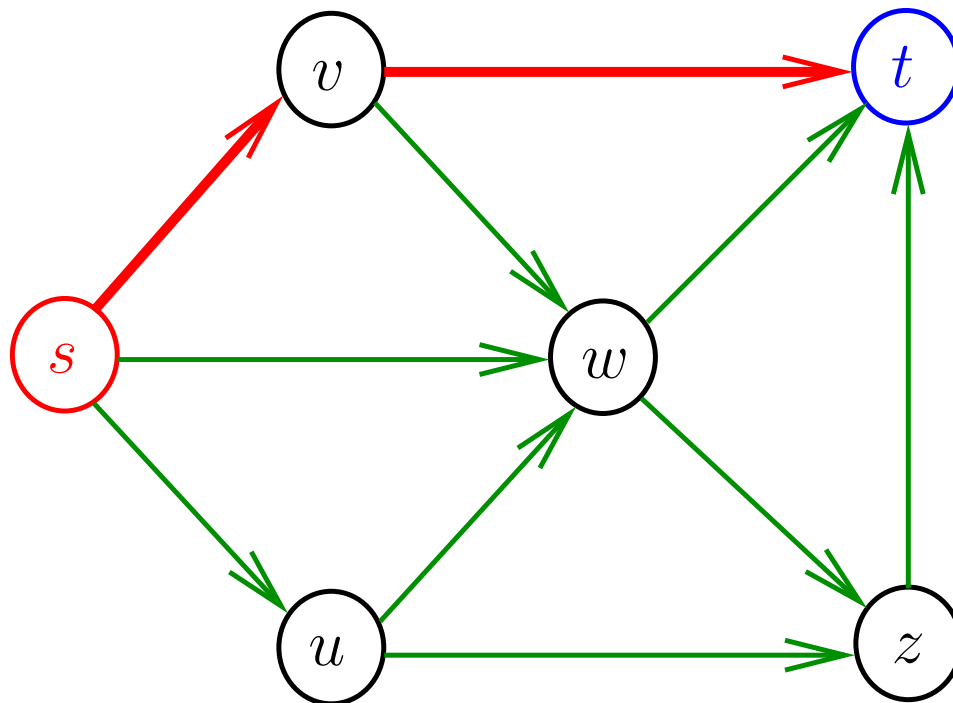


Melhores momentos

AULA 4

Problema

Problema do caminho mais curto: Dados nós s e t de um grafo (N, A) , **encontrar** um caminho de s a t que tenha comprimento mínimo.



1-potencial

Um 1-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

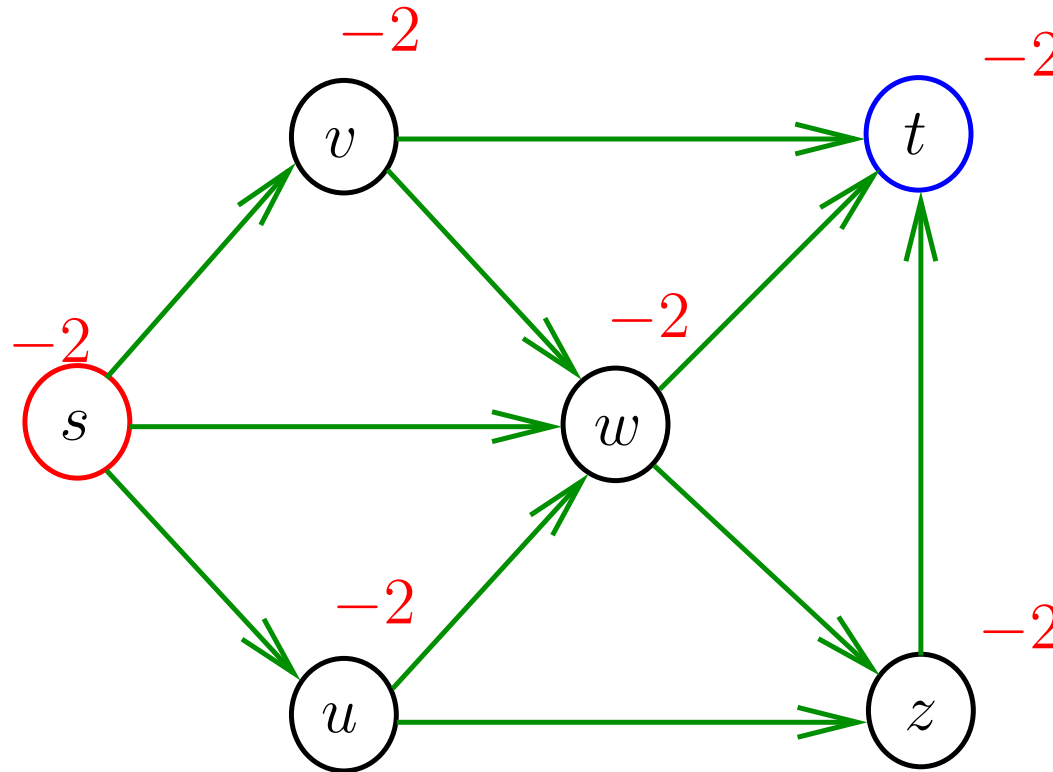
$$y(j) - y(i) \leq 1 \quad \text{para todo arco } ij.$$

1-potencial

Um **1-potencial** é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

$$y(j) - y(i) \leq 1 \quad \text{para todo arco } ij.$$

Exemplo 1: 1-potencial constante (sem graça...)

