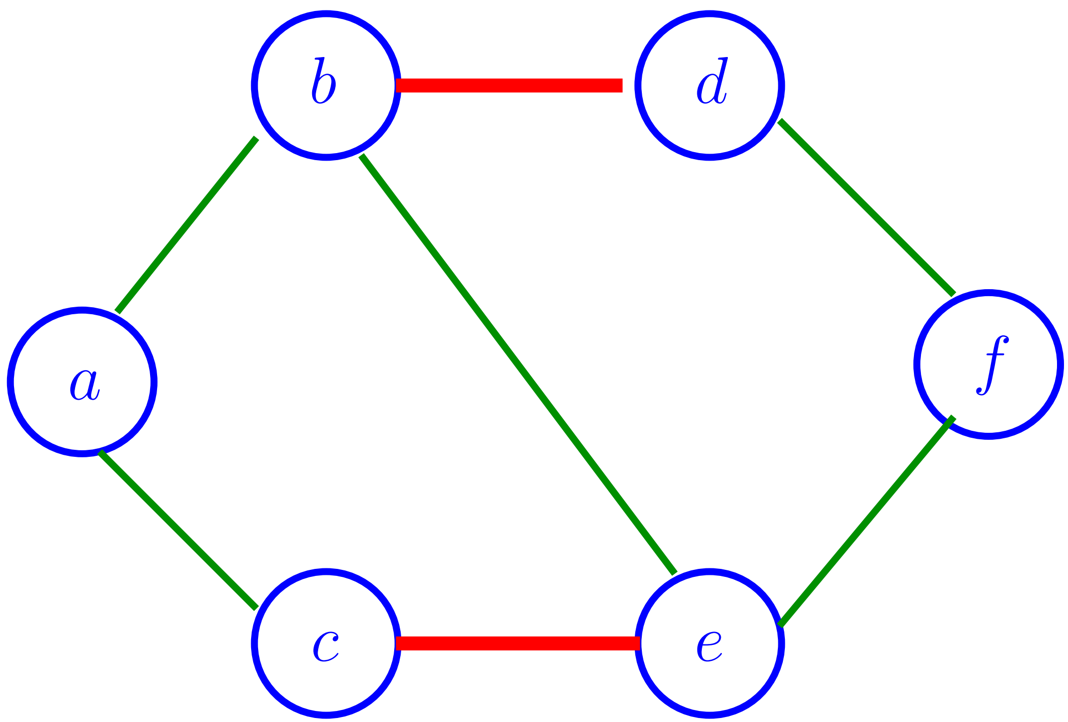
Melhores momentos

AULA 5

Emparelhamentos

Um emparelhamento em um grafo (não-orientado) é um conjunto de arestas que duas-a-duas não tem ponta em comum.

Exemplo: $\{b, d\}$ e $\{c, e\}$ formam um emparelhamento



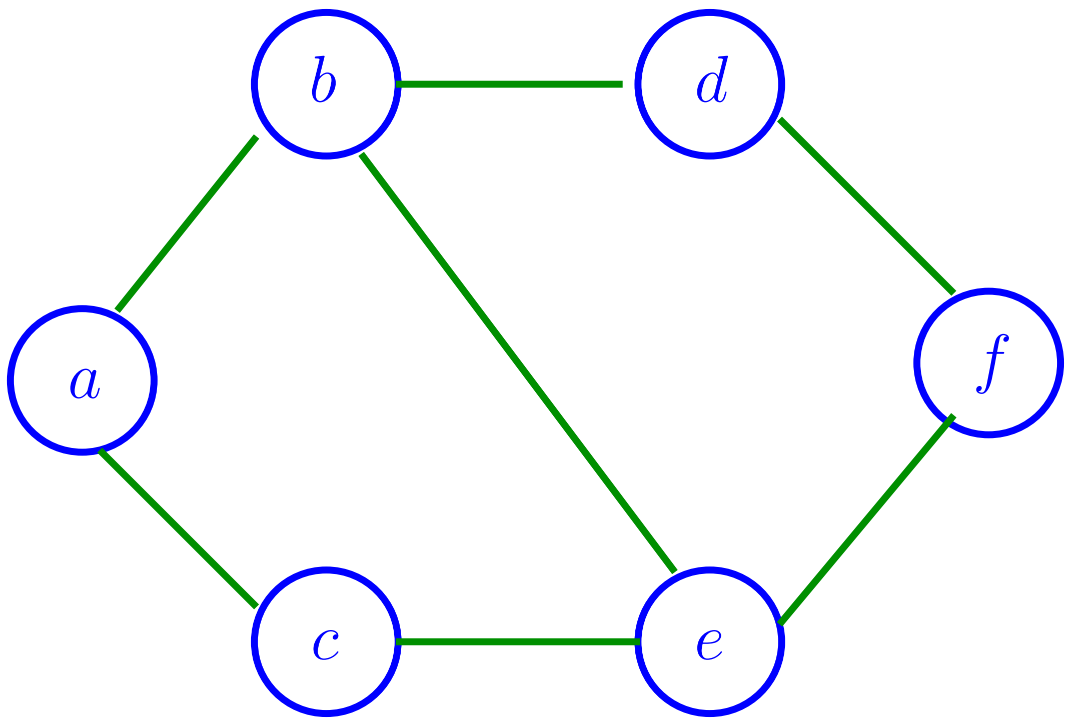
Emparelhamento máximo

Problema do emparelhamento máximo: Dado um grafo não-orientado (N, E) encontrar um emparelhamento máximo.

