Melhores momentos

AULA 6

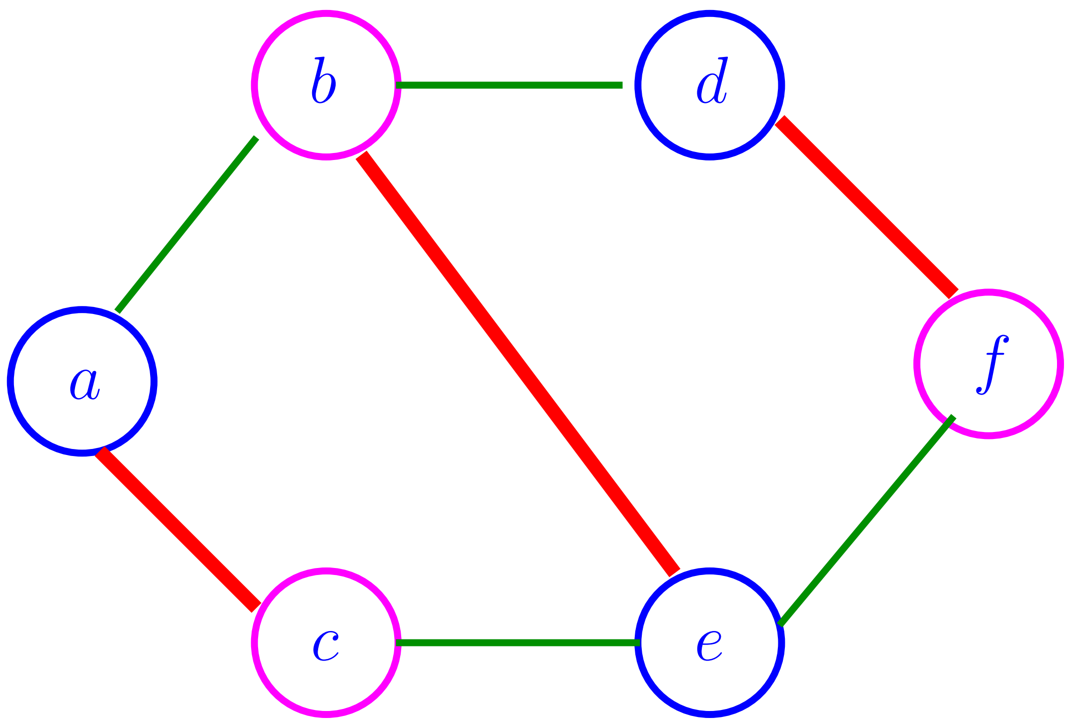
ν e τ

Seja $G = (N, E)$ um grafo e defina

$$\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ é um emparelhamento}\}$$

$$\tau(G) := \min\{|K| : K \text{ é uma cobertura}\}$$

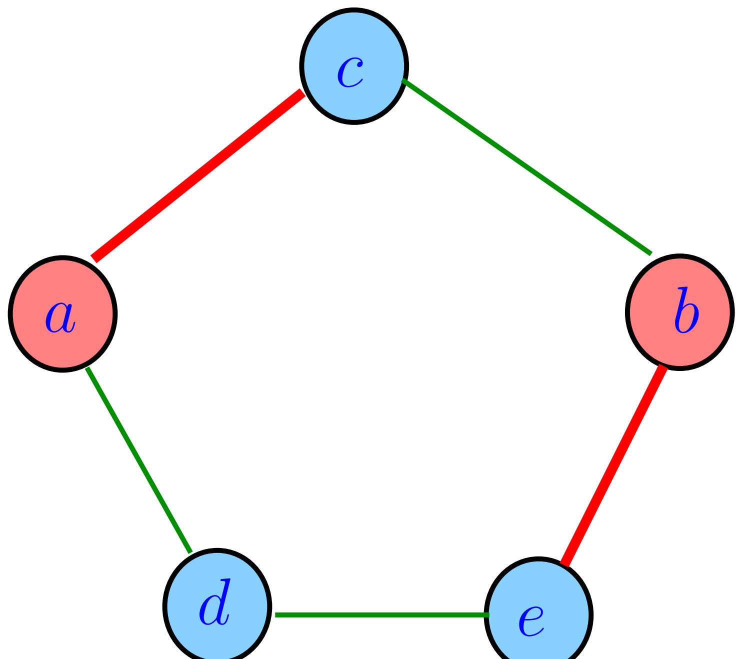
Exemplo: $\nu(G) = 3 = \tau(G)$



$\nu(G) = \tau(G)$?

Em geral, não é verdade que $\nu(G) = \tau(G)$.

Exemplo: $\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$

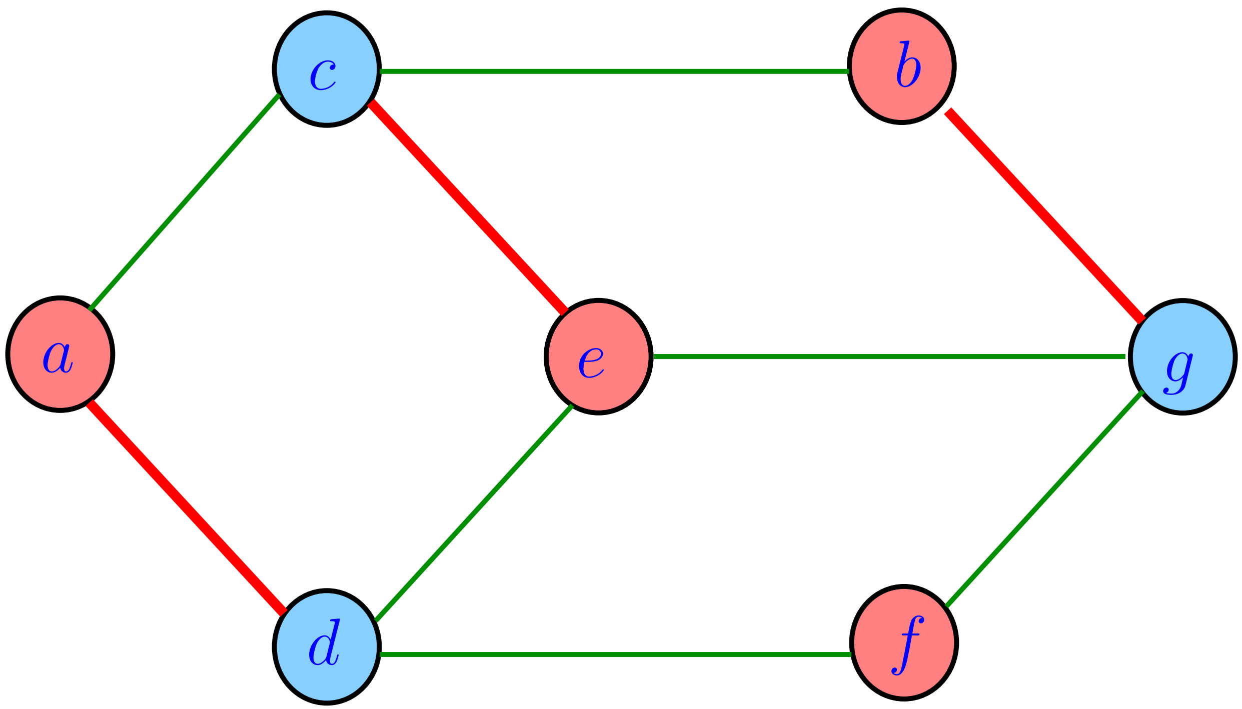


Teorema de Kőnig

Se $G = (N, E)$ é um grafo biparticionável, então

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Exemplo: $\nu(G) = 3 = \tau(G)$



Teorema de Hall

Se $G = (N, E)$ é um grafo com bipartição (U, W), então G possui um emparelhamento que satura os nós em U se e somente se

$$|\Gamma(X)| \geq |X|$$

para toda subconjunto X de U, onde

$$\Gamma(X) := \{w : \text{existe } x \in X \text{ tal que } xw \text{ é aresta de } G\}.$$

Um emparelhamento satura um nó se existe uma aresta do emparelhamento que tem esse no como ponta.

Teorema de Frobenius

The Marriage Theorem. Um grafo com bipartição (U, W) possui um emparelhamento perfeito se e somente se

- $|U| = |W|$ e
- $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de U.

Um emparelhamento é perfeito se todo nó é ponta de alguma aresta no emparelhamento.

Demonstração. Conseqüência do teorema de Hall.

AULA 7

Algoritmo para grafos bipartidos

Caminhos alternantes

Seja M um emparelhamento em um grafo G.
Um caminho $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_t \rangle$ é M-aumentador se

- t é ímpar e $v_0, v_1, \ldots, v_t$ sao distintos;
- $v_1 v_2, v_3 v_4, \ldots, v_{t-2} v_{t-1}$ então em M;
- v_0 e v_1 não são pontas de arestas em M.

