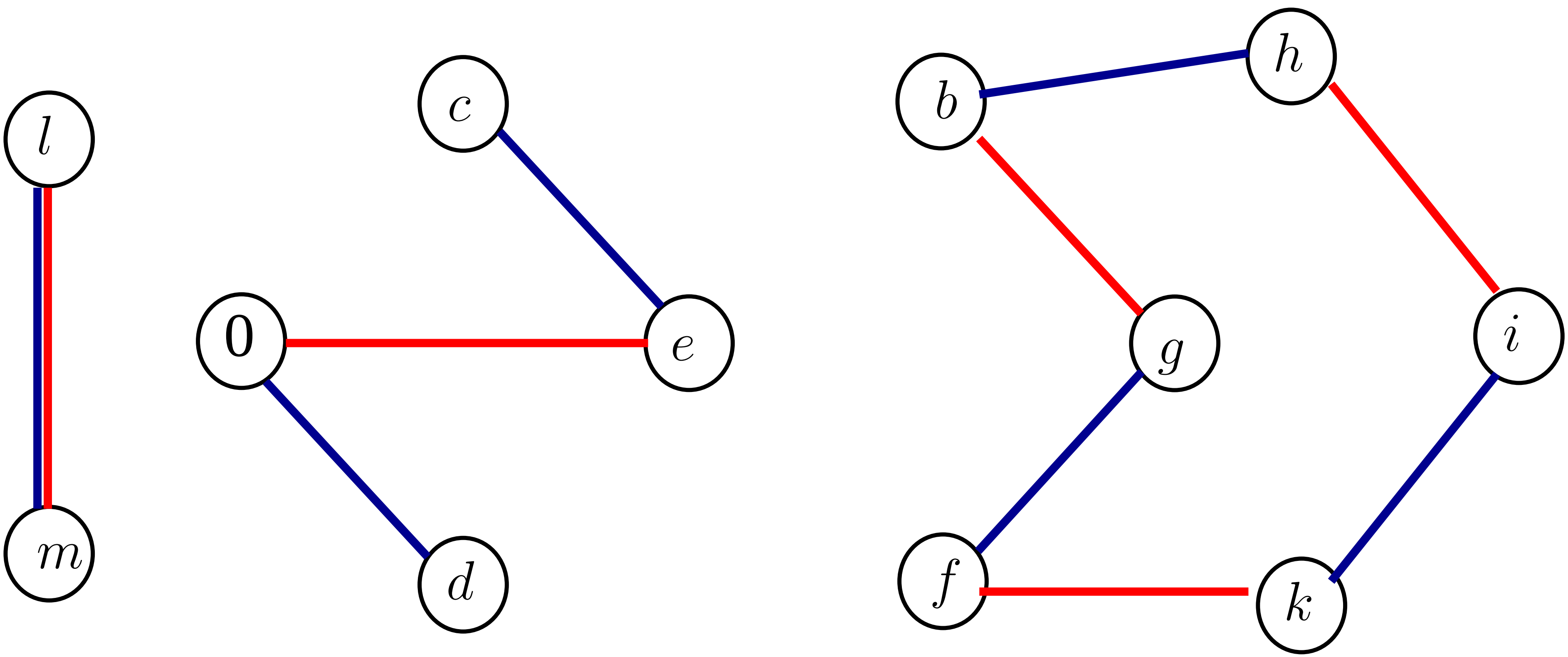
Como $|N| > |M|$, então $M \cup N$ contém um componente Q que é um caminho M-aumentador.



Demonstração

Considere qualquer emparelhamento N com $|M| + 1$ arestas.

Como $|N| > |M|$, então $M \cup N$ contém um componente Q que é um caminho M-aumentador.



Demonstração

Como P é um caminho M-aumentador de custo mínimo temos que $c(Q) \geq c(P)$.

Como $N \oplus Q$ é um emparelhamento com $|M|$ arestas e M é extremo, temos que

$$w(N \oplus Q) \leq w(M).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w(N) &= w(N \oplus Q) - c(Q) \\ &\leq w(M) - c(Q) \\ &\leq w(M) - c(P) \\ &= w(M \oplus P) = w(M'). \end{aligned}$$

Caminho aumentador mínimo

Recebe uma grafo bipartido (N, E) com bipartição (U, W), uma função-custo $c : E \to \mathbb{Z}$ e um emparelhamento M e

Devolve um caminho M-aumentador P de custo mínimo, se um tal caminho existe.

Oriente cada aresta uw do grafo, com u em U e w em W da seguinte maneira:

- se uw está em M oriente a aresta de w para u,
- se uw não está em M oriente a aresta de u para w.

Seja (N, A) o grafo (orientado) resultante.