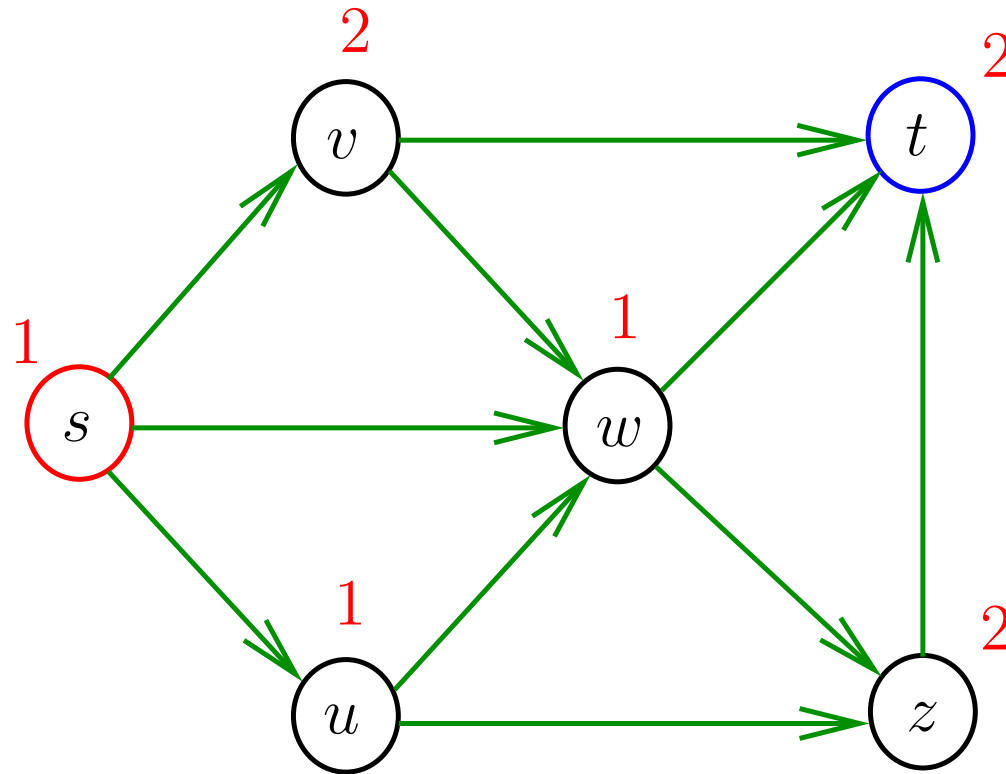


1-potencial

Um **1-potencial** é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

$$y(j) - y(i) \leq 1 \quad \text{para todo arco } ij.$$

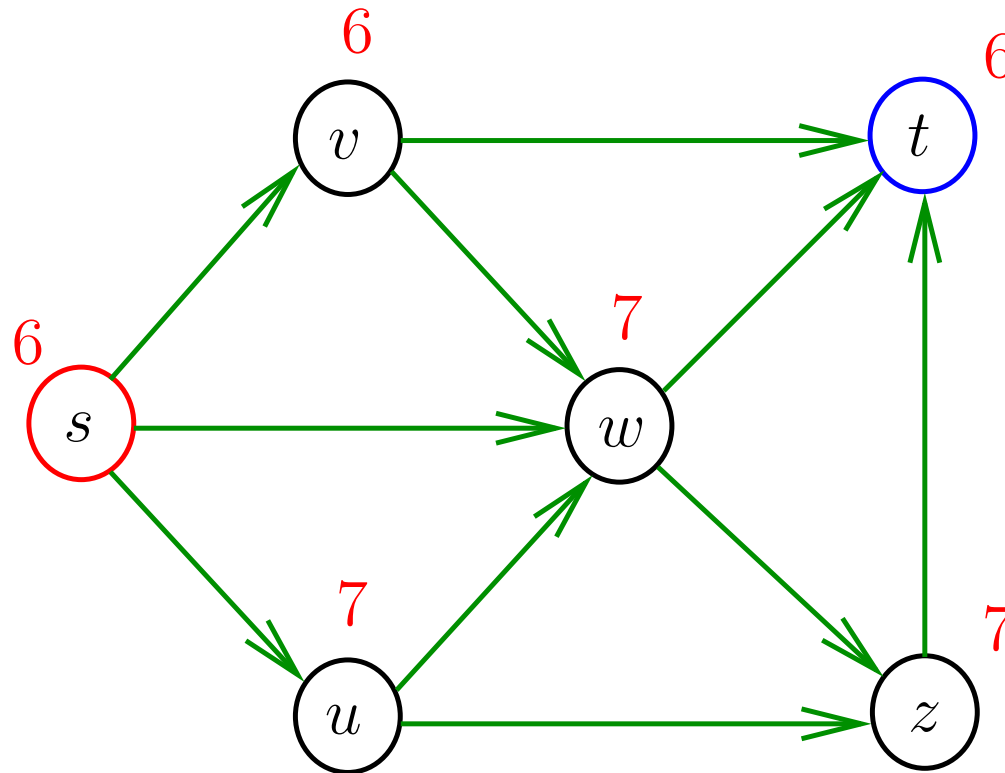
Exemplo 2: um 1-potencial menos “bobo”