Exemplo: $\langle a, b, c, d, e, f \rangle$ é um caminho M-aumentador

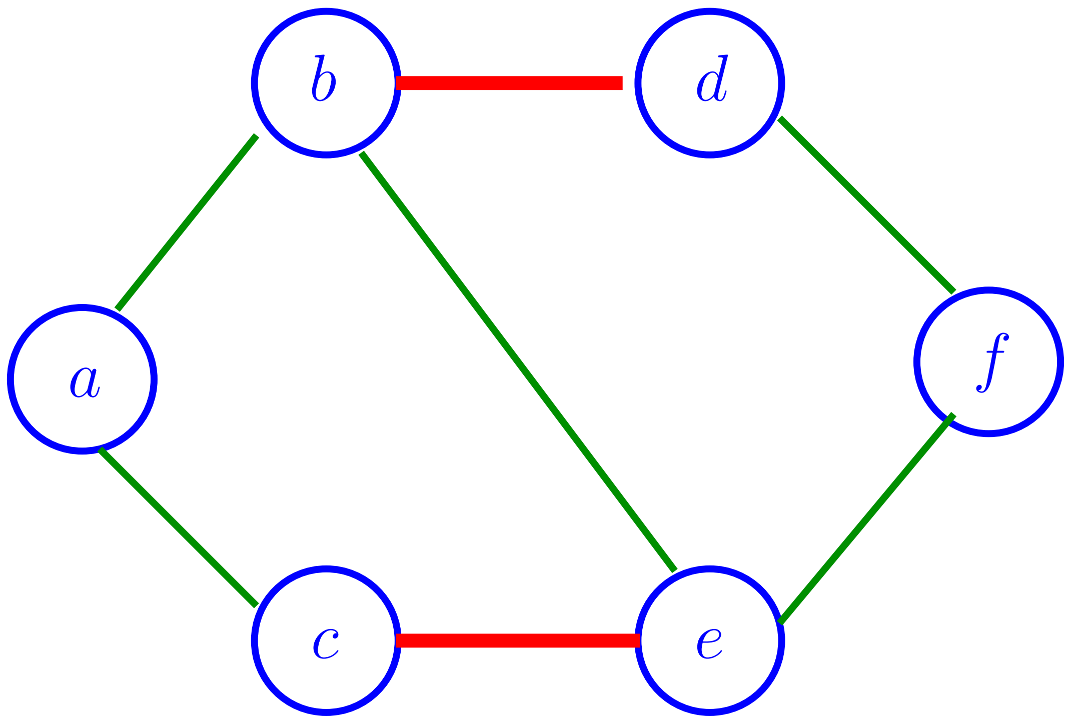
Teorema de Berge

Se M um emparelhamento em um grafo $G = (N, E)$, então M tem cardinalidade máxima se e somente se não existe um caminho M-aumentador.

Teorema de Berge

Se M um emparelhamento em um grafo $G = (N, E)$, então M tem cardinalidade máxima se e somente se não existe um caminho M-aumentador.

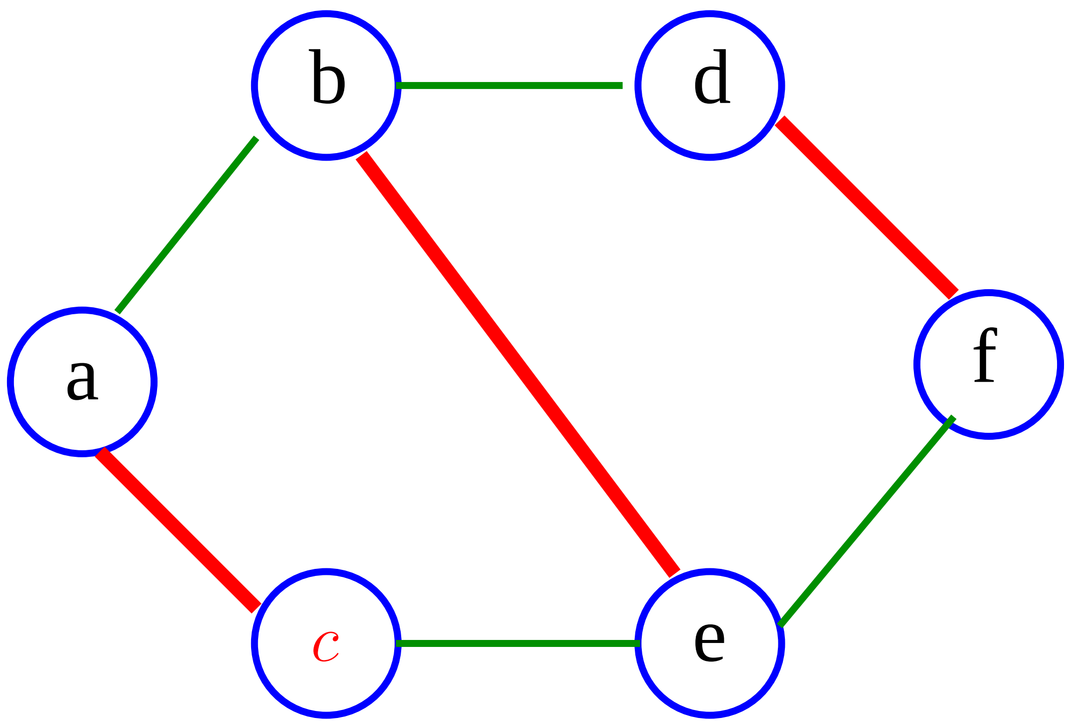
Exemplo: $\langle a, c, e, b, d, f \rangle$ é um caminho M-aumentador



Teorema de Berge

Se M um emparelhamento em um grafo $G = (N, E)$, então M tem cardinalidade máxima se e somente se não existe um caminho M-aumentador.

Exemplo: M tem cardinalidade máxima



Demonstração

Se M tem cardinalidade máxima, não pode existir uma caminho M-aumentador P pois nesse caso teriamos que $P \oplus M$ seria um emparelhamento de cardinalidade maior.

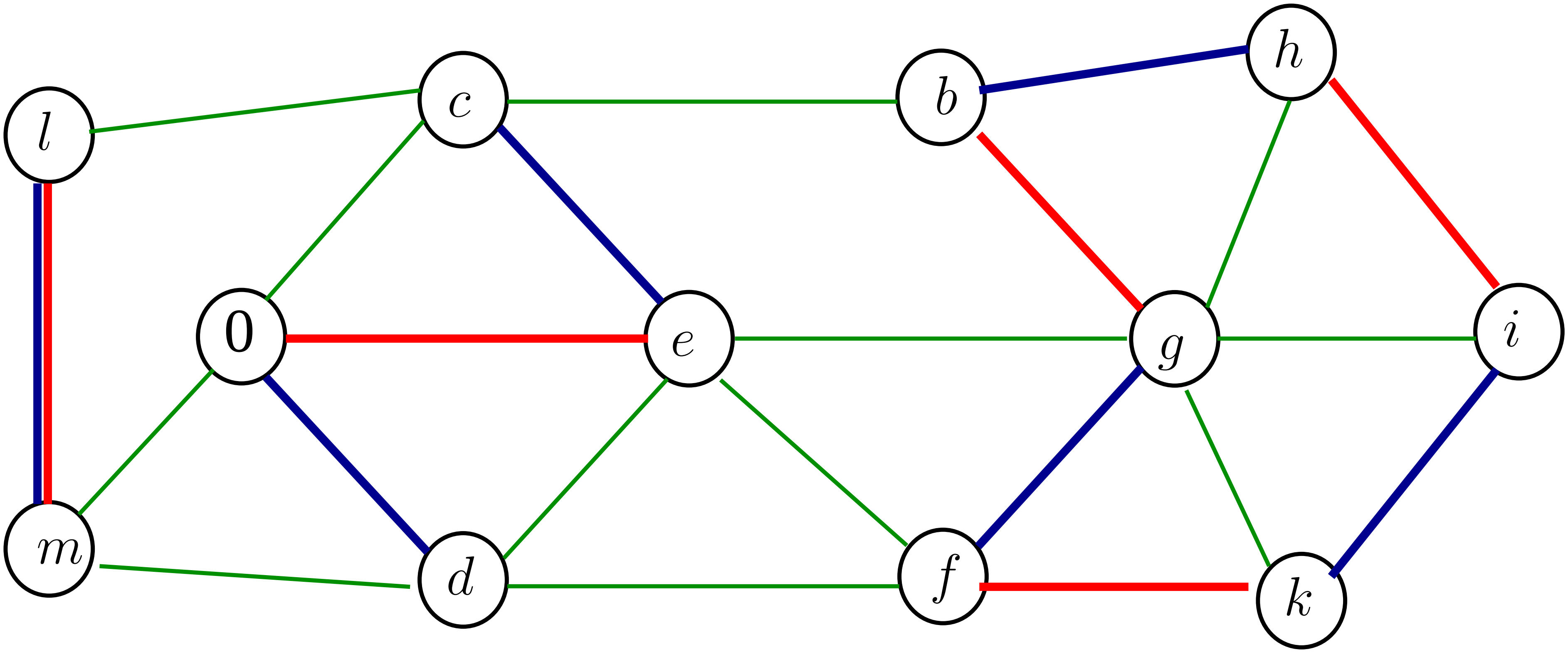
Se M' é um emparelhamento maior que M, considere os componentes do grafo $G' := (N, M \cup M')$.

Como cada nó de G' é ponta de no máximo duas arestas, cada componente de G' é um caminho (possivelmente de comprimento zero) ou um circuito (par).