Caminho aumentador mínimo

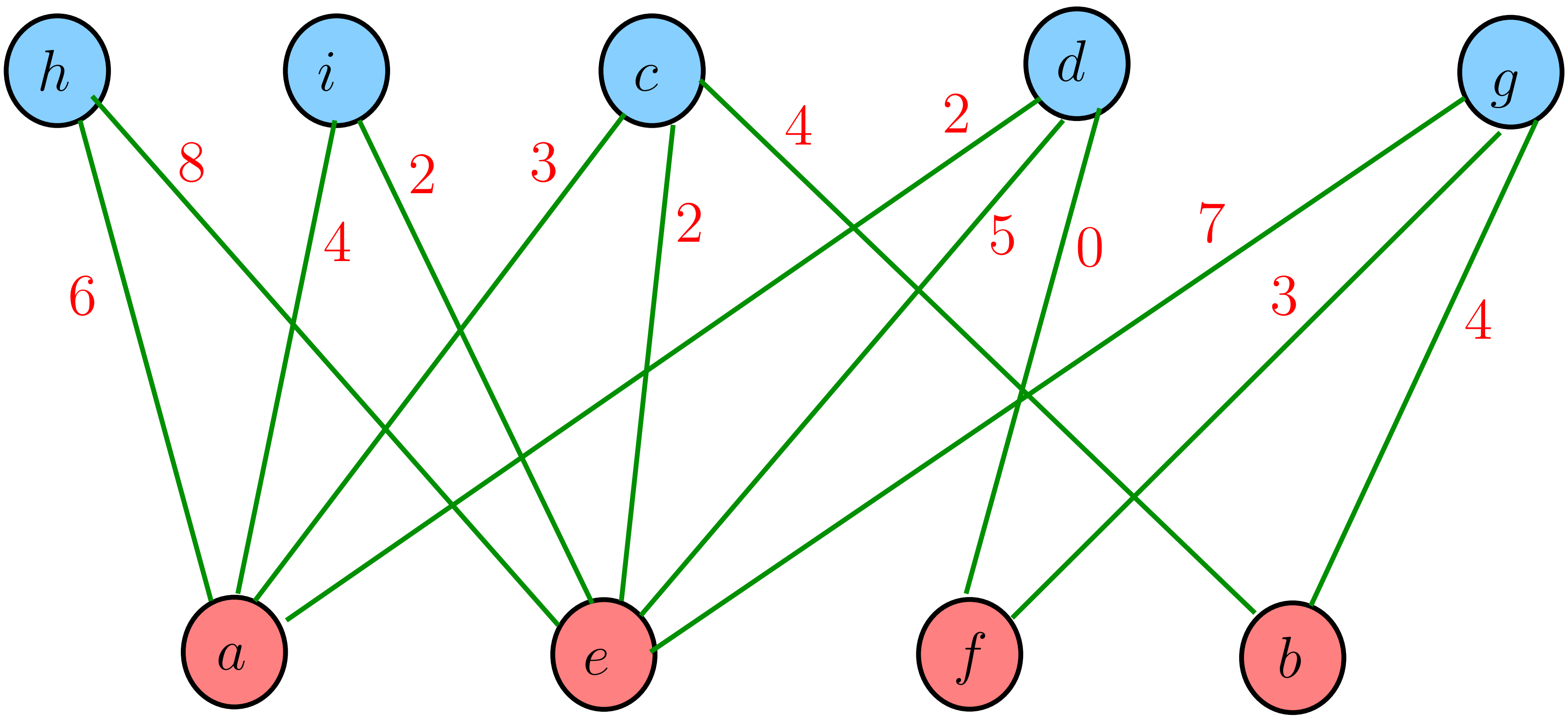
Seja U' os nós em U que não são pontas em M.

Seja W' os nós em W que não são pontas em M.

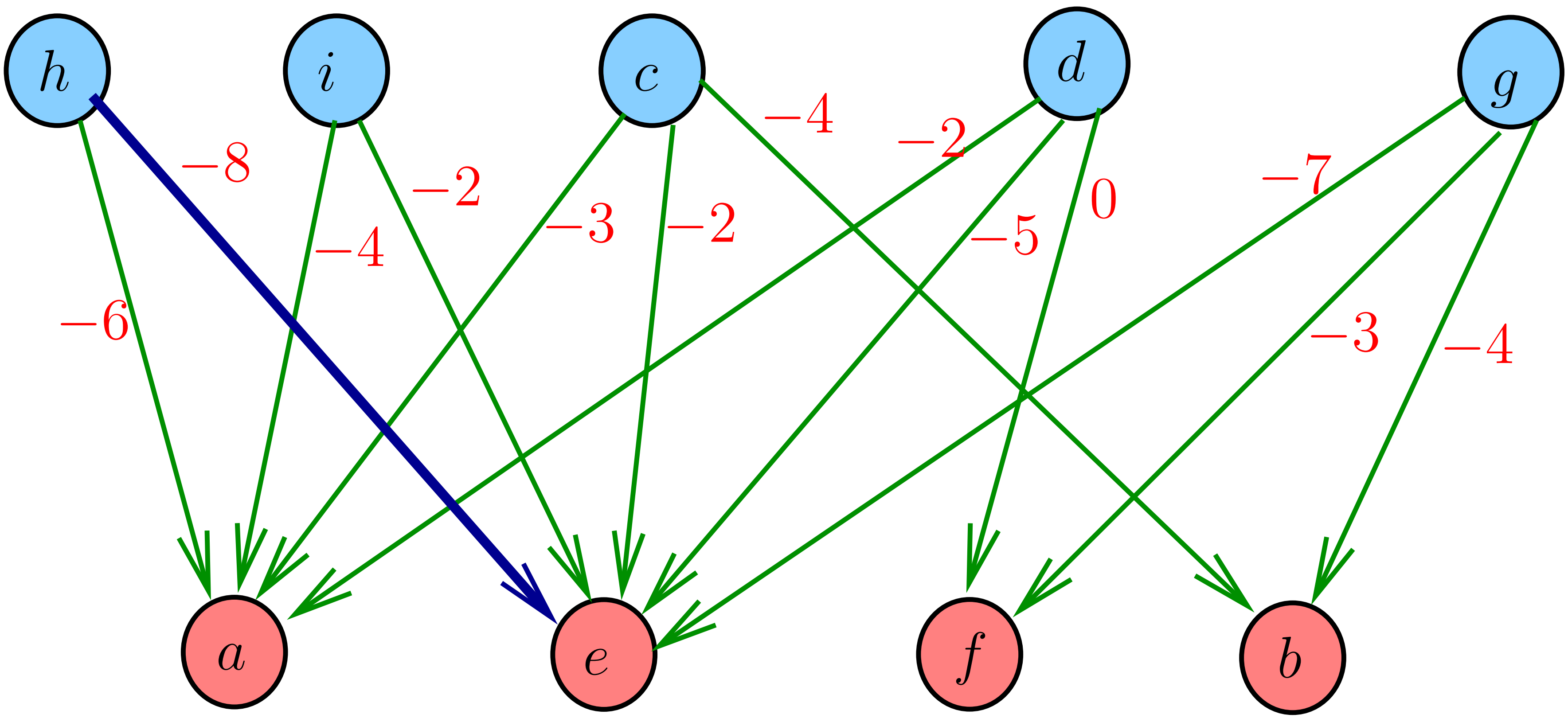
A todo caminho M-aumentador em (N, E) corresponde um caminho em (N, A) com ponta inicial em U' e ponta final em W' de mesmo custo e vice-versa.

O algoritmo devolve um caminho M-aumentador P que corresponde a um caminho de custo mínimo de U' a W' na rede (N, A, c).