Propriedade de 1-Potenciais

(Lema da dualidade.) Se P é um passeio de s a t e y é um 1-potencial então

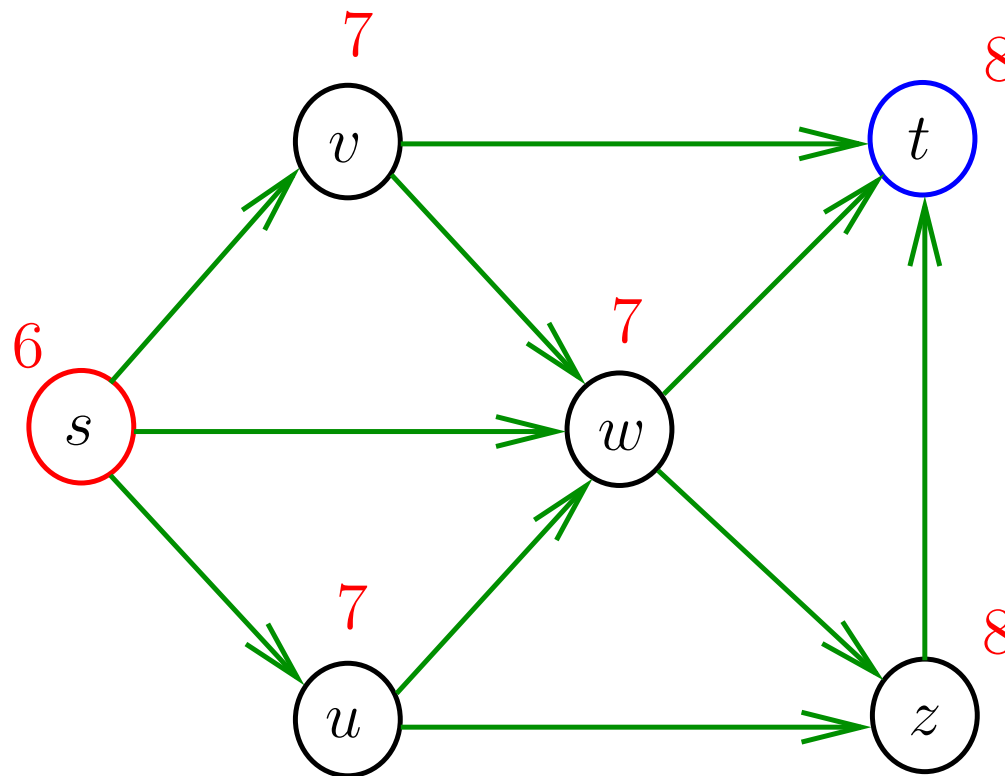
$$|P| \geq y(t) - y(s).$$



Propriedade de 1-Potenciais

Para mostrar que **não existe** um caminho de s a t de comprimento $< \lambda$ basta exibir um 1-potencial tal que

$$y(t) - y(s) \geq \lambda.$$



Algoritmo genérico

Recebe dois nós s e t de um grafo (N, A) e devolve um st -caminho P e um 1-potencial y tais que $|P| = y(t) - y(s)$.

CAMINHO-CURTO-GENÉRICO (N, A, s, t)

0 para cada i em N faça

1 $y(i) \leftarrow n$ $\triangleright n$ faz o papel de ∞

2 $\pi(i) \leftarrow \text{NIL}$

3 $y(s) \leftarrow 0$

4 enquanto $y(j) > y(i) + 1$ para algum $ij \in A$ faça

5 $y(j) \leftarrow y(i) + 1$

6 $\pi(j) \leftarrow i$

7 se $y(t) < n$

8 então devolva o st -caminho no grafo (N, A_π) e y

9 senão devolva “não há st -caminho” e y

Consumo de tempo (1)

O consumo de tempo do algoritmo
CAMINHO-CURTO-GENÉRICO é $O(n^2m)$.

Consumo de tempo (2)

O consumo de tempo do algoritmo
BUSCA-EM-LARGURA é $O(n + m)$.

Relação min-max

Da propriedade dos 1-potenciais (lema da dualidade) e da correção do algoritmo CAMINHO-CURTO-GENÉRICO concluimos o seguinte:

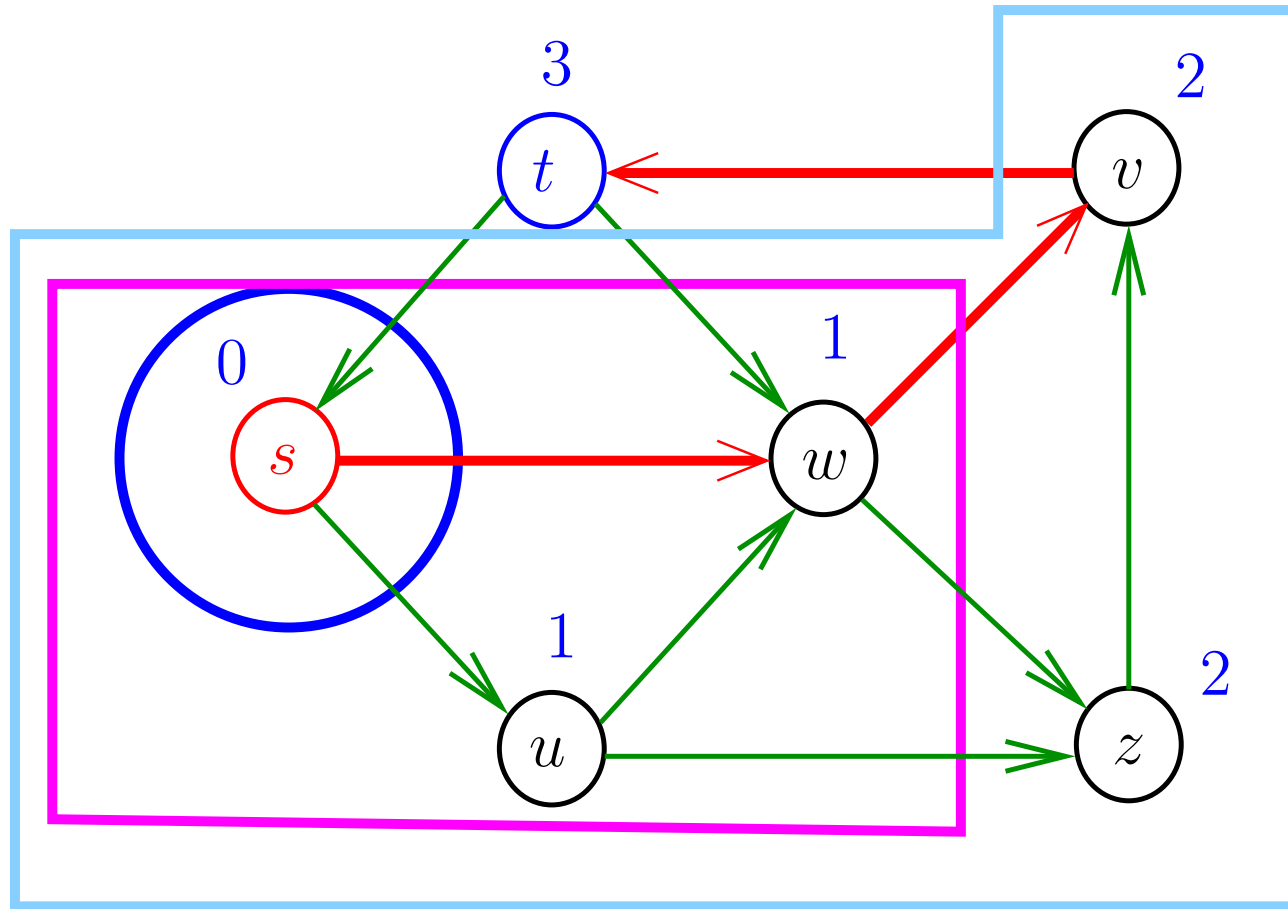
(Teorema dualidade) Se s e t são nós de um grafo (N, A) e t está ao alcance de s então

$$\begin{aligned} & \min\{|P| : P \text{ é um } st\text{-caminho}\} \\ &= \max\{y(t) - y(s) : y \text{ é um 1-potencial}\}. \end{aligned}$$

Outra relação min-max

Se s e t são nós de um grafo (N, A) e t está ao alcance de s então o menor comprimento de um st -caminho é igual ao número máximo de st -cortes disjuntos.