Emparelhamento máximo

Problema do emparelhamento máximo: Dado um grafo não-orientado (N, E) encontrar um emparelhamento máximo.

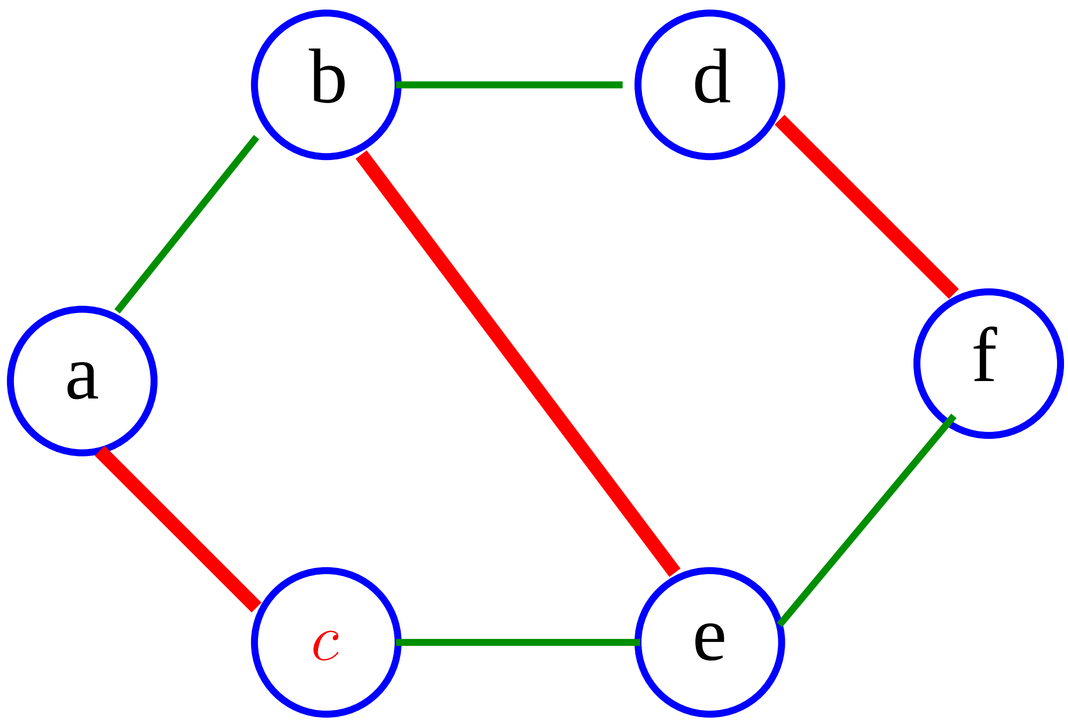
Entra:



Emparelhamento máximo

Problema do emparelhamento máximo: Dado um grafo não-orientado (N, E) encontrar um emparelhamento máximo.

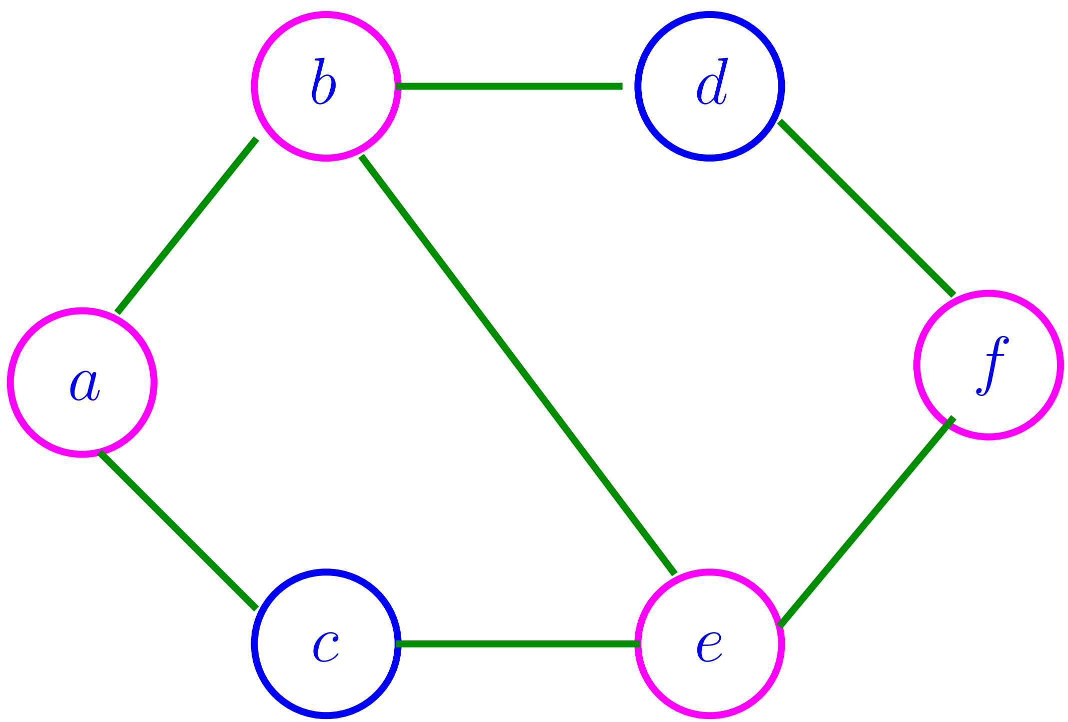
Sai:



Coberturas

Uma cobertura por nós de um grafo é qualquer conjunto de nós que contenha pelo menos uma das pontas de cada aresta.

Exemplo: $\{a, b, e, f\}$ formam uma cobertura

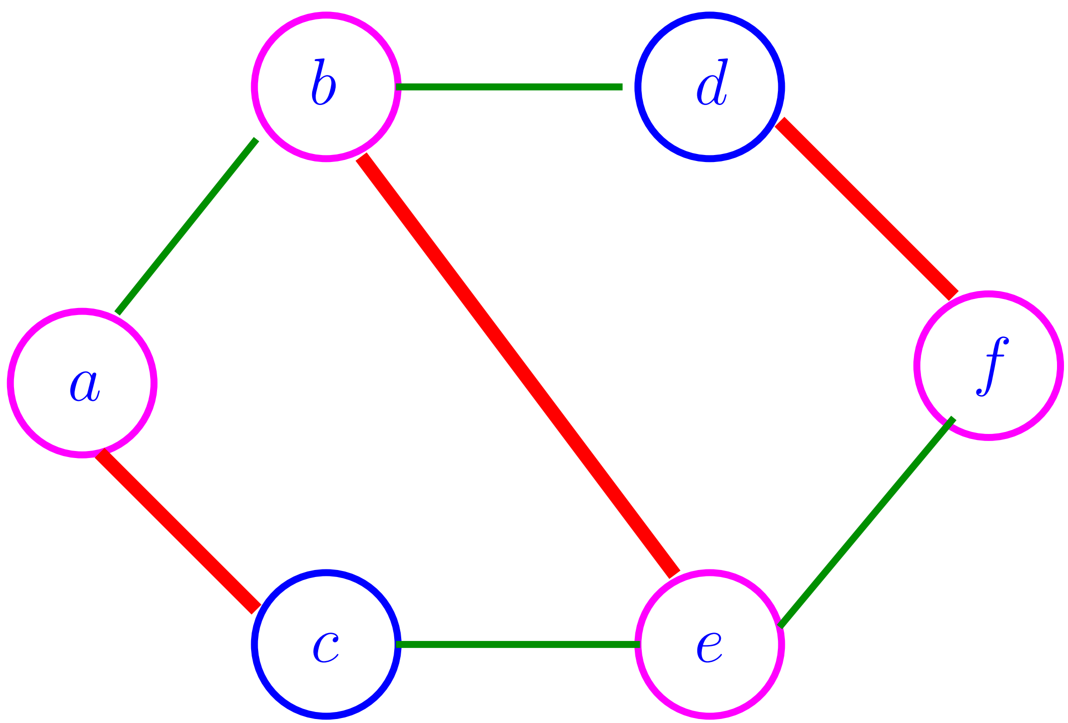


Lema da dualidade

Para todo emparelhamento M e toda cobertura K vale que

$$|M| \leq |K|$$

Exemplo:



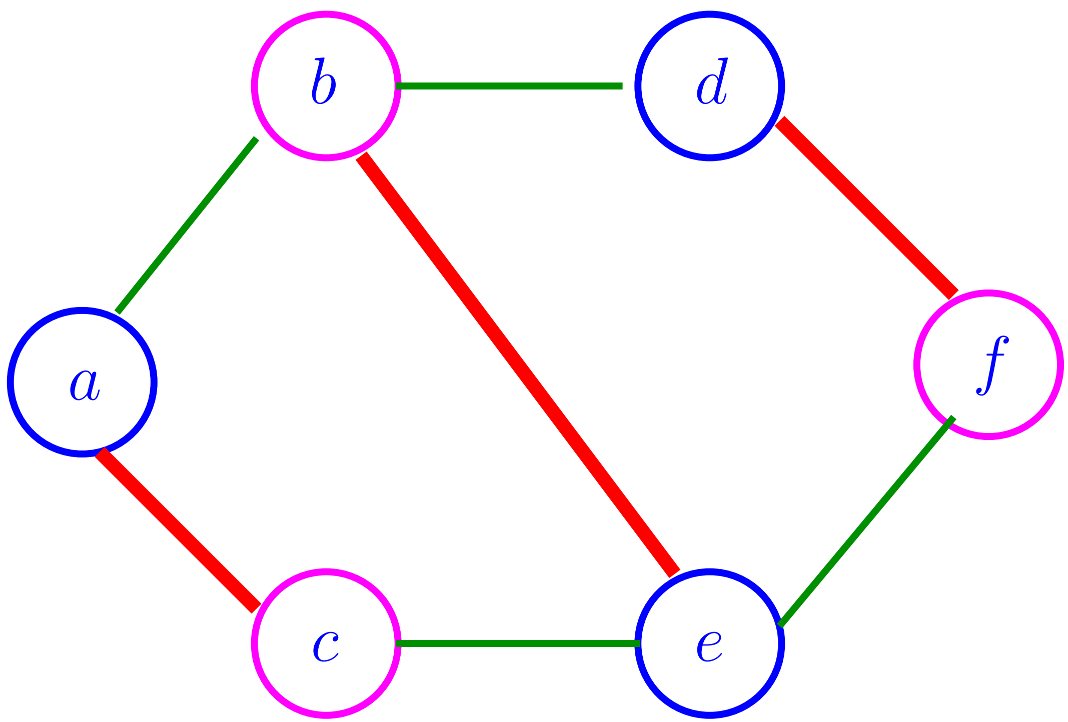
Conseqüência

Se M é um emparelhamento e K é uma cobertura por nós tais que

$$|M| = |K|$$

então M é um emparelhamento máximo e K é uma cobertura mínima.

Exemplo:



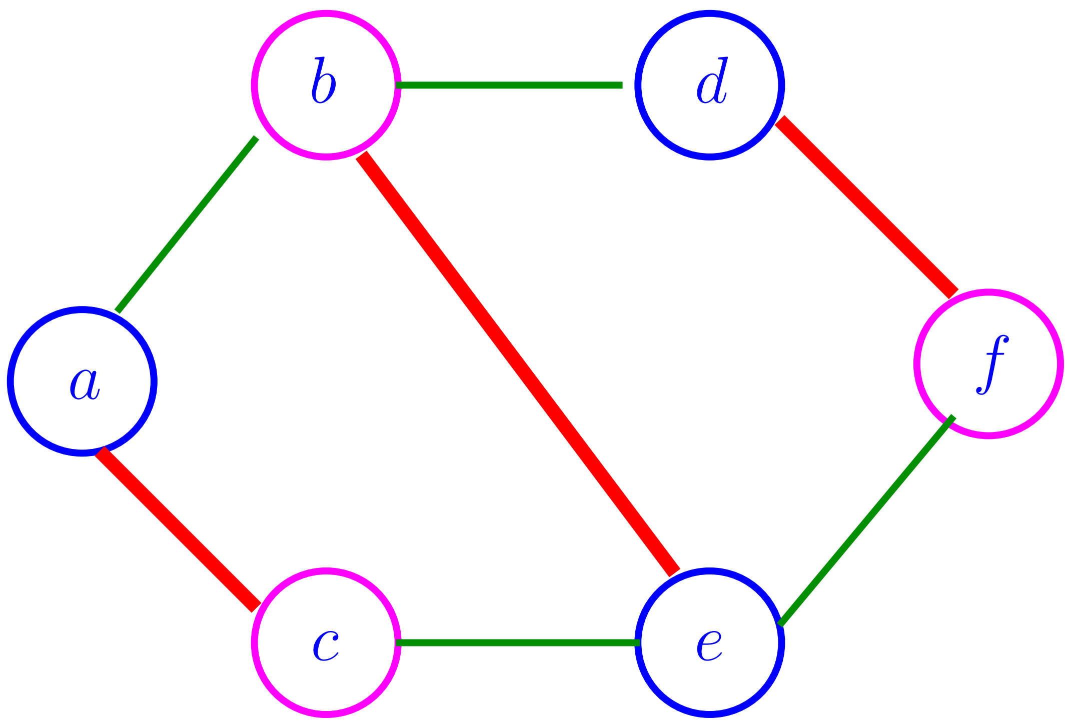
ν e τ

Seja $G = (N, E)$ um grafo e defina

$$\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ é um emparelhamento}\}$$