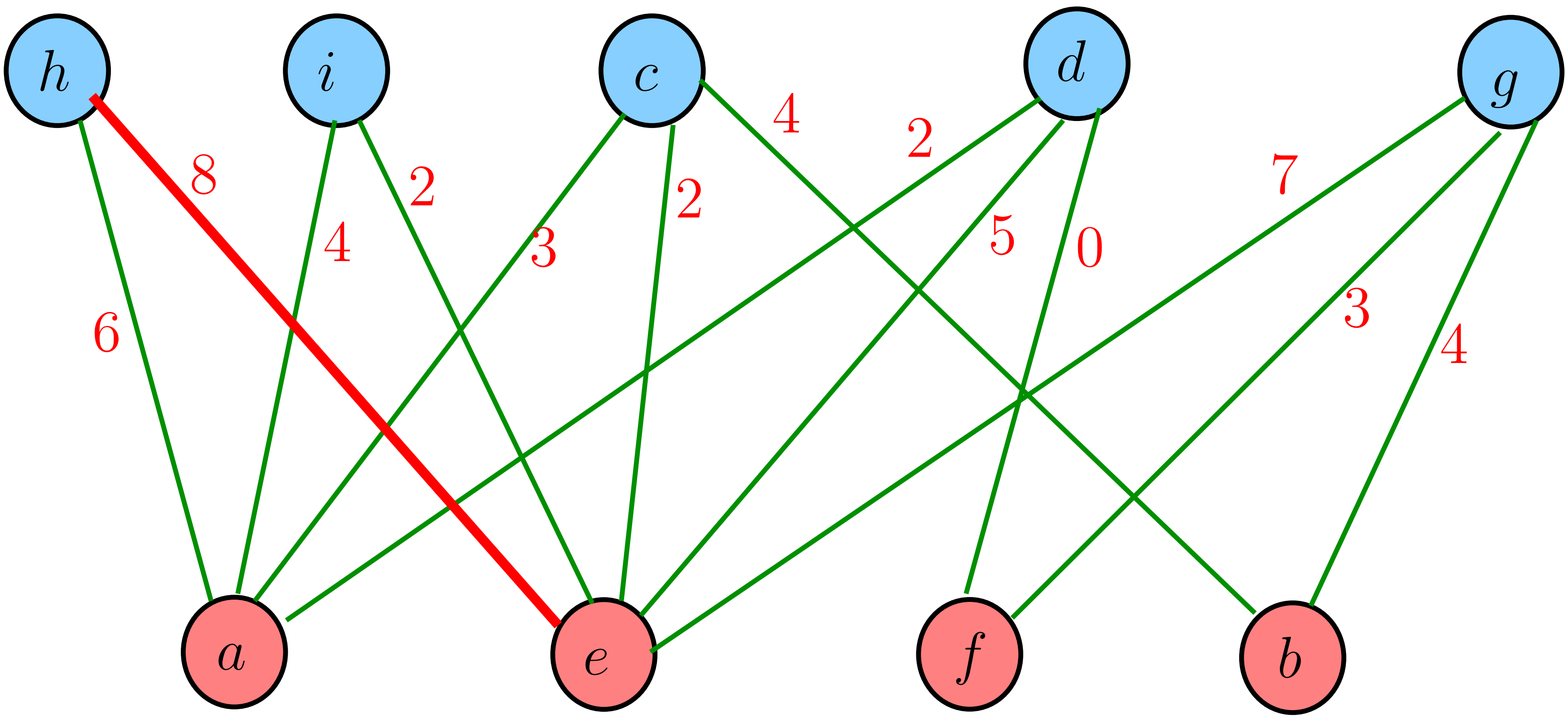
Exemplo



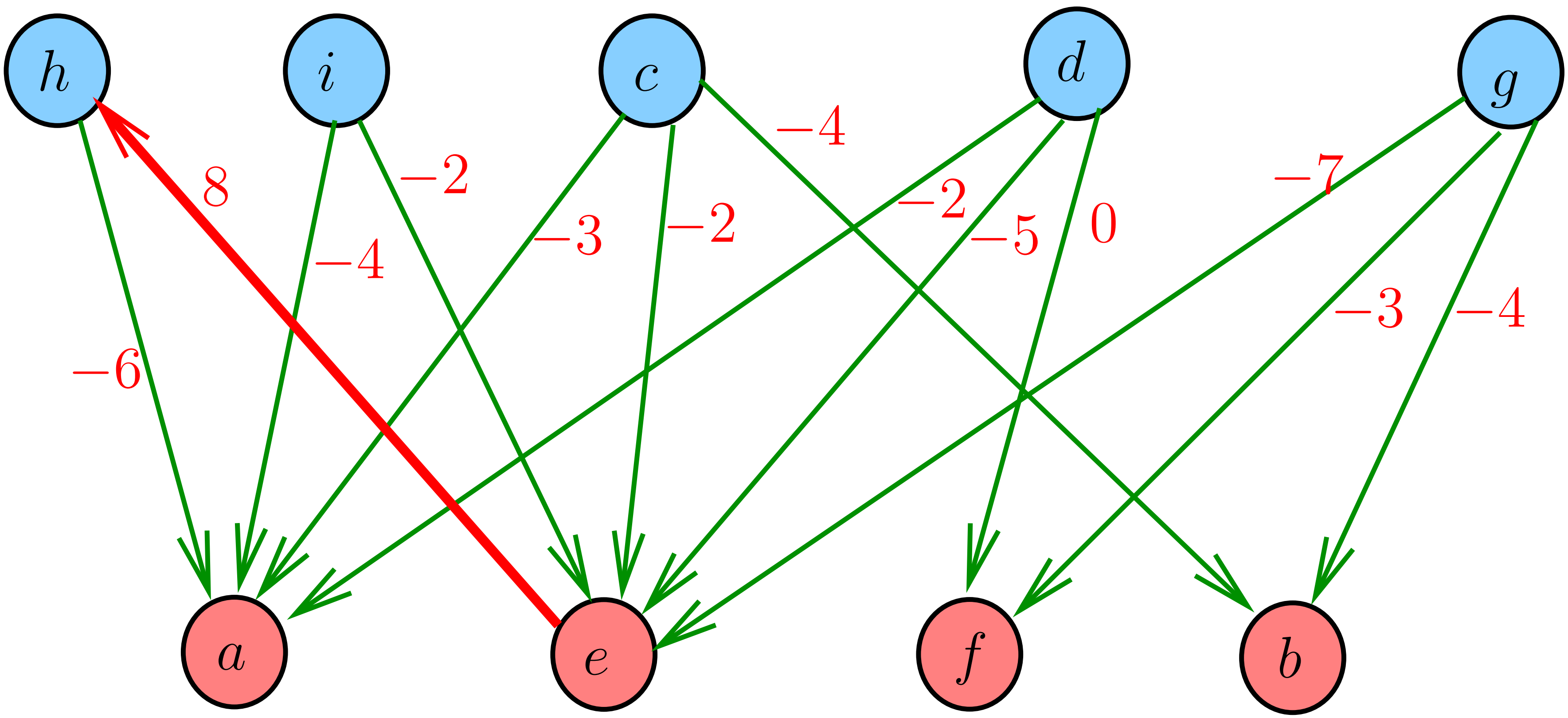
Exemplo



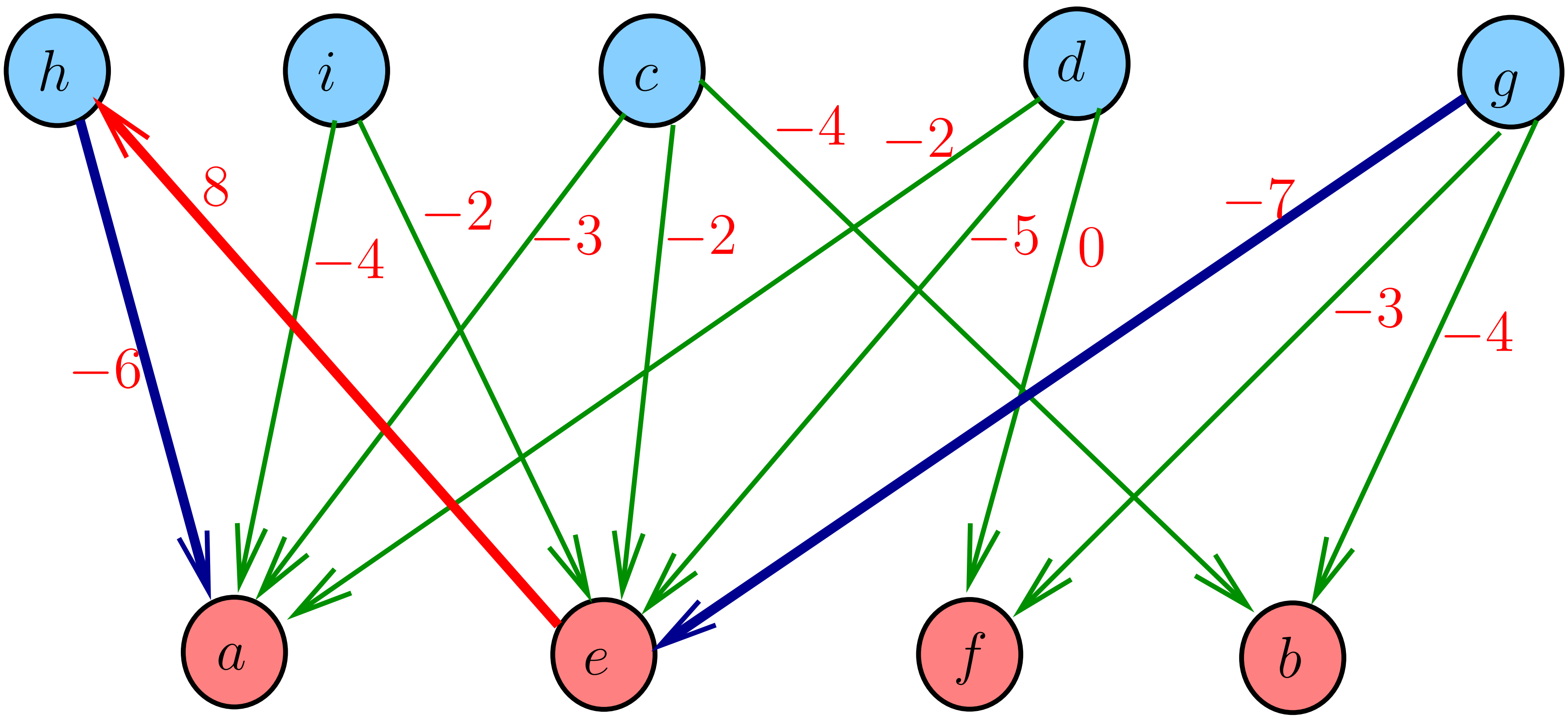
Exemplo



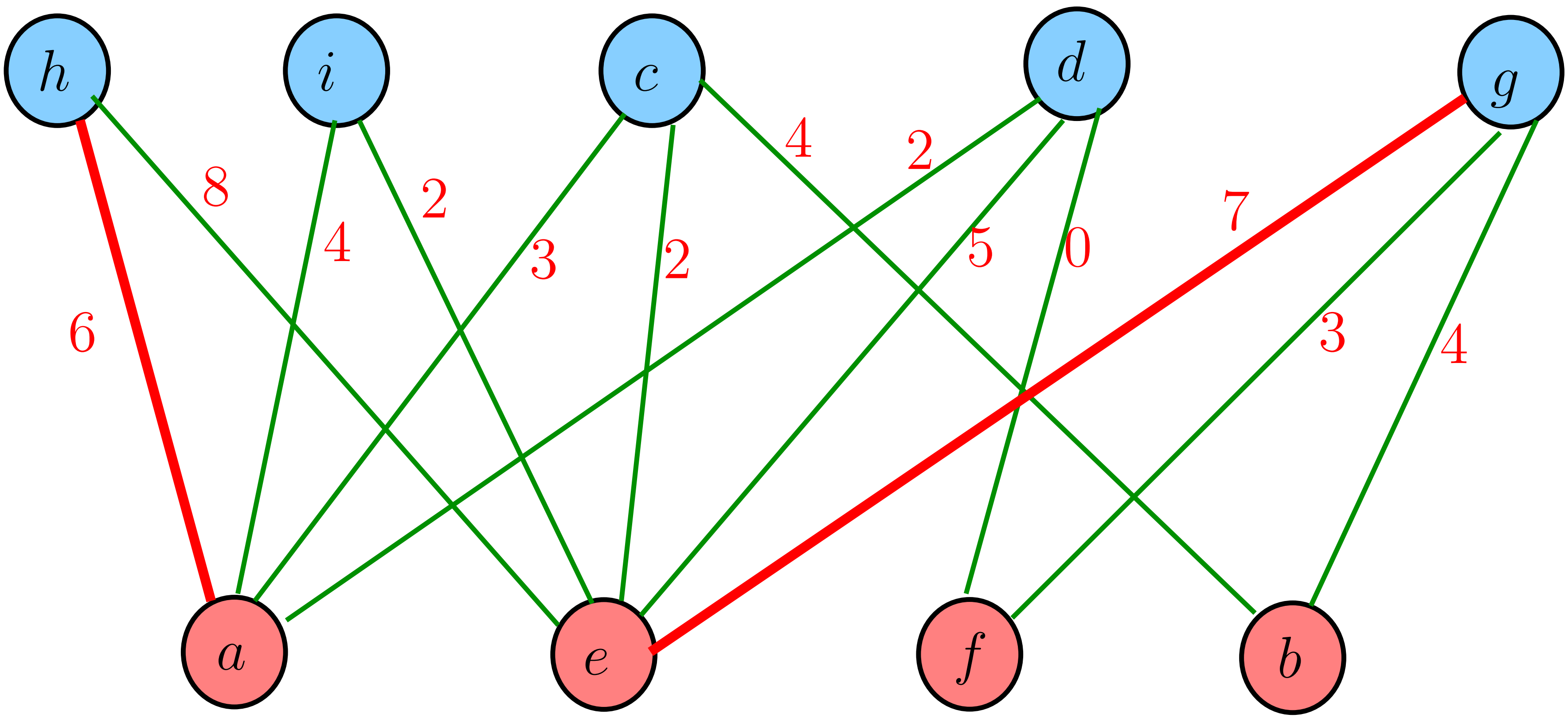
Exemplo



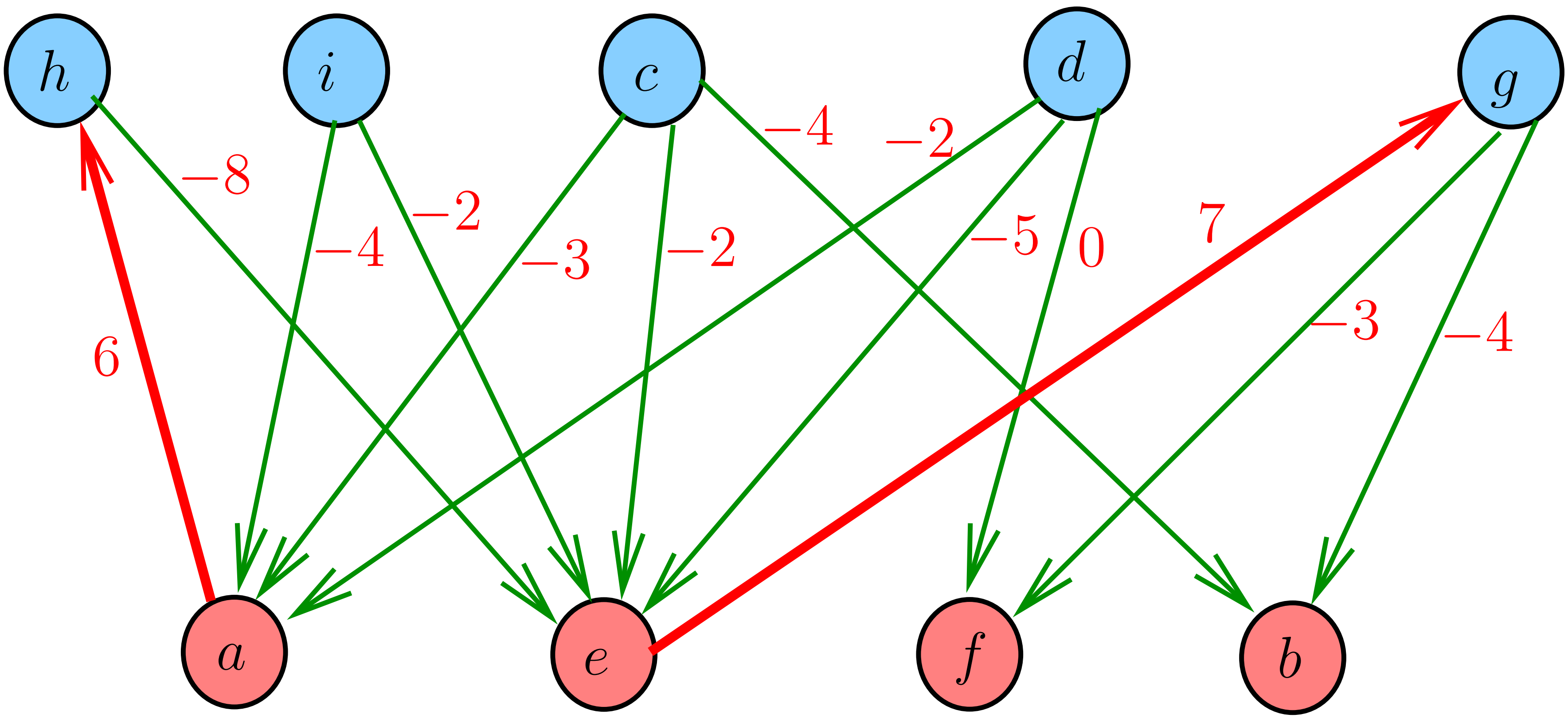
Exemplo



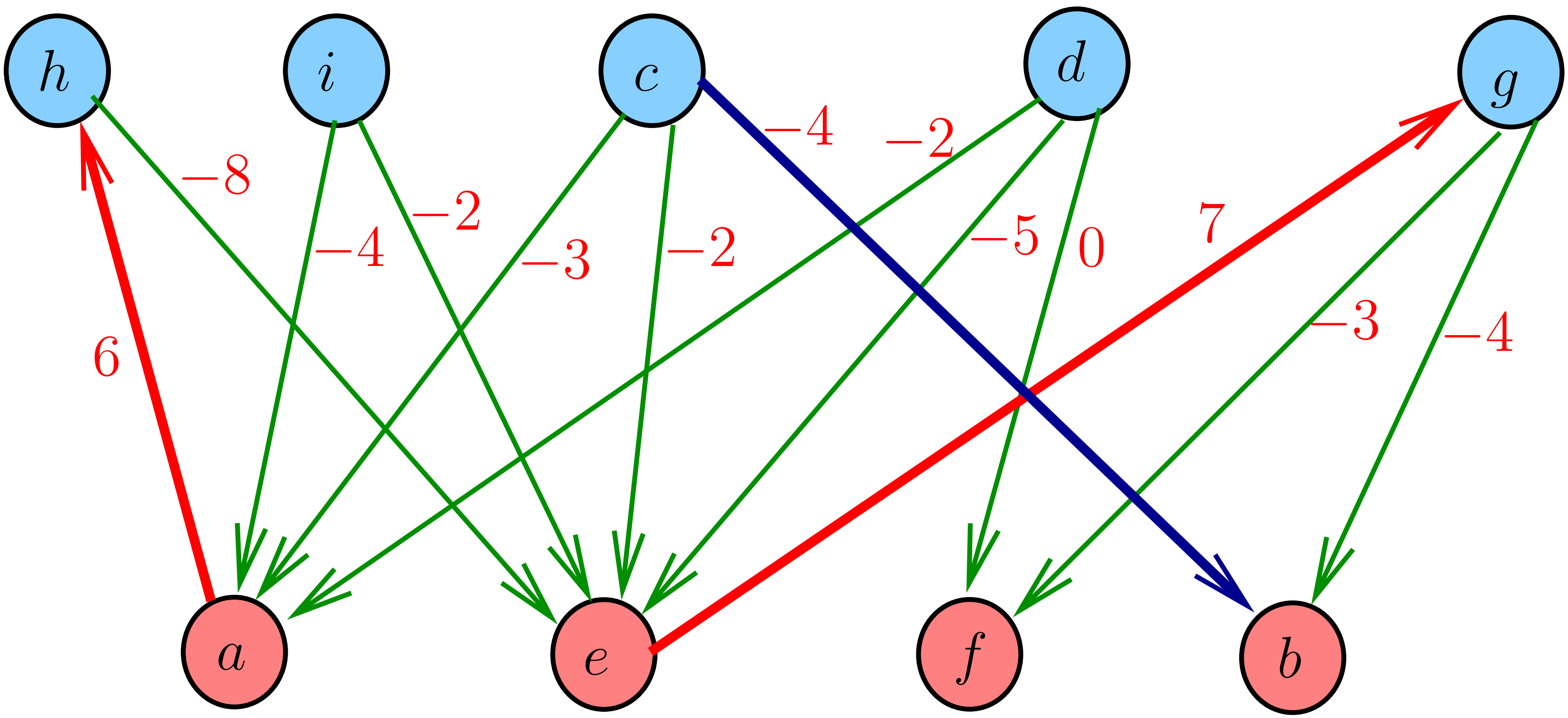
Exemplo



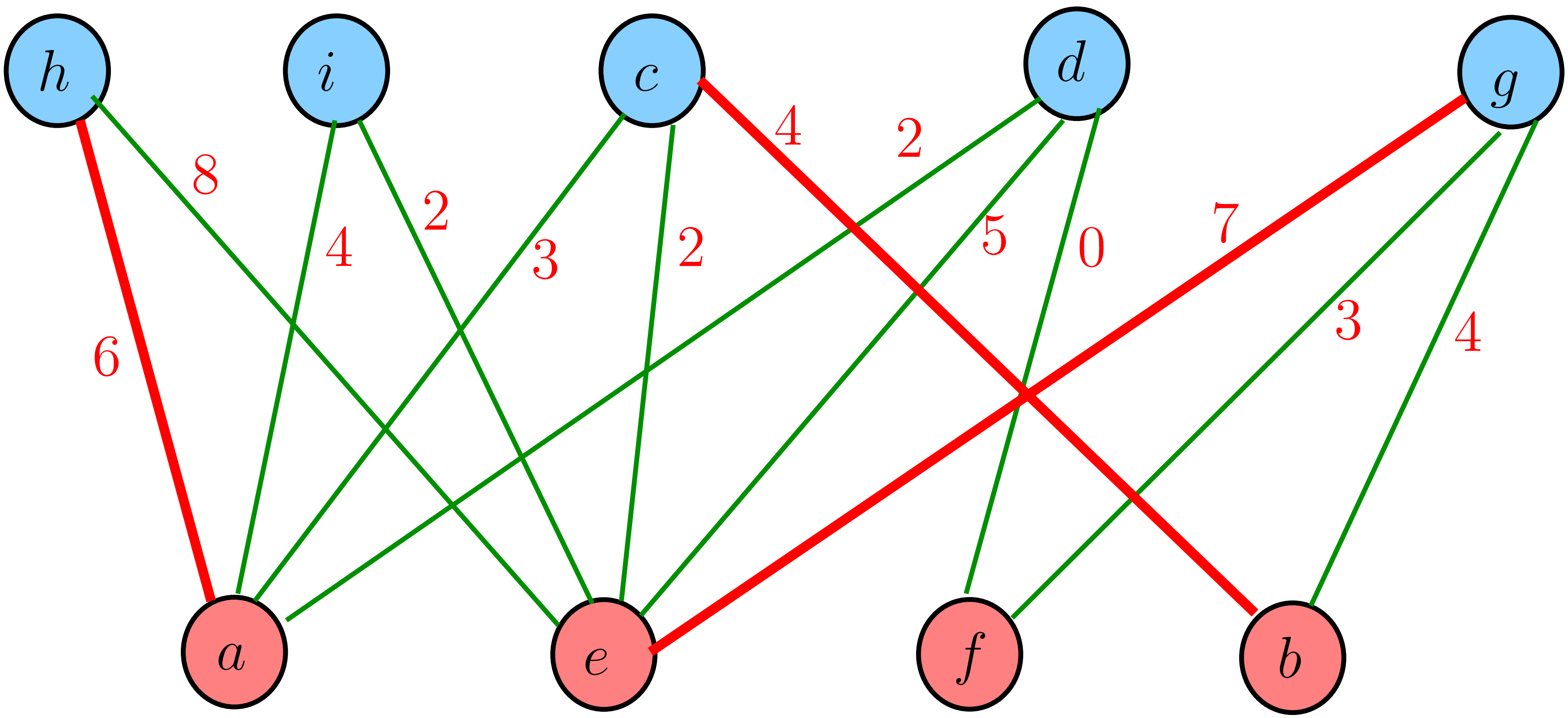
Exemplo



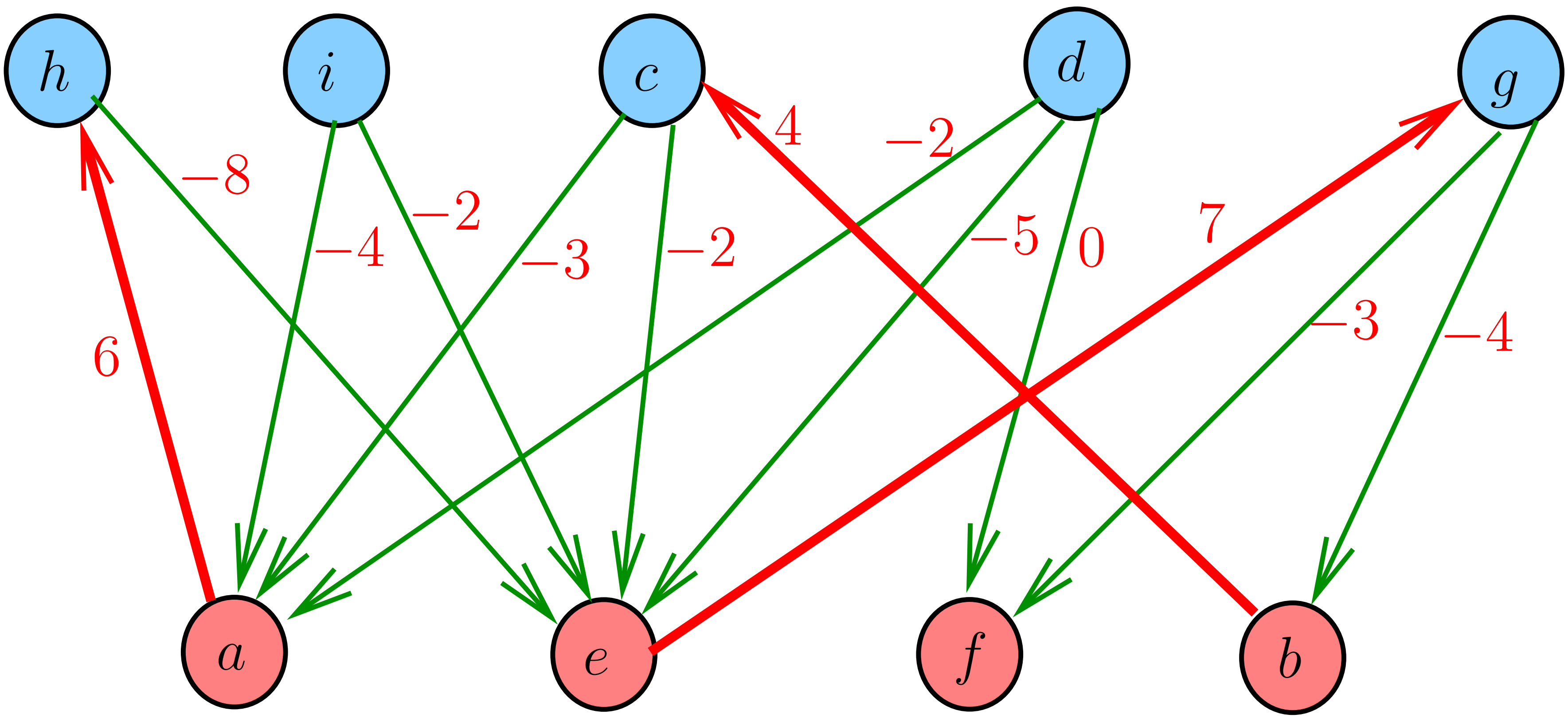
Exemplo



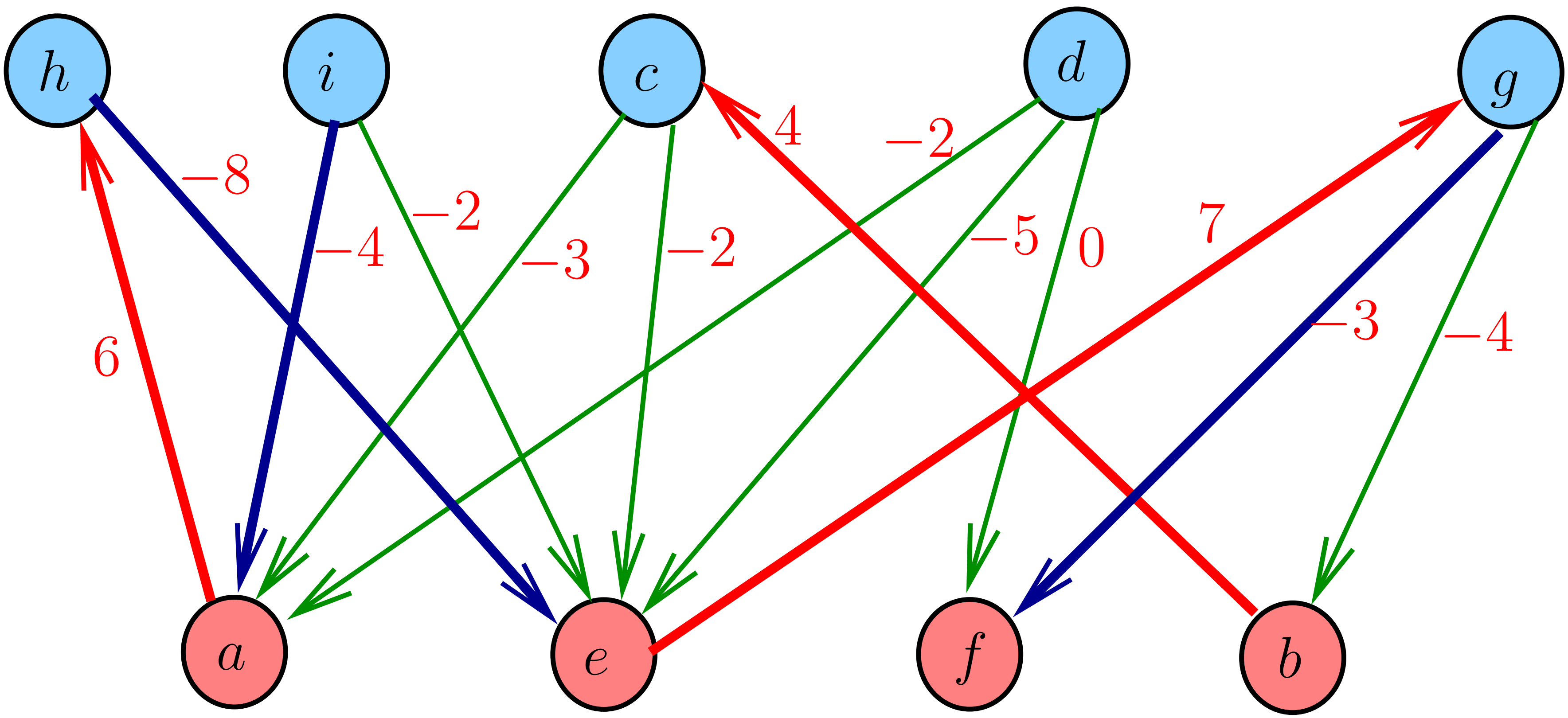
Exemplo



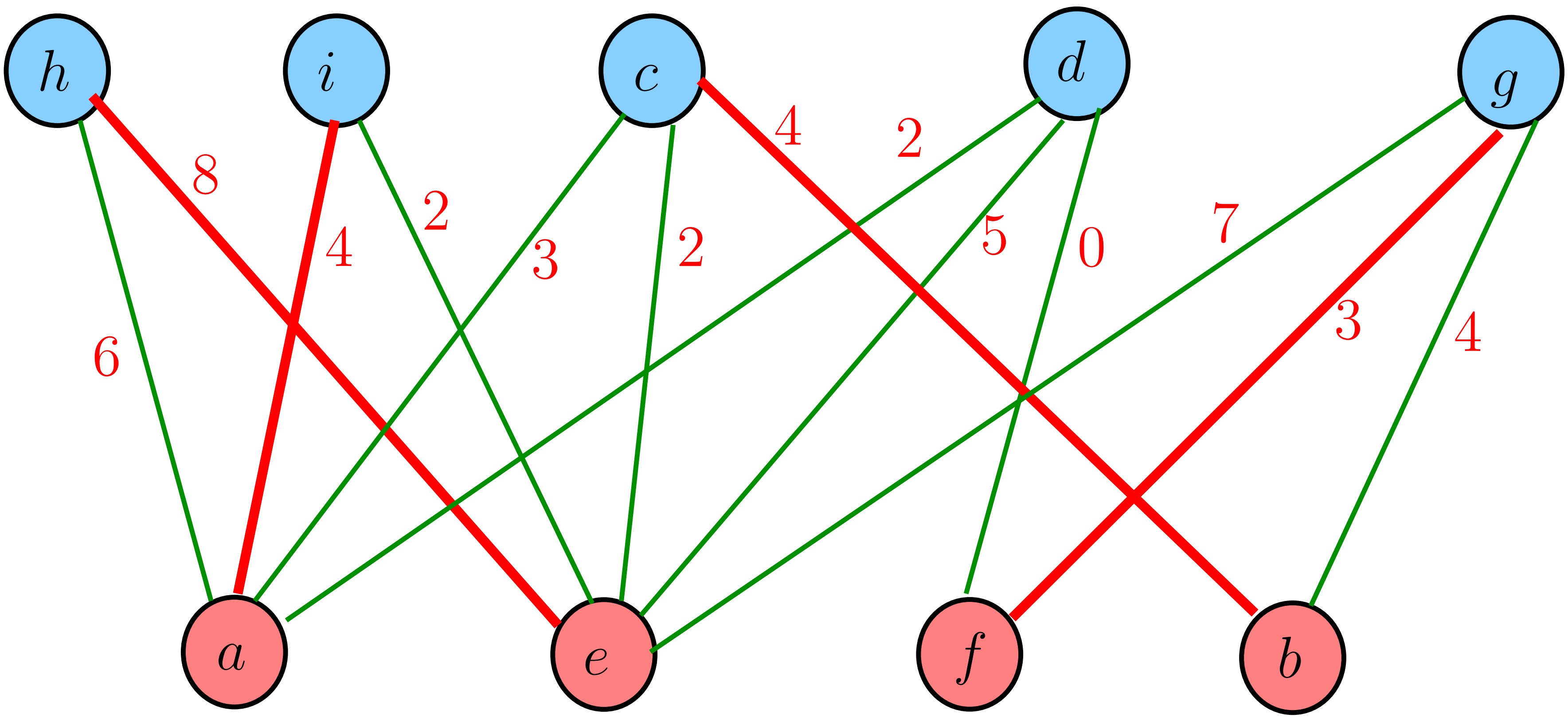