Exemplo



Rascunho de demonstração

É evidente que se

$$\nabla(S_0, T_0), \nabla(S_1, T_1), \dots, \nabla(S_k, T_k)$$

são $k + 1$ st -cortes disjuntos então todo st -caminho tem comprimento $\geq k + 1$.

Considere o 1-potencial y devolvido pelo algoritmo CAMINHO-CURTO-GENÉRICO e seja $k := y(t) - 1$.

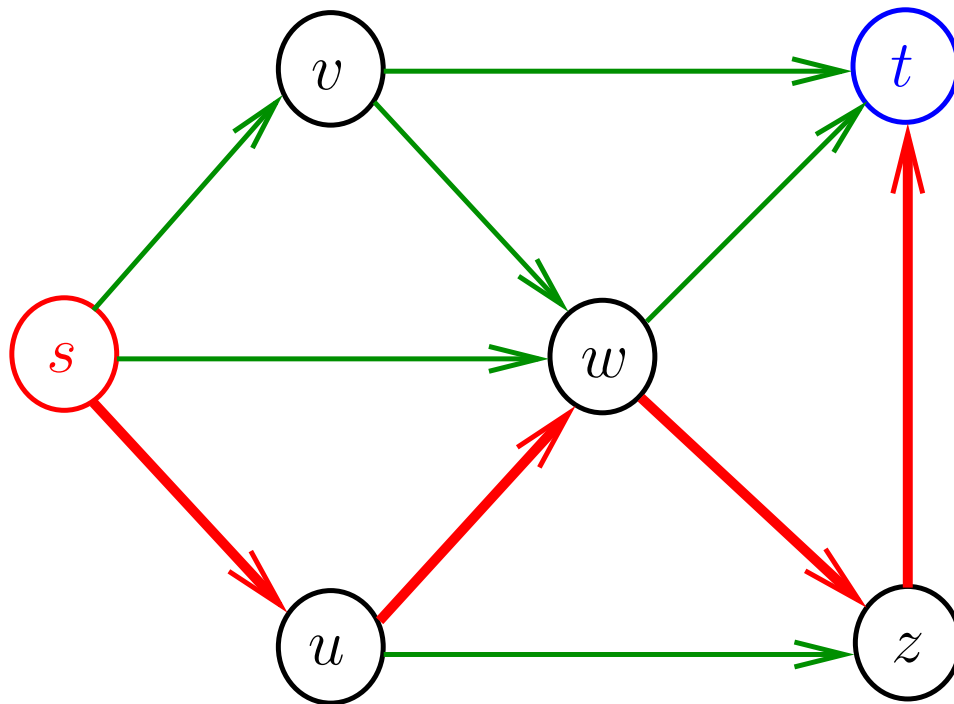
Defina para $d = 0, \dots, k$

$$S_d := \{u \in N : y(u) \leq d\} \quad \text{e} \quad T_d := N - S_d.$$

Verifique que $\nabla(S_0, T_0), \dots, \nabla(S_k, T_k)$ são $k + 1 = y(t)$ st -cortes disjuntos.

Grafo

Eis um grafo e um caminho de s a t .



Matrizes de incidências

Eis a matrizes de incidência M do grafo.

Onde está o caminho $\langle s, u, w, z, t \rangle$?

	sv	su	sw	uw	uz	vw	vt	wt	wz	zt	A
s	-1	-1	-1								
u		$+1$		-1	-1						
v	$+1$					-1	-1				
w			$+1$	$+1$		$+1$		-1	-1		
z					$+1$				$+1$	-1	
t							$+1$	$+1$		$+1$	

N

Matrizes de incidências

Rearranjei as linhas e colunas de M .

Que “cara” tem a “submatriz do caminho” $\langle s, u, w, z, t \rangle$?

	su	uw	wz	zt	sv	sw	uz	vw	vt	wt	A
s	-1				-1	-1					
u	$+1$	-1					-1				
w		$+1$	-1			$+1$		$+1$		-1	
z			$+1$	-1			$+1$				
t				$+1$					$+1$	$+1$	
v					$+1$			-1	-1		

N

Caminhos e submatrizes

Submatrizes associadas a **caminhos** têm estrutura semelhante da seguinte.

	su	uw	wz	zt	A'
s	-1				
u	$+1$	-1			
w		$+1$	-1		
z			$+1$	-1	
t				$+1$	

N'

Note que as colunas são **linearmente independentes**.

Conclusão

Da correção do algoritmo **BUSCA-GENÉRICO** temos o seguinte.

Para quaisquer matriz de incidências M e vetor de incidência b , vale uma e apenas uma das seguintes afirmações:

- existe um vetor x com elementos em $\{0, 1\}$ tal que $Mx = b$
- existe um vetor y tal que $yM \leq 0$ e $yb > 0$.

Nos algoritmos **BUSCA-GENÉRICO** e **BUSCA** o vetor x é representado pela função-predecessor π .

Soma de subconjuntos (*subset-sum*)

Problema: Dados inteiros não-negativos $a_1, a_2, \dots, a_n, b$,
encontrar uma solução de

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i .

Exemplo:

$$100x_1 + 30x_2 + 90x_3 + 35x_4 + 40x_5 + 30x_6 + 10x_7 = 160$$

tem uma solução 0-1?