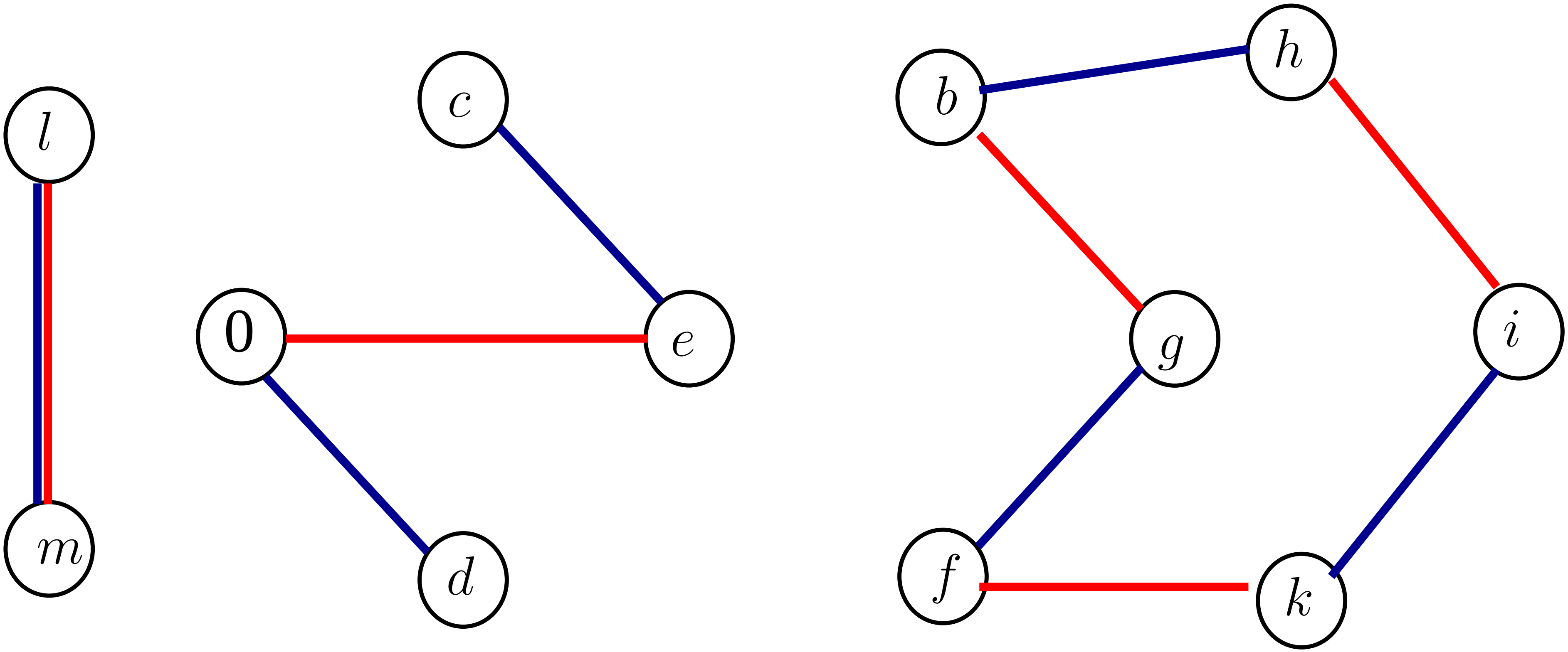
Como $|M'| > |M|$, pelo menos um dos componentes de G' contém mais arestas de M' do que de M.

Este componente forma um caminho M-aumentador.

Exemplo



Exemplo



Rascunho de algoritmo

O teorema de Berge sugere um algoritmo iterativo para encontrar um emparelhamento máximo em um grafo.

Cada iteração do algoritmo começa com um emparelhamento M. No início da primeira iteração $M = \emptyset$.

Cada iteração consiste no seguinte.

Caso 1: Não existe um caminho M-aumentador

Devolva M e pare.

Caso 2: Existe um caminho M-aumentador

Seja P um caminho M-aumentador
$M' \leftarrow M \oplus P$
Comece nova iteração com M' no papel de M

Passo aumentador em grafos bipartidos

Recebe uma grafo bipartido (N, E) com bipartição (U, W) e um emparelhamento M e devolve um emparelhamento M' tal que $|M'| > |M|$, se um tal emparelhamento existe.

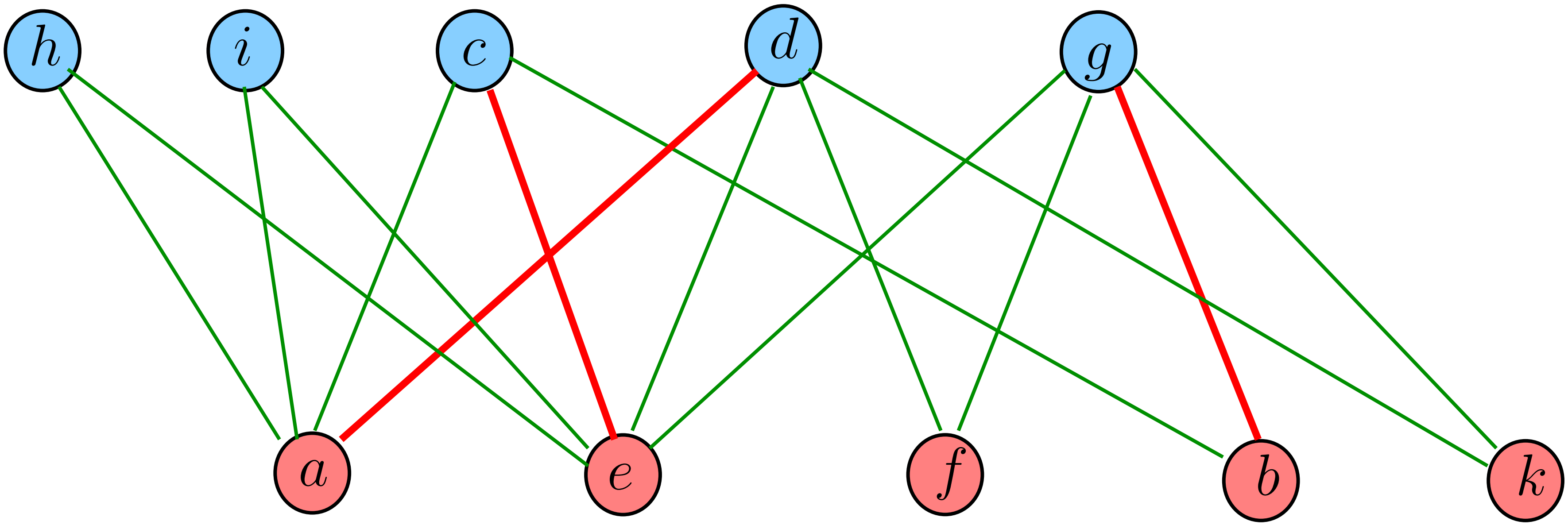
Oriente cada aresta uw do grafo, com u em U e w em W da seguinte maneira:

- se uw está em M oriente a aresta de w para u,
- se uw não está em M oriente a aresta de u para w.

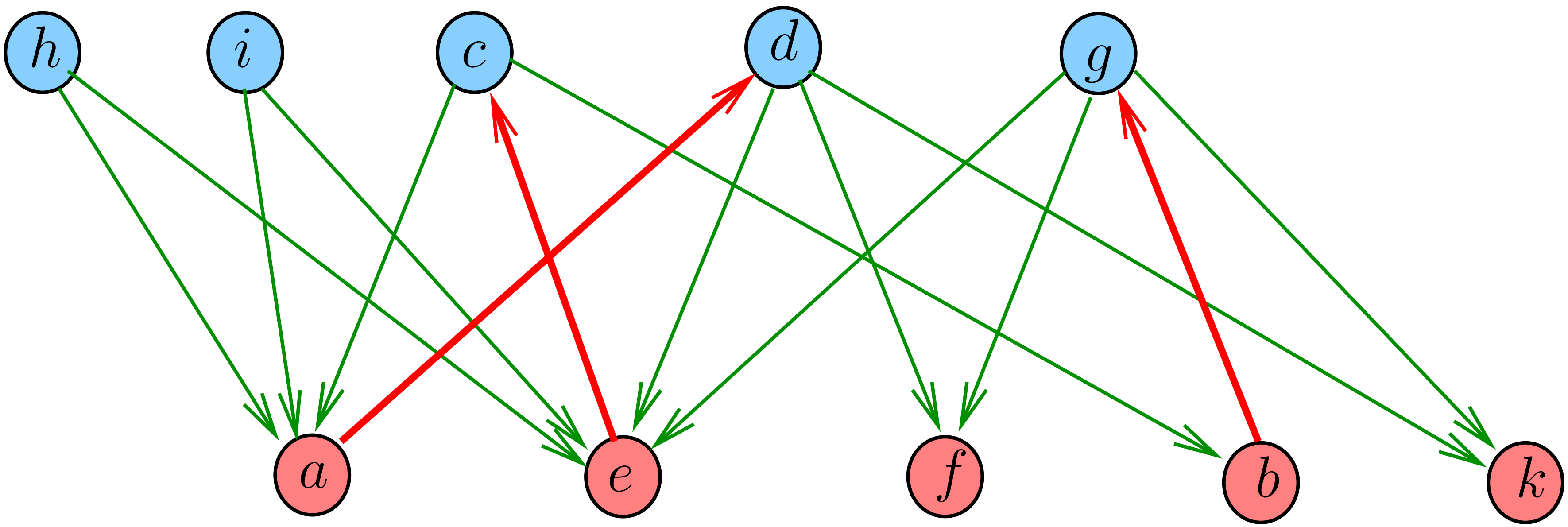
Seja (N, A) o grafo (orientado) resultante.
Seja U' os nós em U que não são pontas em M.
Seja W' os nós em W que não são pontas em M.

Existe um caminho M-aumentador em (N, E) se e somente se existe um caminho em (N, A) com ponta inicial em U' e ponta final em W'.