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Caminhos de custo mínimo

Fato. Se M é extremo, então a rede auxiliar (N, A, c) contruída em cada iteração não possui ciclos negativos.

Demonstração: Suponha que O é um circuito tal que $c(O) < 0$.

Podemos supor $O = \langle u_0, w_1, u_1, \ldots, w_t, u_t \rangle$ com $u_0 = u_t$, $u_1, \ldots, u_t$ em U e $w_1, \ldots, w_t$ em W.

Assim, as aresta $w_1u_1, \ldots, w_tu_t$ estão em M e as arestas $u_0w_1, \ldots, u_{t-1}w_t$ não estão em M.

Logo, $M' = M \oplus O$ é um emparelhamento com $|M|$ arestas tal que

$$w(M') = w(M) - c(O) > w(M),$$

contrariando o fato de que M é extremo.

Consumo de tempo

O consumo de tempo de cada iteração é o consumo de tempo de um algoritmo para o problema do caminho mínimo em redes com custos negativos, mas sem ciclos negativos. O algoritmo FORD-BELLMAN faz o serviço.

Assim, temos a seguinte conclusão:

> O consumo de tempo do algoritmo descrito para encontrar um emparelhamento de peso máximo em um grafo bipartido é $\mathrm{O}(n(nm)) = \mathrm{O}(n^2 m)$.