Sim! $x_1 = x_2 = x_6 = 1$ e $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$ é solução.

Este problema é **NP-difícil**.

Existe algoritmo “**pseudo-polinomial**” (prog. dinâmica).

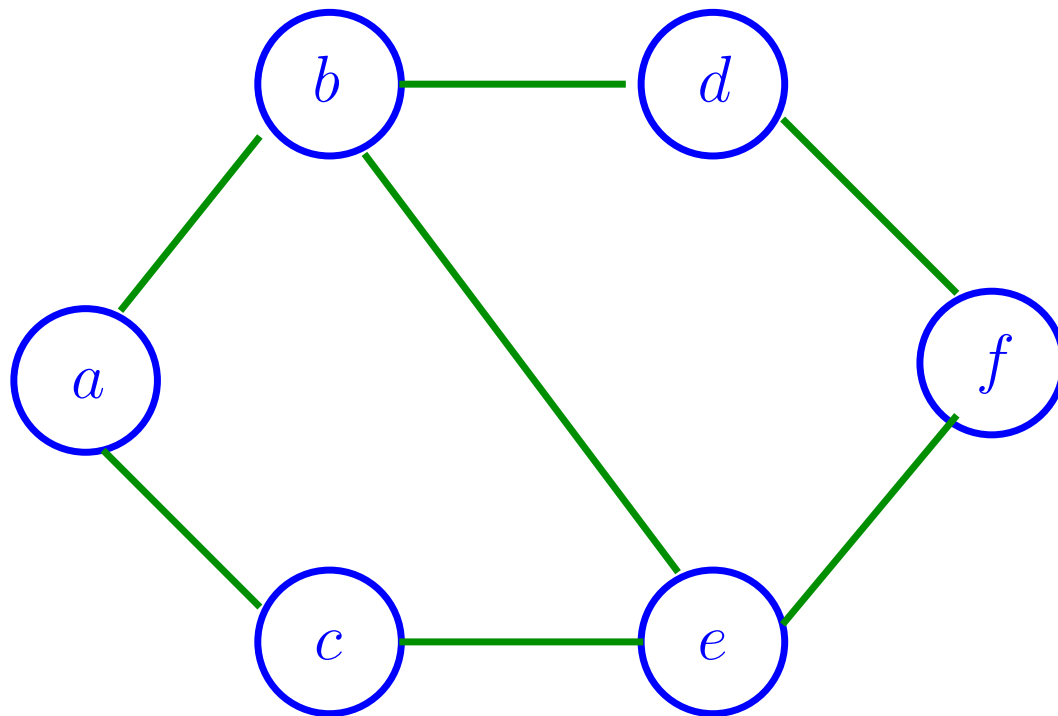
AULA 5

Grafos não-orientados

Grafos não-orientados

Um **grafo não-orientado** é um par (N, E) em que N é um conjunto finito e E é um conjunto de pares **não-ordenados** de elementos de N .

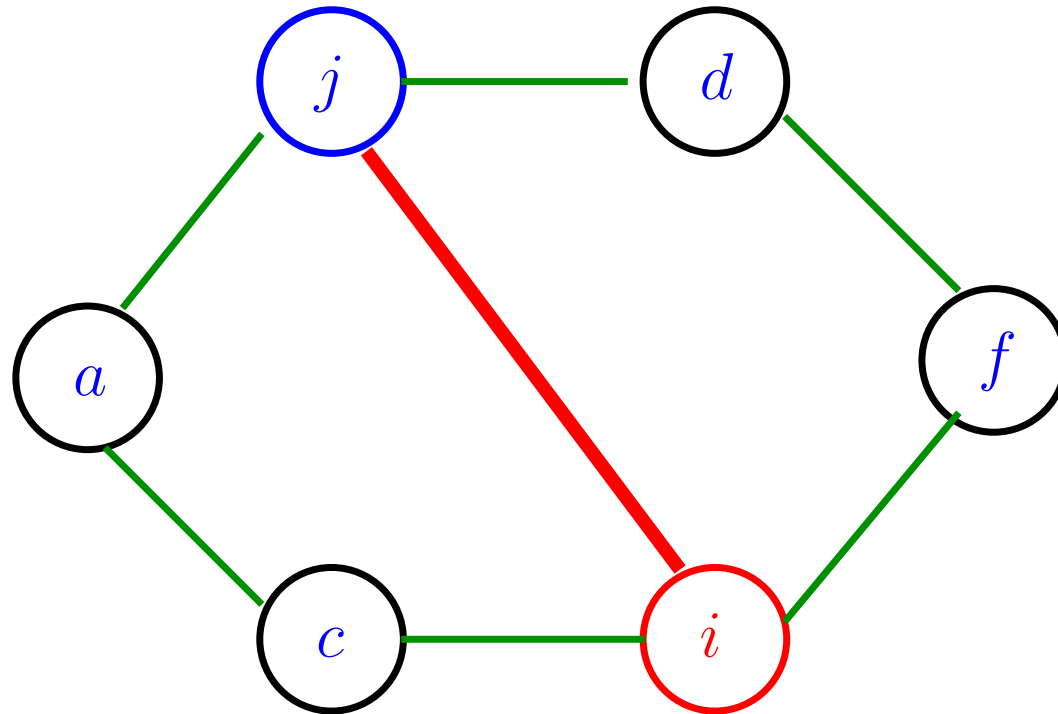
Exemplo:



Nós e arestas

Os elementos de N são chamados **nós** e os elementos de E são chamados **arestas**.

Exemplo: i e j são nós e $\{i, j\}$ é uma aresta.