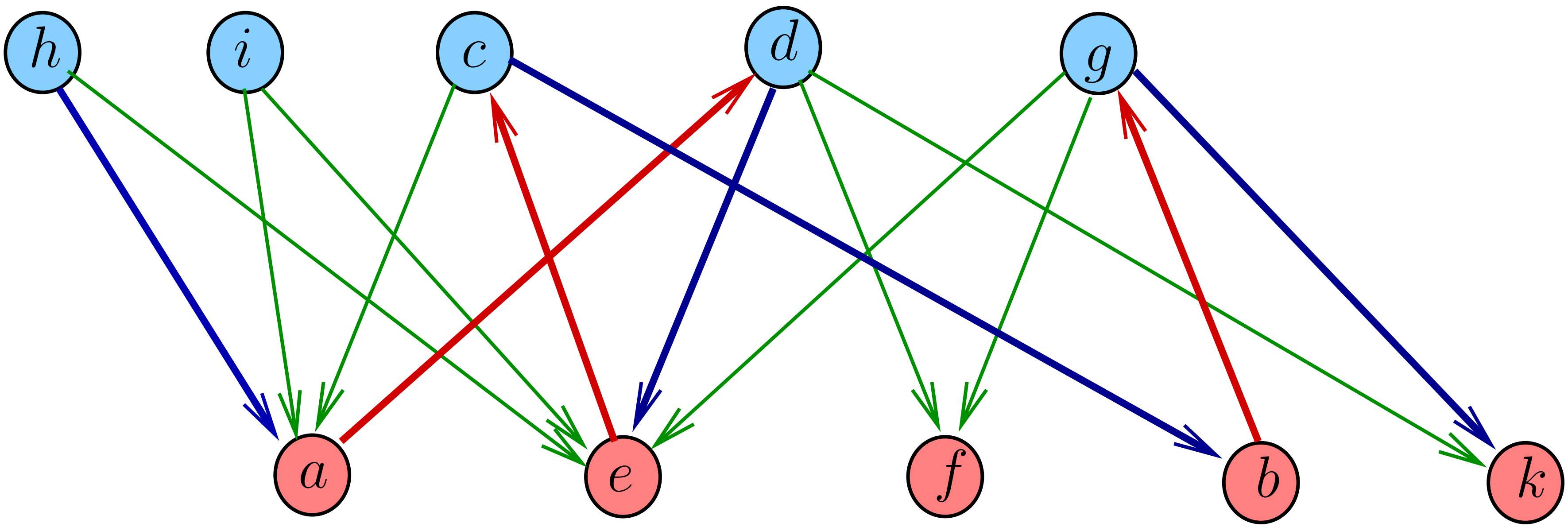
Exemplo



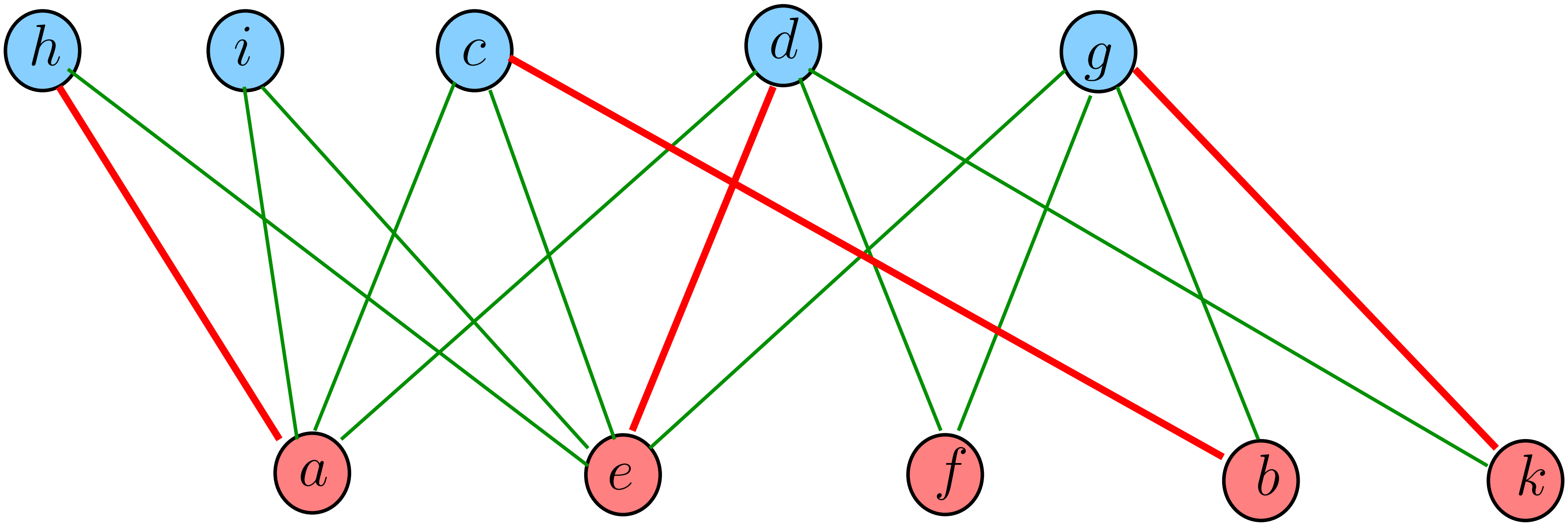
Exemplo



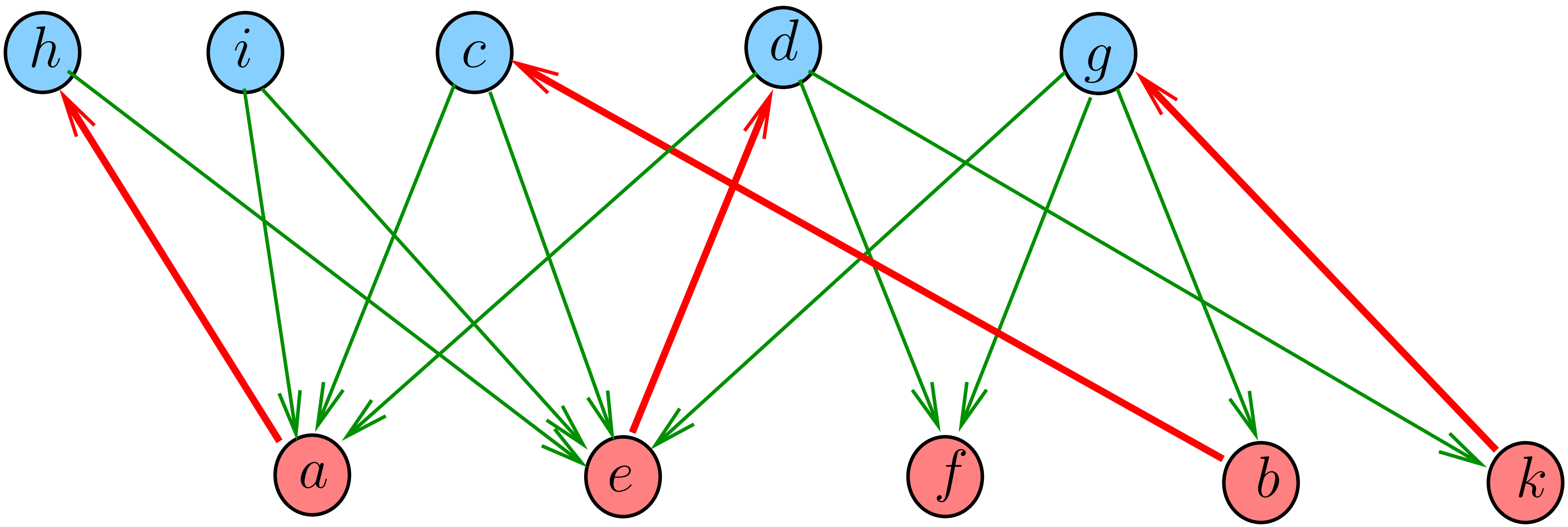
Exemplo



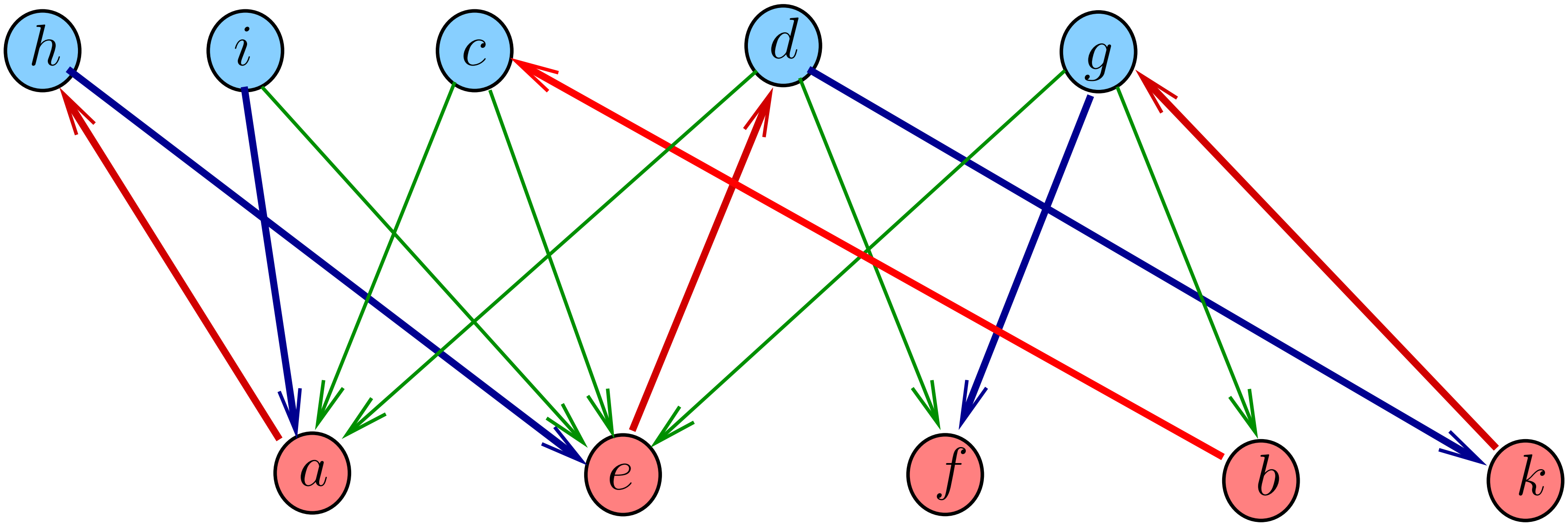
Exemplo



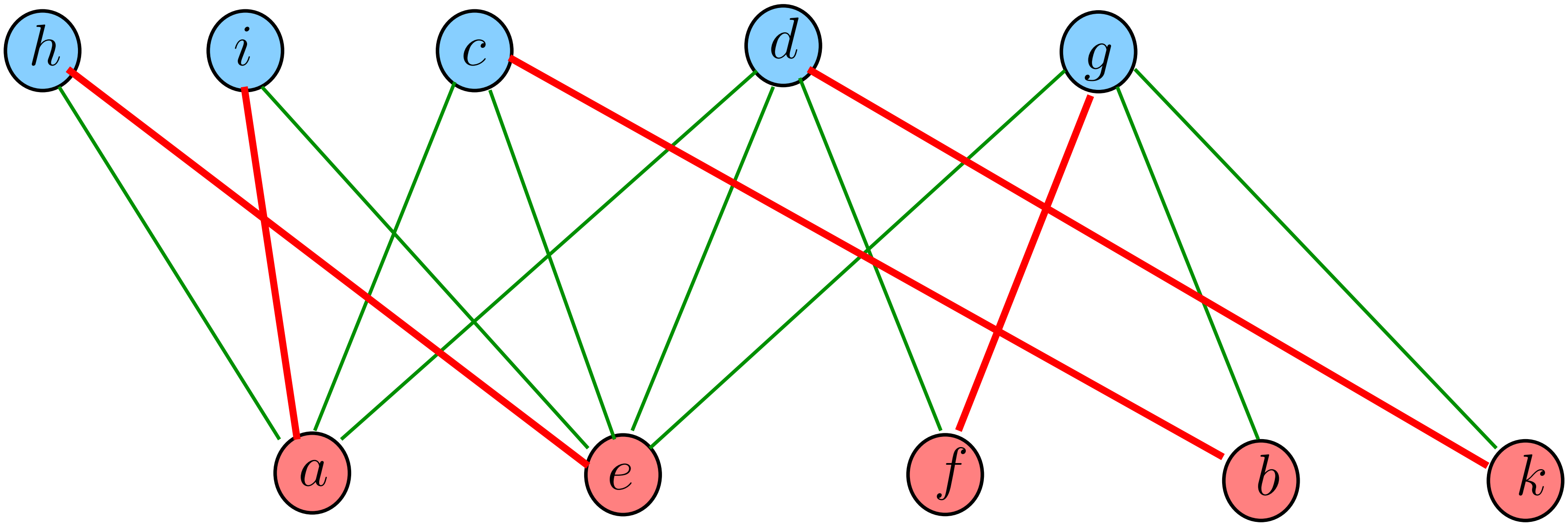
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Consumo de tempo

O consumo de tempo do passo aumentador é o de um algoritmo para busca (em largura ou profundidade), isto é $O(n + m)$

Assim, temos a seguinte conclusão:

> O consumo de tempo do algoritmo descrito para encontrar um emparelhamento de cardinalidade máxima em um grafo bipartido é $O(n(n + m))$.

Exercícios

Exercício 7.A

Prove o teorema de Kőnig utilizando o teorema de Frobenius

Exercício 7.B

Um grafo é k-regular se cada aresta é ponta de exatamente k arestas.

(i) Demonstre que todo grafo bipartido k-regular possui um emparelhamento perfeito.

(ii) Utilizando o item anterior, demonstre que todo grafo bipartido k-regular possui k emparelhamentos perfeitos disjuntos.

(iii) De um exemplo de um grafo k-regular que não possui um emparelhamento perfeito.

Exercício 7.C

Seja $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ uma família de subconjuntos de um conjunto finito X. Um subconjunto Y de X é chamado de uma transversal ou de um sistema de representantes distintos (SRD) de $\mathcal{A}$ se existe uma bijeção $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to Y$ tal que $\pi(i)$ está em A_i para cada $i = 1, \ldots, n$.