$$\tau(G) := \min\{|K| : K \text{ é uma cobertura}\}$$

Exemplo: $\nu(G) = 3 = \tau(G)$



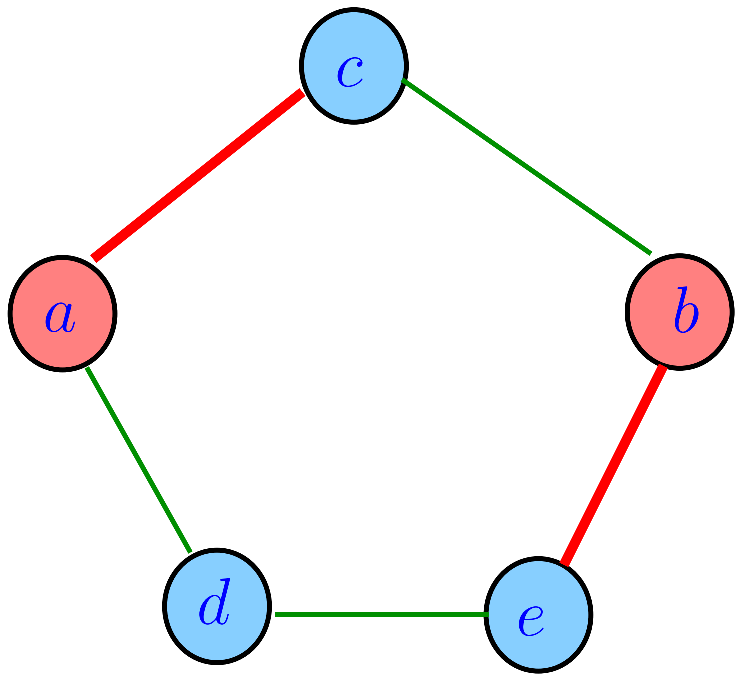
$\nu(G) = \tau(G)$?

Em geral, não é verdade que $\nu(G) = \tau(G)$.

$\nu(G) = \tau(G)$?

Em geral, não é verdade que $\nu(G) = \tau(G)$.

Exemplo: $\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$



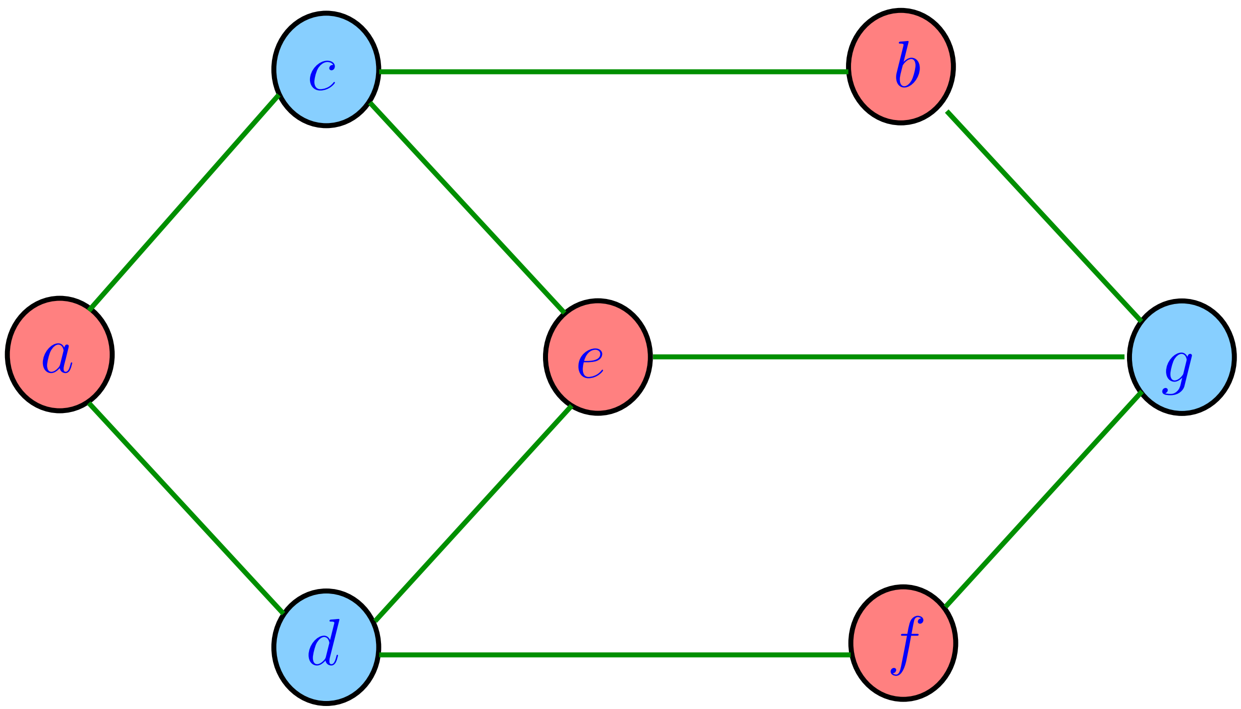
Grafos bipartidos

Um grafo (N, E) é biparticionável se existe uma partição U W de N tal que toda aresta tem uma ponta em U e a outra em W.