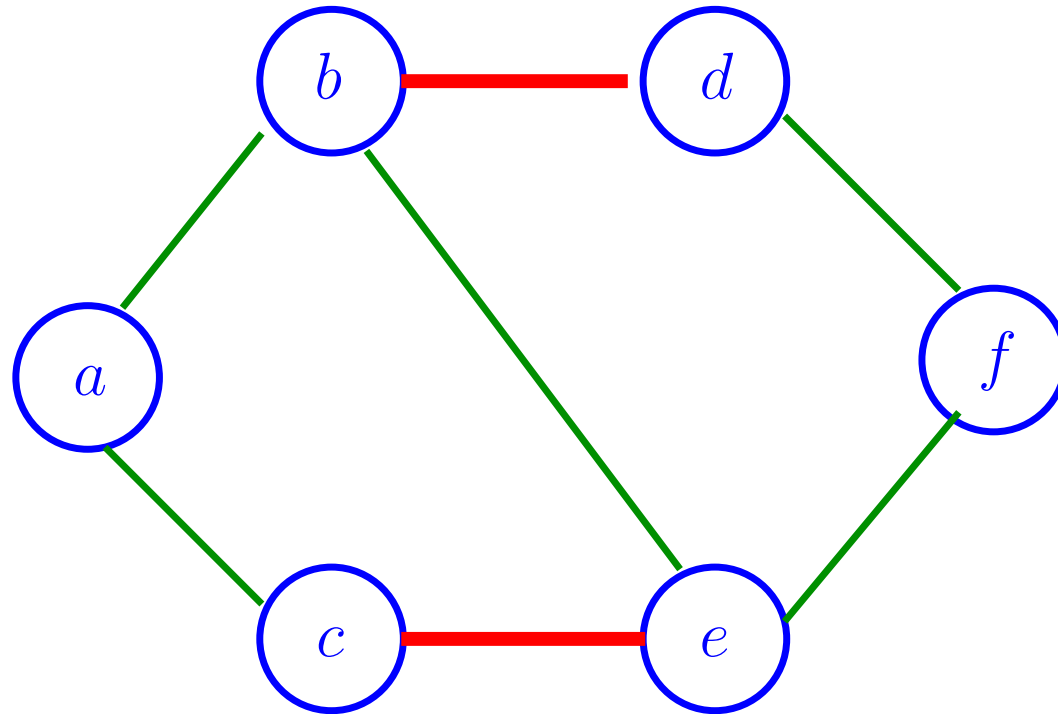


Emparelhamentos

Emparelhamentos

Um **emparelhamento** em um grafo (não-orientado) é um conjunto de arestas que duas-a-duas não tem ponta em comum.

Exemplo: $\{b, d\}$ e $\{c, e\}$ formam um emparelhamento



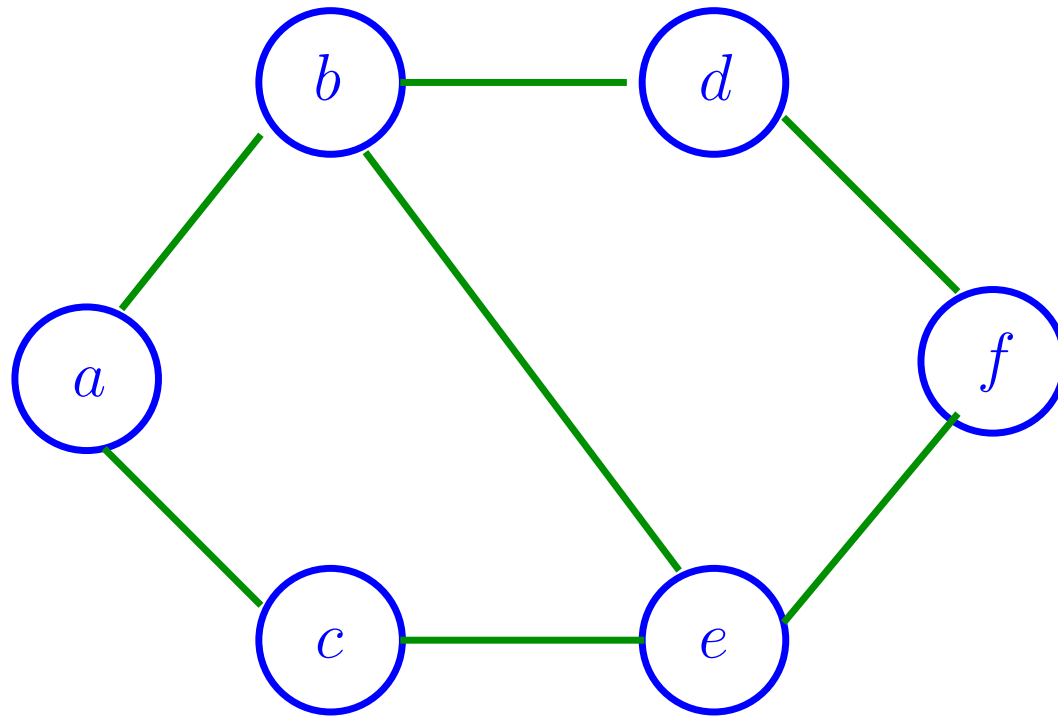
Emparelhamento máximo

Problema do emparelhamento máximo: Dado um grafo não-orientado (N, E) encontrar um emparelhamento máximo.

Emparelhamento máximo

Problema do emparelhamento máximo: Dado um grafo não-orientado (N, E) encontrar um emparelhamento máximo.