Decida se as seguintes coleções possuem um SRD:

(i) $\{3,4,5\}, \{2,5,6\}, \{1,2,5\}, \{1,2,3\}, \{1,3,6\}$

(ii) $\{1,2,3,4,5,6\}, \{1,3,4\}, \{1,4,7\}, \{2,3,5,6\}, \{3,4,7\}, \{1,3,4,7\}, \{1,3,7\}$

Mais exercícios

Exercício 7.D

Seja $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ uma família de subconjuntos de um conjunto finito X. Prove que $\mathcal{A}$ possui um SRD se e somente se

$$|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|$$

para cada subconjunto I de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercício 7.E

Considere o passo aumentador para grafos bipartidos descrito anteriormente. Seja (N, A) o grafo orientado construído no passo. Sejam ainda U' os nós em U que não são pontas de arestas em M e W' os nós em W que não são pontas de arestas em M.
Suponha que em (N, A) não existe caminhos com ponta inicial em U' e ponta final em W'. Seja K_W os nós de W que são pontas finais de caminhos com início em U'. Seja K_U os nós de U que são pontas iniciais de caminhos com término em W'.

(i) Demonstre que $K := K_U \cup K_W$ é uma cobertura de vértice de (N, E).

(ii) Demonstre que $|M| = |K|$.

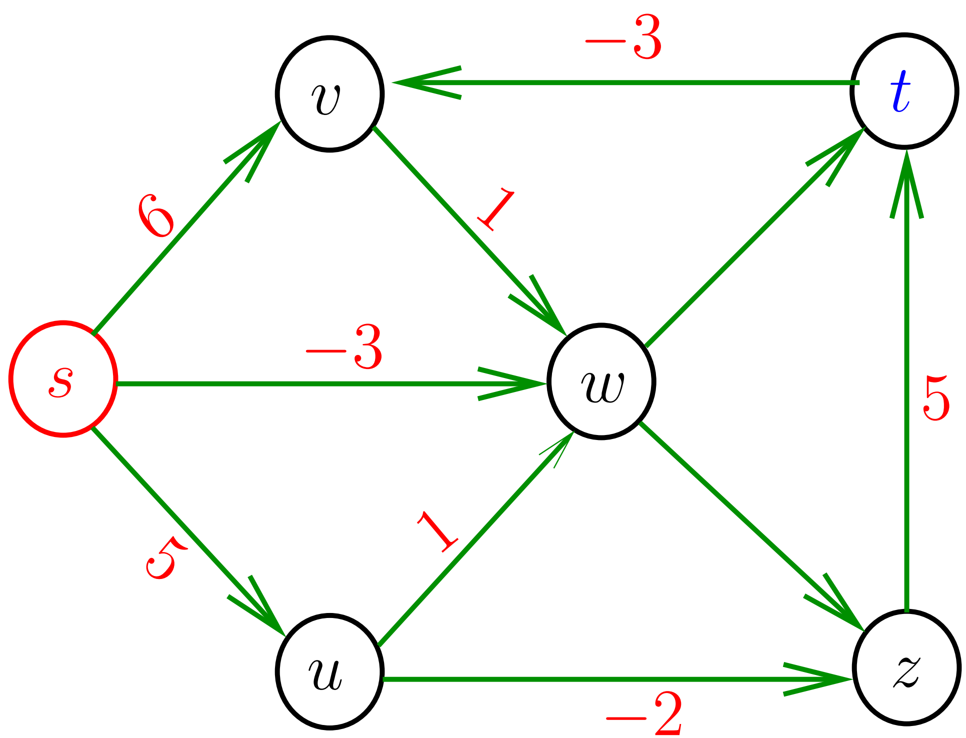
(Assim, de (i) e (ii) concluímos que M e um emparelhamento máximo e K é uma cobertura mínima.)

Caminhos de custo mínimo

PF 8.1, 8.2, 8.4

Custos

Uma função-custo é uma função de A em $\mathbb{Z}$.



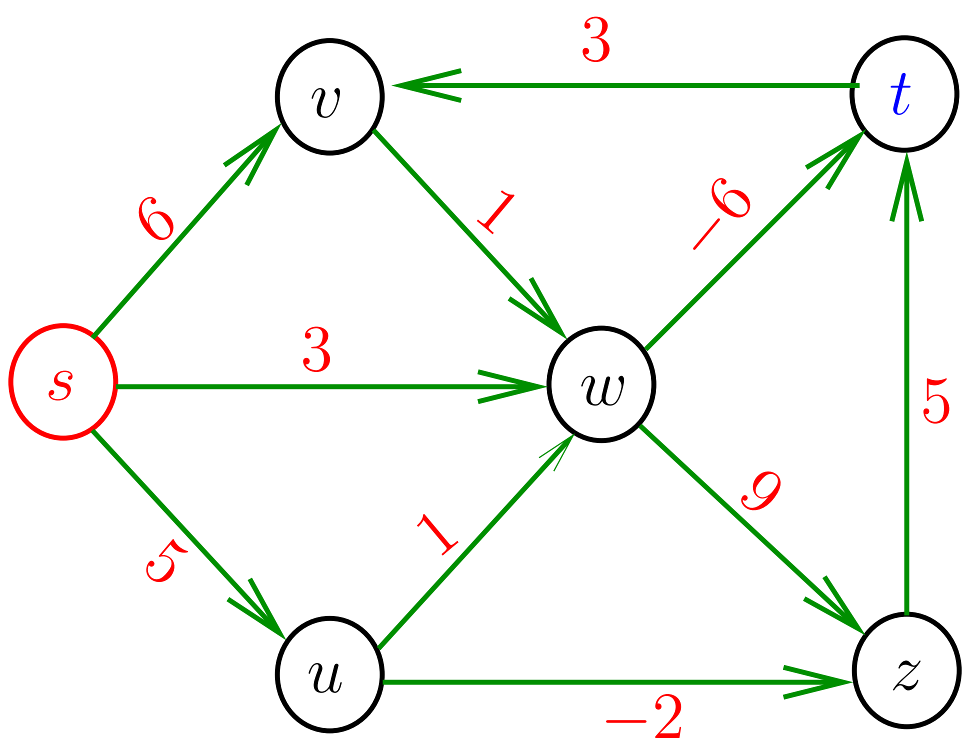
Custo de um passeio

O custo de um passeio é soma dos custos dos arcos no passeio.