Grafos bipartidos

Um grafo (N, E) é biparticionável se existe uma partição U W de N tal que toda aresta tem uma ponta em U e a outra em W.

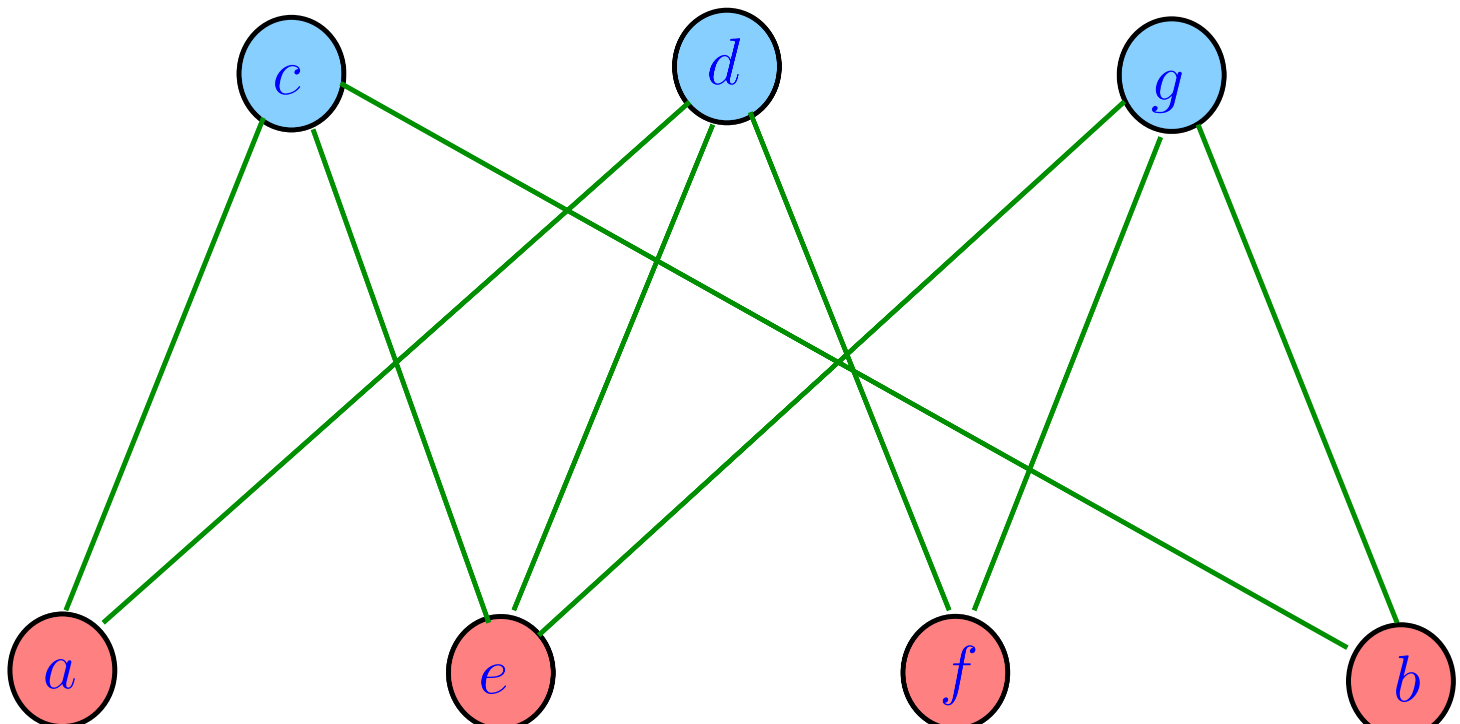
Exemplo:



Grafos bipartidos

Um grafo (N, E) é biparticionável se existe uma partição U W de N tal que toda aresta tem uma ponta em U e a outra em W.

Exemplo:



AULA 6

Kőnig, Hall e Frobenius

Teorema de Kőnig

Se $G = (N, E)$ é um grafo biparticionável, então

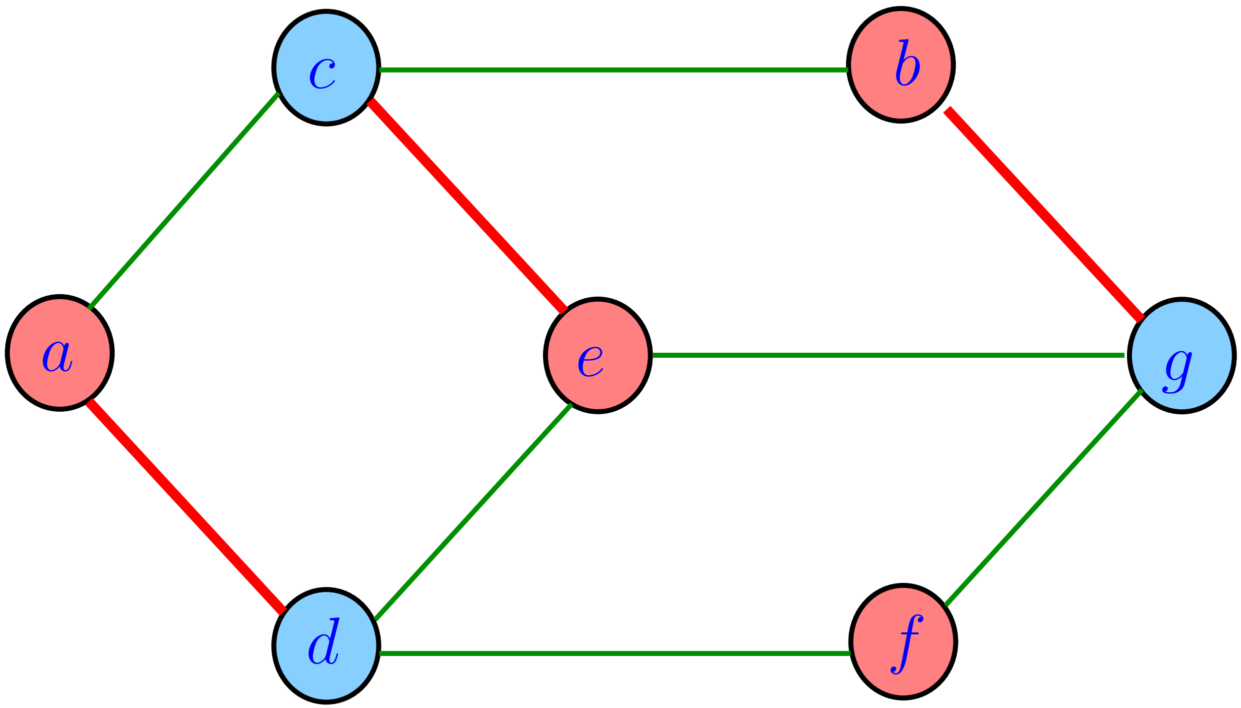
$$\nu(G) = \tau(G).$$

Teorema de Kőnig

Se $G = (N, E)$ é um grafo biparticionável, então

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Exemplo: $\nu(G) = 3 = \tau(G)$