Aplicação: *optimal assignment*

Suponha que temos n tarefas que devem ser executadas em m máquinas. Além disso, seja $c(ij)$ o custo de executar a tarefa j na máquina i. Deseja-se executar as tarefas com custo total mínimo (suponha $m \geq n$).

Este problema pode ser resolvido através do método húngaro para encontrar um emparelhamento de peso máximo:

- construa um grafo bipartido completo em que os noś de uma parte correspondam às tarefas e os da outra às máquinas;
- seja $C := \max\{c(ij) :\ i$ é máquina e j é tarefa$\}$;
- defina o peso $w(ij)$ da aresta ij como $W - c(ij)$.

Assim, um emparelhamento de peso máximo corresponde a uma atribuição ótima de máquinas às tarefas.

Exercícios

Exercício 12.A

Mostre como utilizando o método húngaro pode-se obter um emparelhamento perfeito de peso mínimo de um grafo bipartido. Um emparelhamento M é perfeito se cada nó do grafo é ponta de uma aresta em M.

Exercício 12.B

Seja $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ uma família de subconjuntos de um conjunto finito X. Um subconjunto Y de X é chamado de uma transversal ou de um sistema de representantes distintos (SRD) de $\mathcal{A}$ se existe uma bijeção $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to Y$ tal que $\pi(i)$ está em A_i para cada $i = 1, \ldots, n$.

Dados um família $\mathcal{A}$ e uma função-peso $w : X \to \mathbb{Z}$, mostre como através do método húngaro pode-se obter um SRD de peso mínimo.