O custo do passeio $\langle s, v, w, z \rangle$ é 16.

O custo do passeio $\langle s, v, w, t, v, w, z \rangle$ é 14.

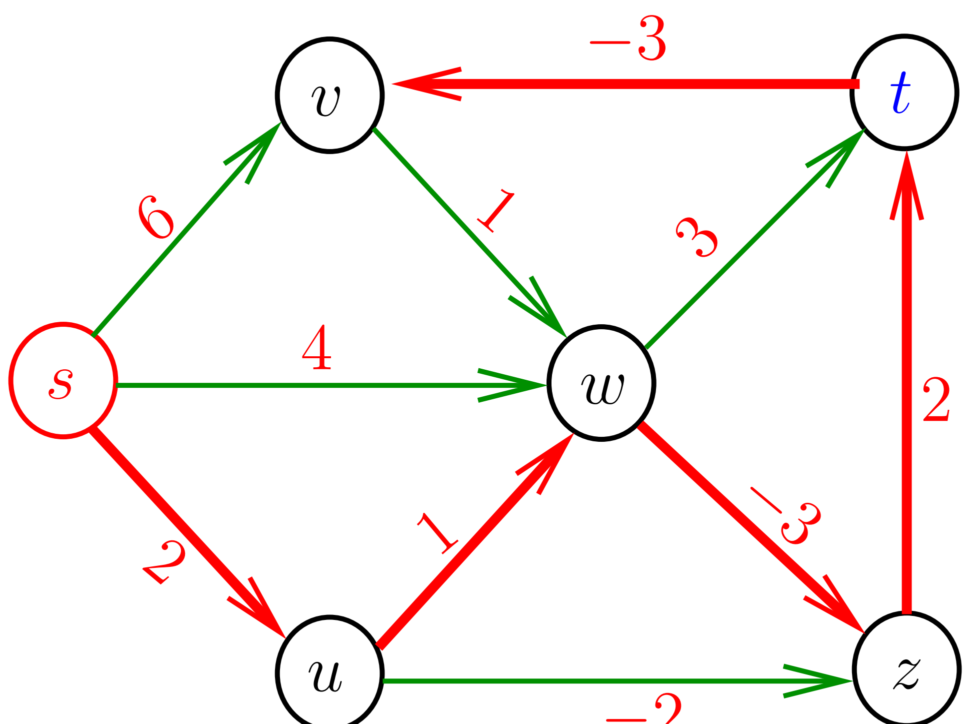
O custo do passeio $\langle s, v, w, t, v, w, t, v, w, z \rangle$ é 12.



Caminho mínimo

Um caminho P tem custo mínimo se $c(P) \leq c(P')$ para todo caminho P' com a mesma origem e término de P.

O passeio $\langle s, u, w, z, t, v \rangle$ é mínimo. Tem custo -1.



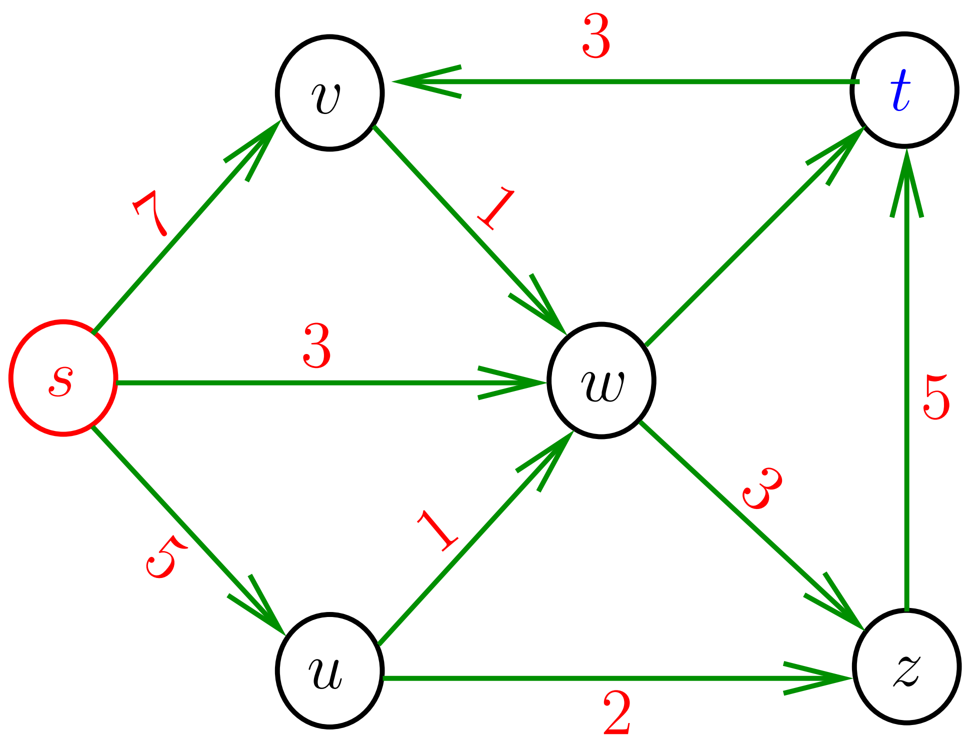
Problema

Problema do caminho mínimo sob custo não-negativo:
Dada uma rede (N, A, c) com função-custo $c : A \to \mathbb{Z}_{\geq}$ e um nó s, encontrar, para cada nó t, um caminho de custo mínimo de s a t.

Problema

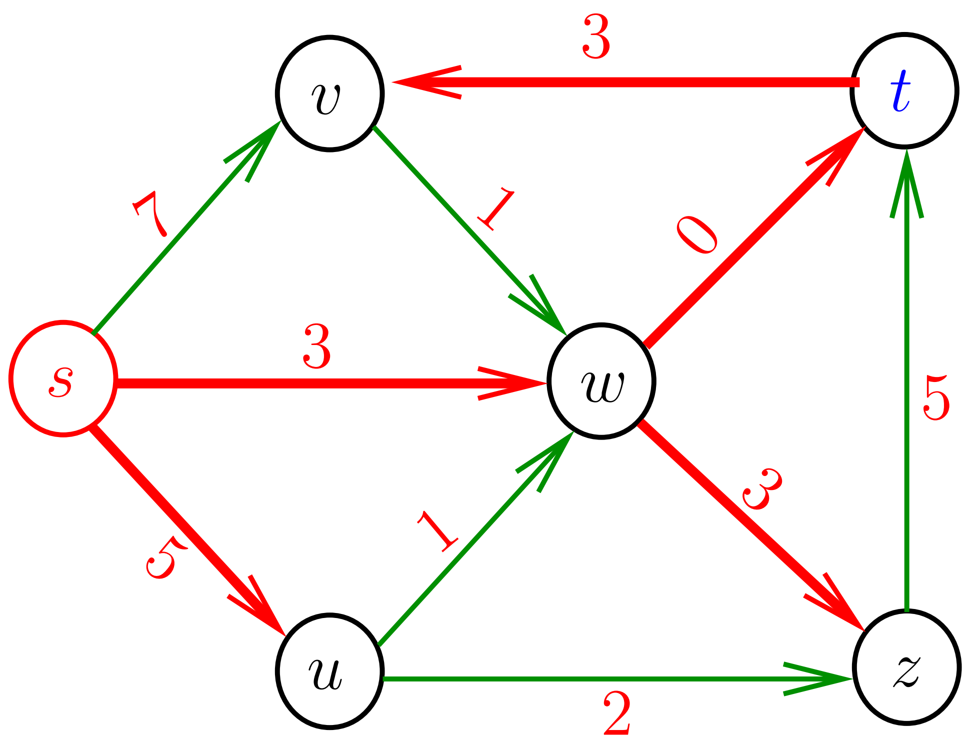
Problema do caminho mínimo sob custo não-negativo: Dada uma rede (N, A, c) com função-custo $c : A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq}$ e um nó s, encontrar, para cada nó t, um caminho de custo mínimo de s a t.

Entra:



Problema

Problema do caminho mínimo sob custo não-negativo:
Dada uma rede (N, A, c) com função-custo $c : A \to \mathbb{Z}_{\geq}$ e um nó s, encontrar, para cada nó t, um caminho de custo mínimo de s a t.
Sai:



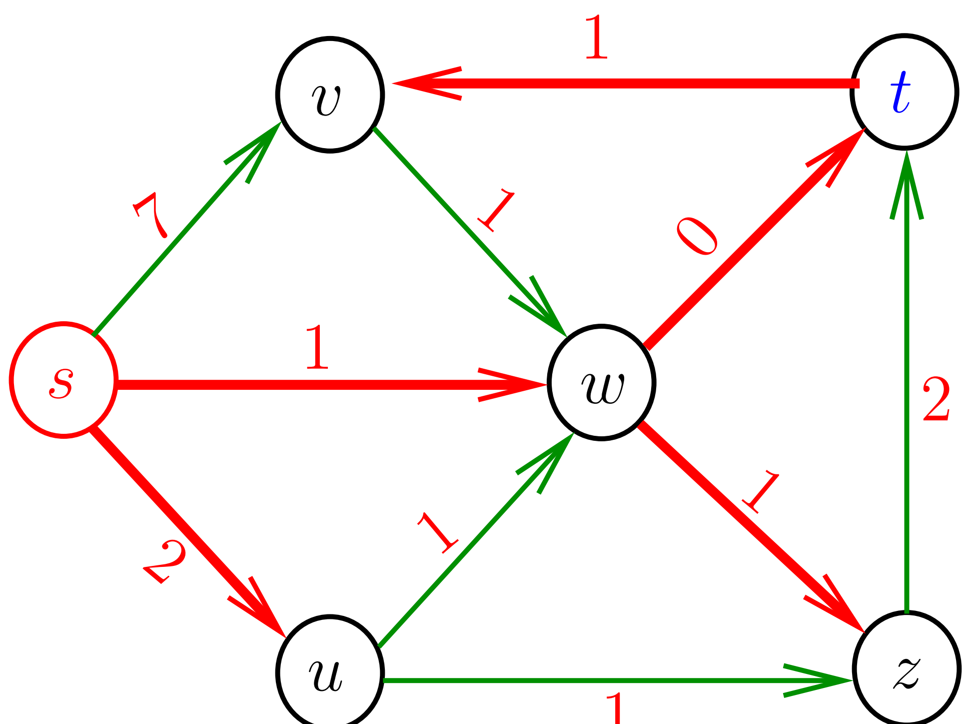
Condição de inexistência

Como é possível provar que um dado caminho de s a t tem custo mínimo?