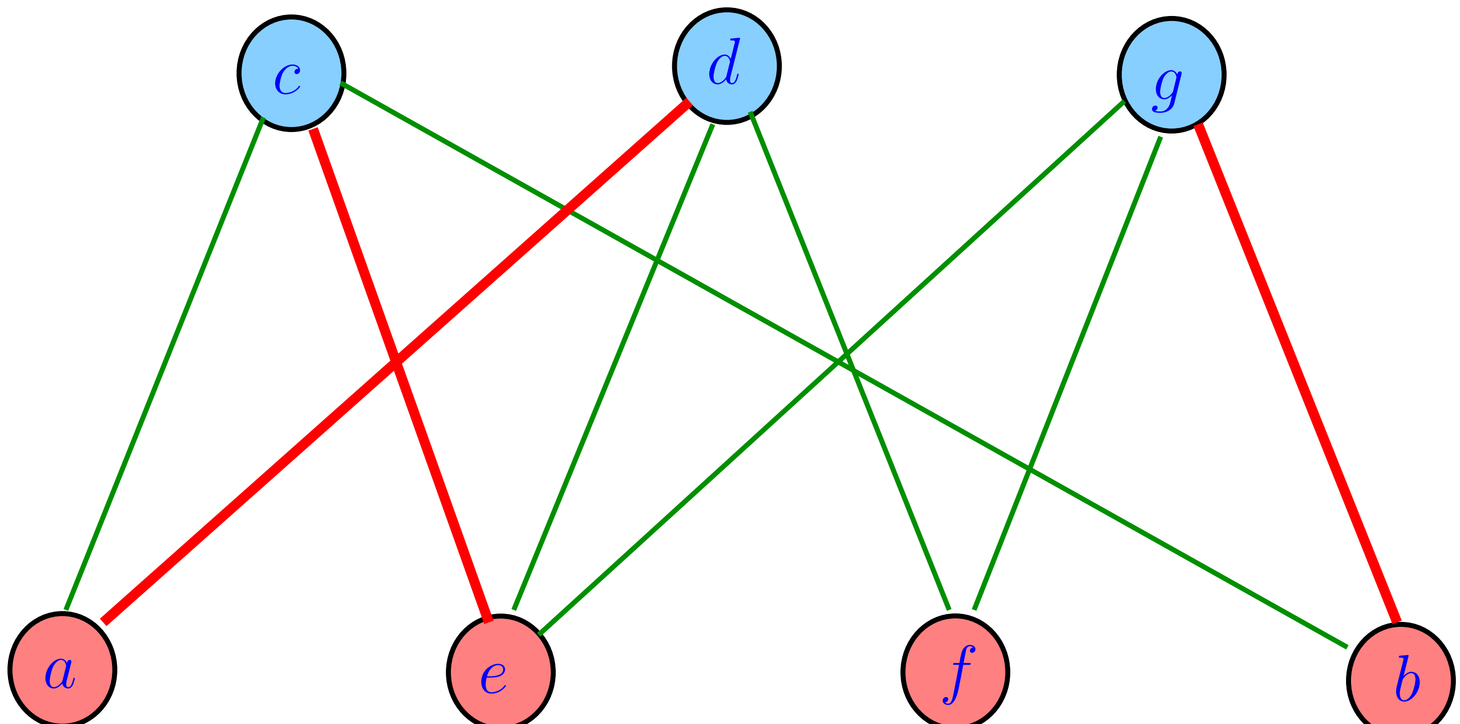


Teorema de Kőnig

Se $G = (N, E)$ é um grafo biparticionável, então

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Exemplo: $\nu(G) = 3 = \tau(G)$



Demonstração

É suficiente mostrarmos que $\nu(G) \geq \tau(G)$.

Seja G' um grafo minimal obtido a partir de G removendo arestas e mantendo $\tau(G)$ constante. Assim,

$$\tau(G' - uv) = \tau(G) - 1$$

para cada aresta uv de G'.

Provaremos que as arestas de G' formam um emparelhamento e portanto

$$\nu(G) \geq \nu(G') = \tau(G') = \tau(G).$$

Demonstração (2)

Suponha que G' possui arestas uv e wv.

Seja K_u uma cobertura mínima de $G - uv$.
Seja K_w uma cobertura mínima de $G - wv$.

Pela minimalidade de G' temos que

$$|K_u| = |K_w| = \tau(G) - 1.$$

É evidente que

- $u \notin K_u$ e $v \notin K_u$; e
- $w \notin K_w$ e $v \notin K_w$.

Demonstração (3)

Seja G'' o subgrafo de G' induzido pelos nós $\{v\} \cup (K_u \oplus K_w)$ onde $\oplus$ denota diferença simétrica.

Se $t := |K_u \cap K_w|$, então o nero de nós de G'' é

$$2(\tau(G) - 1 - t) + 1$$

Como G'' é bipartido, existe K'' cobertura de G'' tal que

$$\tau(G'') \leq |K''| \leq \tau(G) - 1 - t.$$

Temos que $K' := K'' \cup (K_u \cap K_w)$ é uma cobertura de G' com

$$|K''| + t \leq \tau(G) - 1 - t + t < \tau(G),$$

o que contradiz nossa definição de G'.

Teorema de Hall

Se $G = (N, E)$ é um grafo com bipartição (U, W), então G possui um emparelhamento que satura os nós em U se e somente se

$$|\Gamma(X)| \geq |X|$$

para toda subconjunto X de U, onde

$$\Gamma(X) := \{w : \text{existe } x \in X \text{ tal que } xw \text{ é aresta de } G\}.$$

Um emparelhamento satura um nó se existe uma aresta do emparelhamento que tem esse no como ponta.

Demonstração. A demonstração é por indução em $|U|$. Para $|U| = 0$ e $|U| = 1$ o resultado é imediato.

Demonstração (2)

Primero, suponha que para todo $X \subset U$ vale que

$$|\Gamma(X)| > |X|.$$

Seja uw uma aresta qualquer de G com u em U e seja $G' := G - \{u, v\}$. Para todo subconjunto X de $U - \{u\}$ vale que

$$|\Gamma_{G'}(X)| \geq |\Gamma_G(X)| - 1 > |X| - 1.$$

Logo, para todo subconjunto X de $U - \{u\}$ temos que

$$|\Gamma_{G'}(X)| \geq |X| \, .$$

Desta forma, pela nossa hipótese de indução, existe em G' um emparelhamento que satura $U - \{u\}$ que acrescido da aresta uw forma um emparelhamento de G que satura U.

Demonstração (3)

Suponha agora que exista $U' \subset U$ tal que

$$|\Gamma(U')| = |U|\,.$$

Defina

- G_1 como sendo o subgrafo de G induzido pelos nós em $U' \cup \Gamma(U')$;
- G_2 como sendo o subgrafo $G - (U' \cup \Gamma(U))$.

Verifique que G_1 e G_2 satisfazem a hipótese de indução. Logo, existem

- em G_1 um emparelhamento que satura U'; e
- em G_2 um emparelhamento que satura $U - U'$.

Portanto, G possui um emparelhamento que satura U.

Teorema de Frobenius

The Marriage Theorem. Um grafo com bipartição (U, W) possui um emparelhamento perfeito se e somente se

- $|U| = |W|$ e
- $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo subconjunto X de U.

Um emparelhamento é perfeito se todo nó é ponta de alguma aresta no emparelhamento.

Demonstração. Conseqüência do teorema de Hall.