Condição de inexistência

Como é possível provar que um dado caminho de s a t tem custo mínimo?

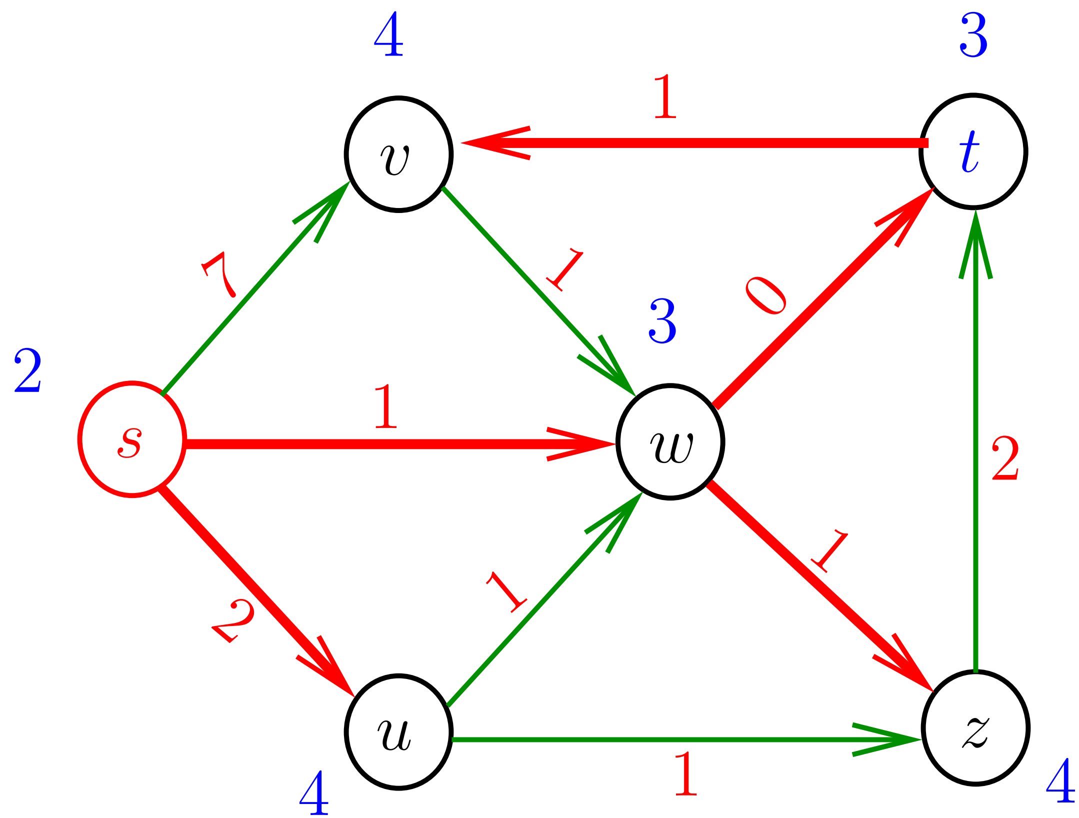
Entra:



Condição de inexistência

Como é possível provar que um dado caminho de s a t tem custo mínimo?

Sai: um potencial apropriado



c-potencial

Um c-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

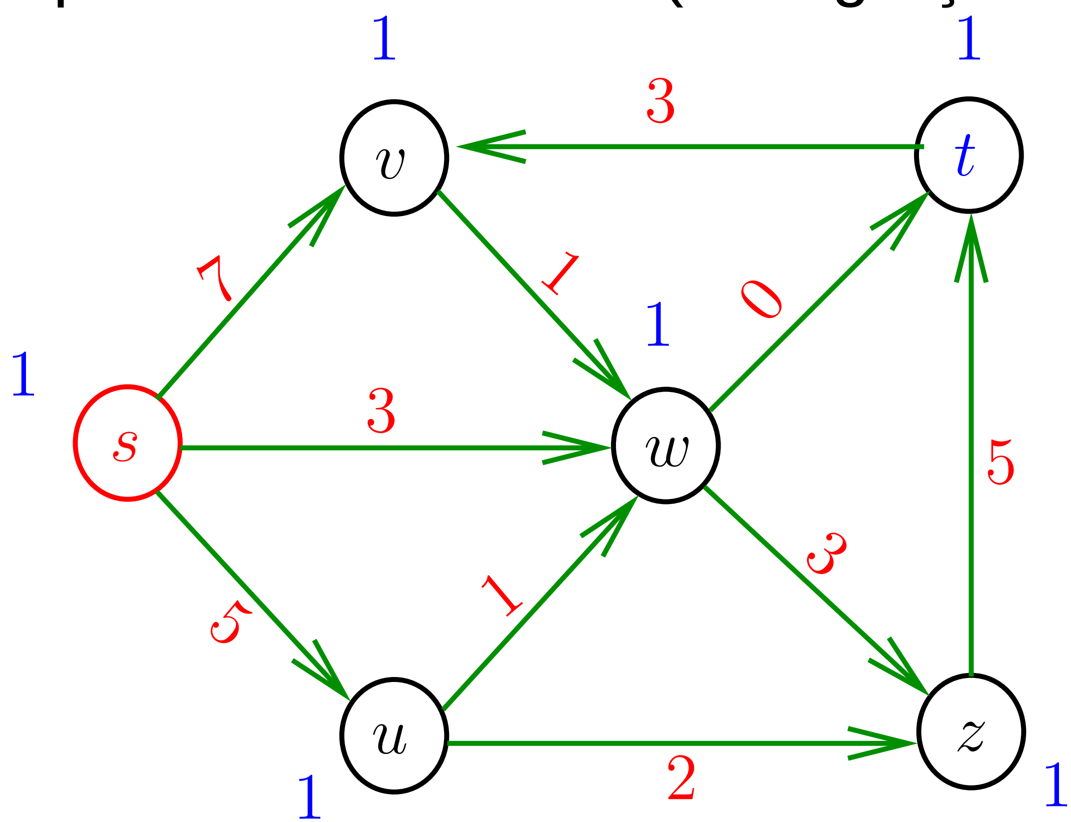
$$y(j) - y(i) \leq c(ij) \quad \text{para todo arco } ij.$$

c-potencial

Um c-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

$$y(j) - y(i) \leq c(ij) \quad \text{para todo arco } ij.$$

Exemplo 1: c-potencial constante (sem graça...)

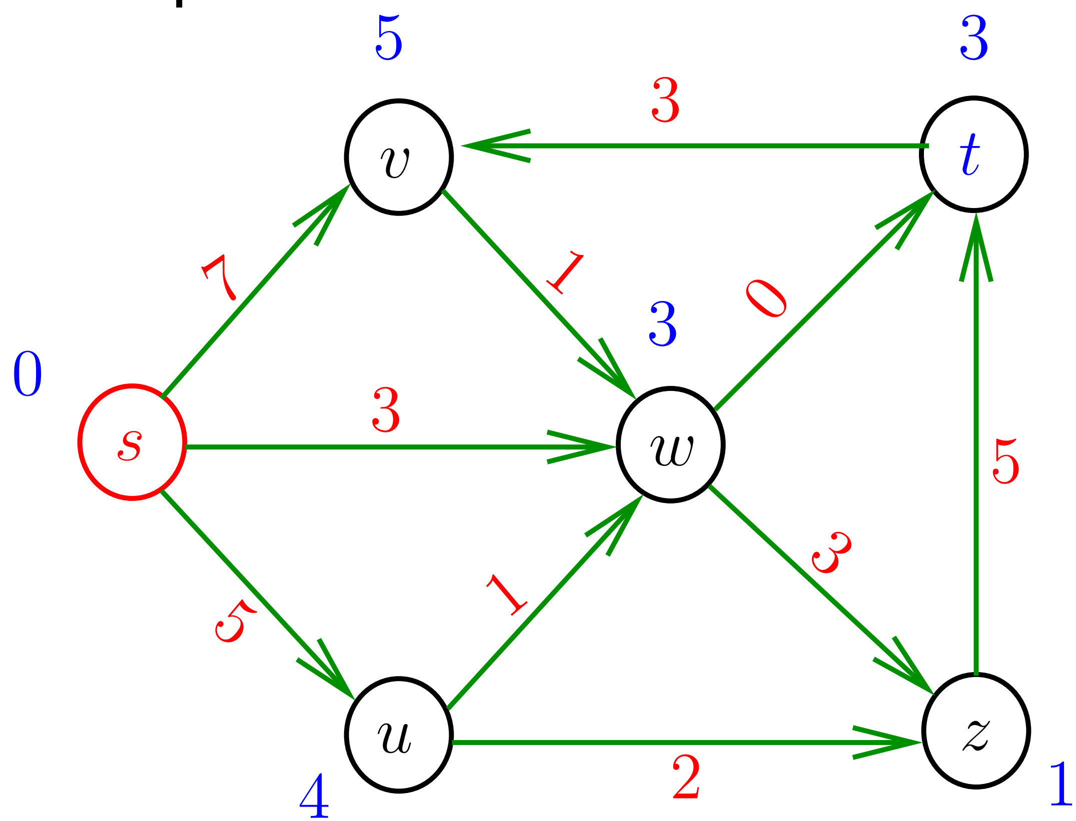


c-potencial

Um c-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

$$y(j) - y(i) \leq c(ij) \quad \text{para todo arco } ij.$$

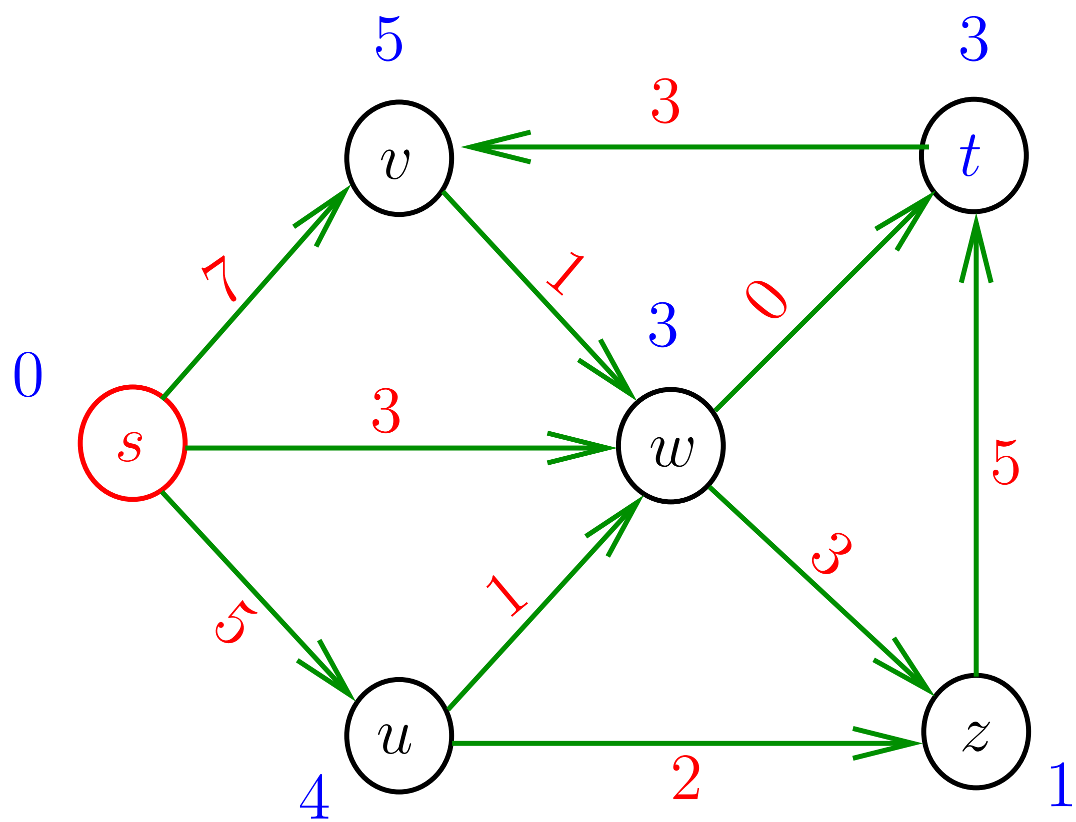
Exemplo 2: um c-potencial menos "bobo"



Propriedade de c-Potenciais

(Lema da dualidade.) Se P é um passeio de s a t e y é um c-potencial então

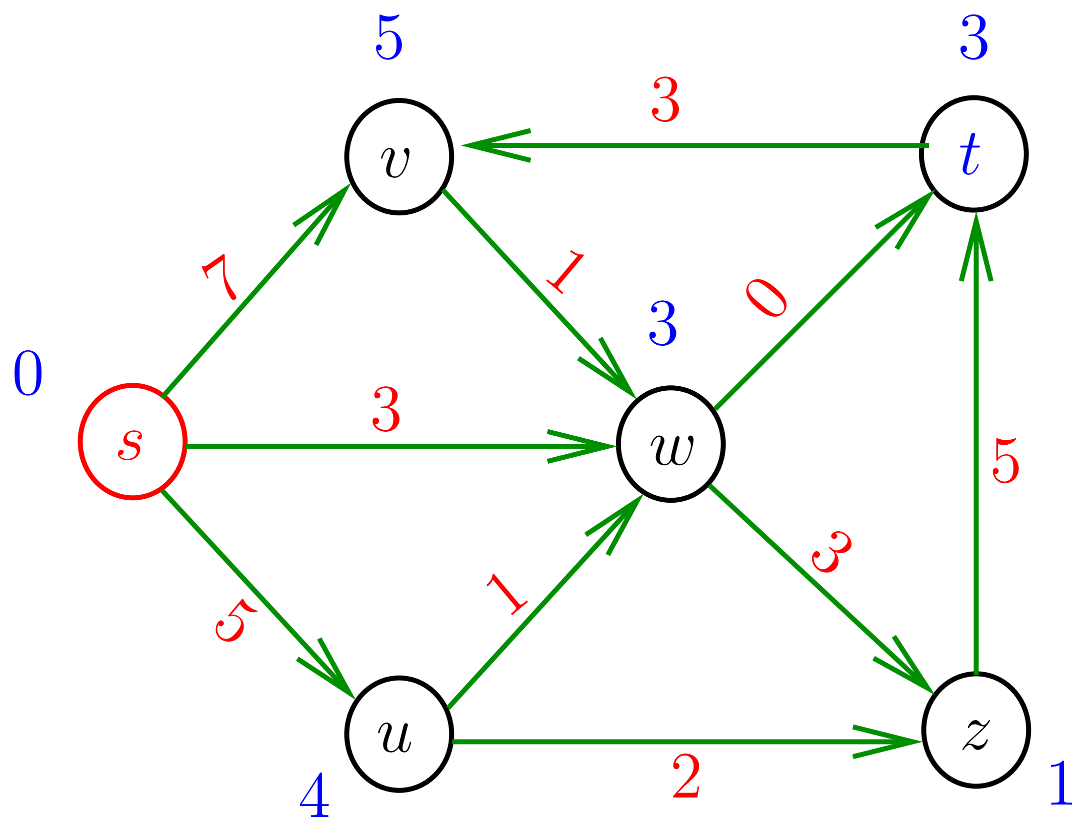
$$c(P) \geq y(t) - y(s).$$



Propriedade de c-Potenciais

Para mostrar que não existe um caminho de s a t de comprimento $< \lambda$ basta exibir um 1-potencial tal que

$$y(t) - y(s) \geq \lambda.$$

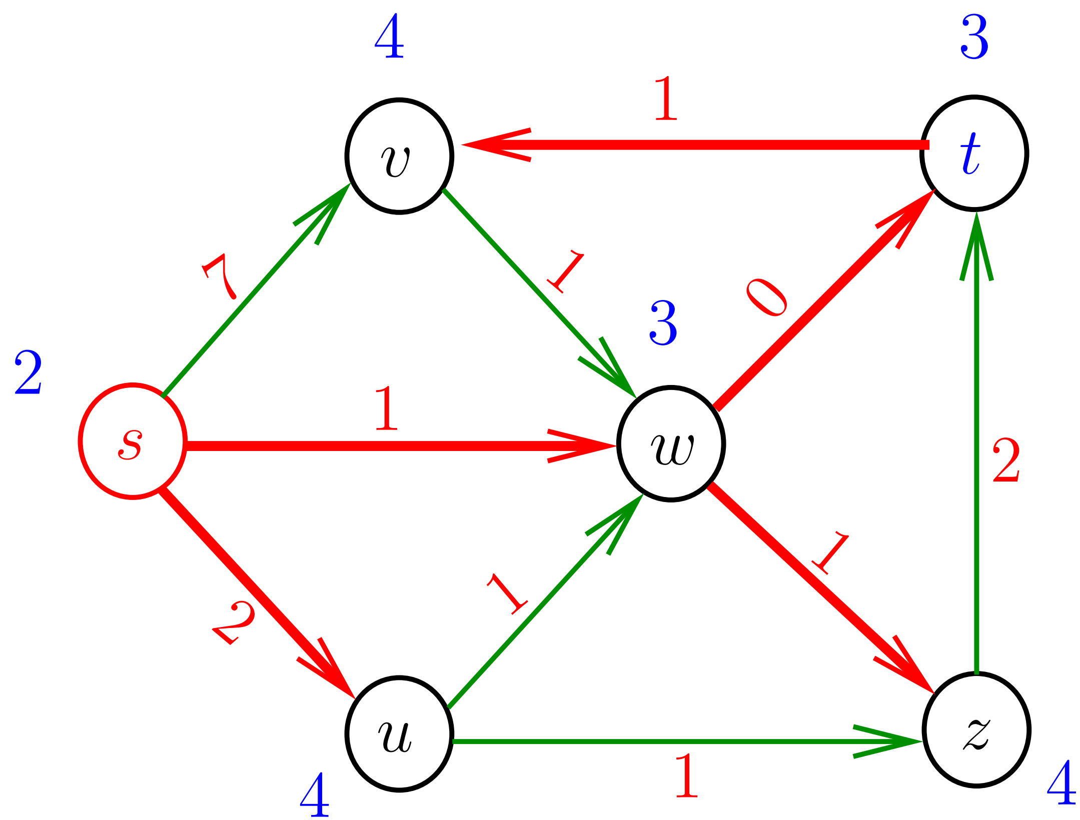


Conseqüência

Se P é um caminho de s a t e y é um c-potencial tais que

$$c(P) = y(t) - y(s),$$

então P é uma caminho mínimo e y é um c-potencial tal que o valor de $y(t) - y(s)$ é máximo.



Potenciais ótimos

Um c-potencial y é $(s,*)$-ótimo se, para todo nó t, existe um caminho P de s a t tal que

$$c(P) = y(t) - y(s),$$