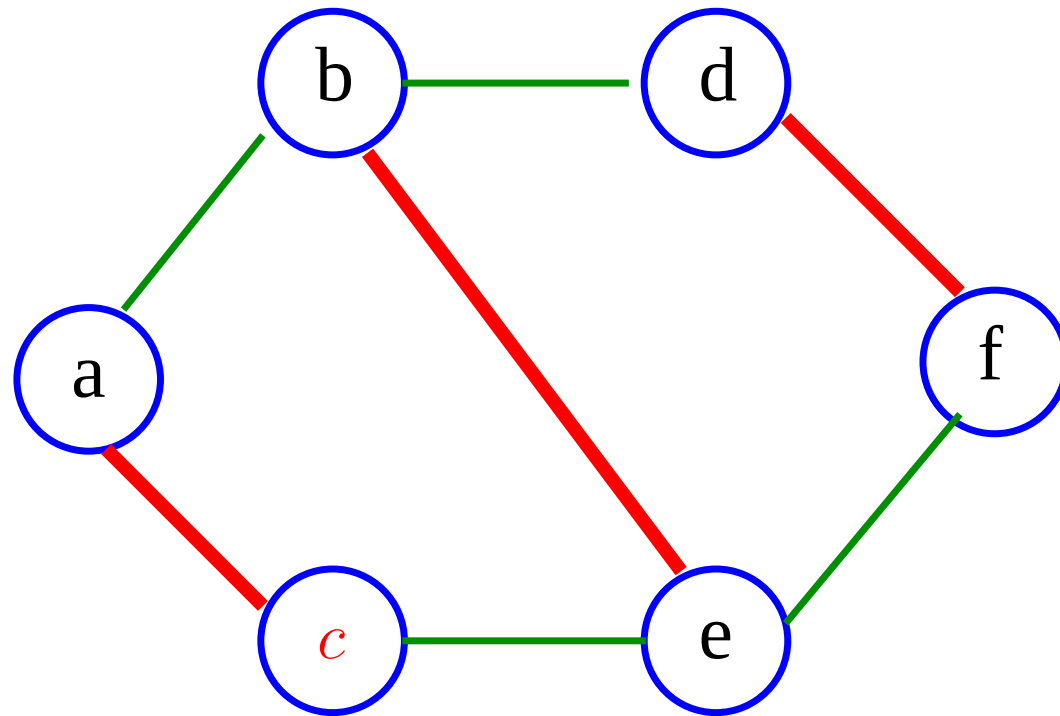
Entra:



Emparelhamento máximo

Problema do emparelhamento máximo: Dado um grafo não-orientado (N, E) encontrar um emparelhamento máximo.

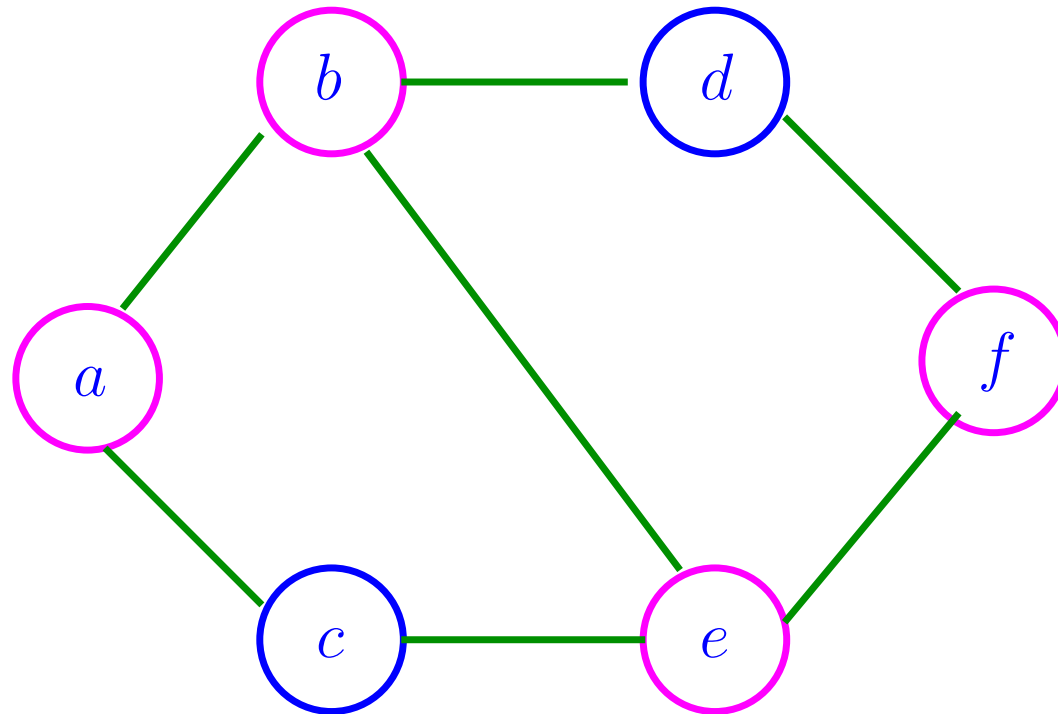
Sai:



Coberturas

Uma **cobertura por vértices** de um grafo é qualquer conjunto de nós que contenha pelo menos uma das pontas de cada aresta.

Exemplo: $\{a, b, e, f\}$ formam uma cobertura

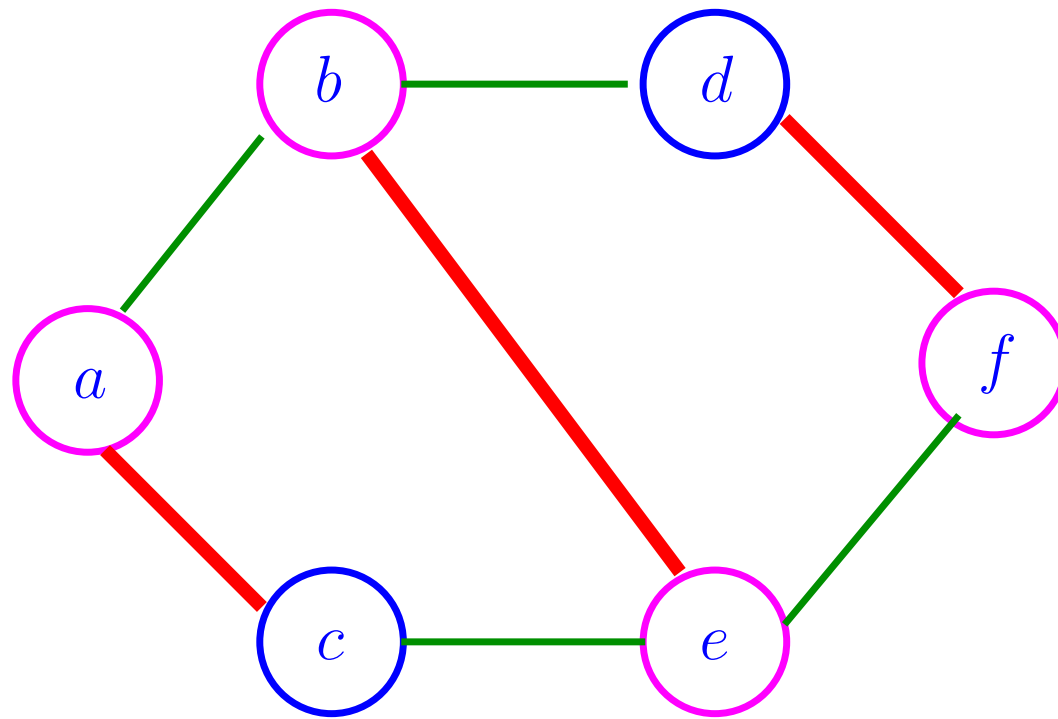


Lema da dualidade

Para todo emparelhamento M e toda cobertura K vale que

$$|M| \leq |K|$$

Exemplo:



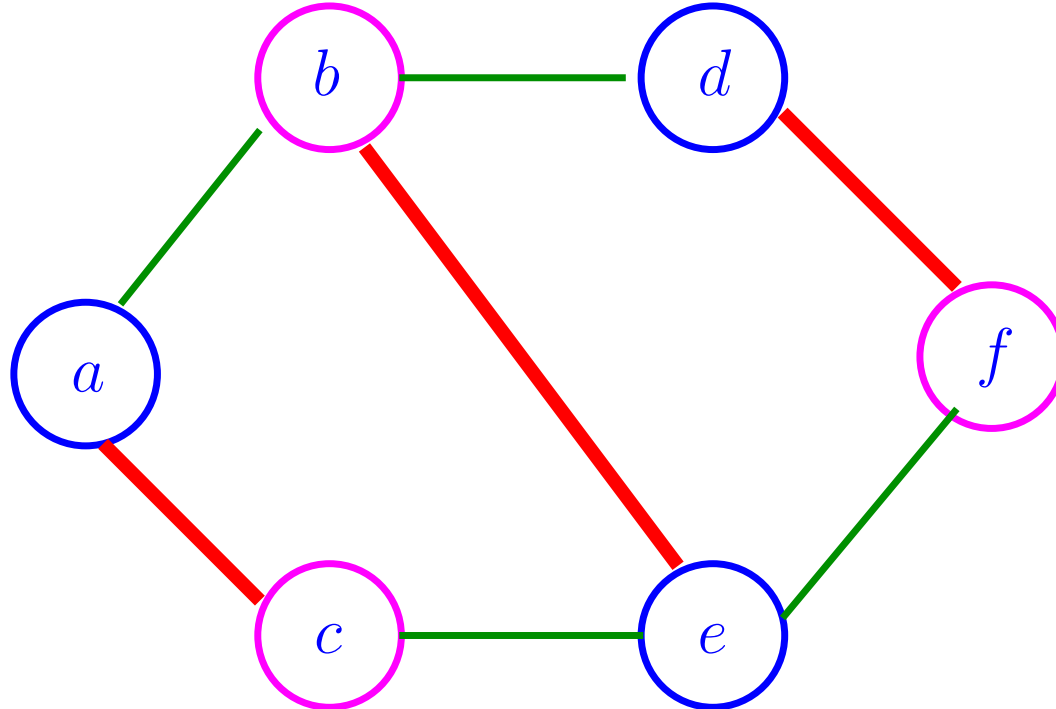
Consequência

Se M é um emparelhamento e K é uma cobertura por vértices tais que

$$|M| = |K|$$

então M é um emparelhamento máximo e K é uma cobertura mínima.

Exemplo:



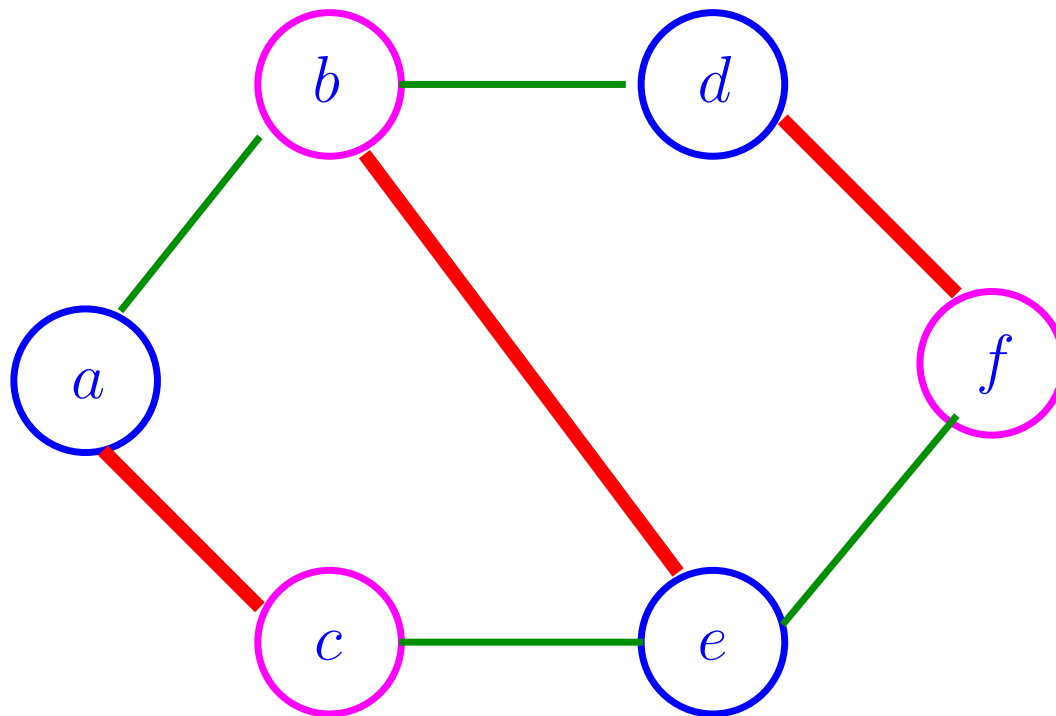
$$\nu \text{ e } \tau$$

Seja $G = (N, E)$ um grafo e defina

$$\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ é um emparelhamento}\}$$

$$\tau(G) := \min\{|K| : K \text{ é uma cobertura}\}$$

Exemplo: $\nu(G) = 3 = \tau(G)$



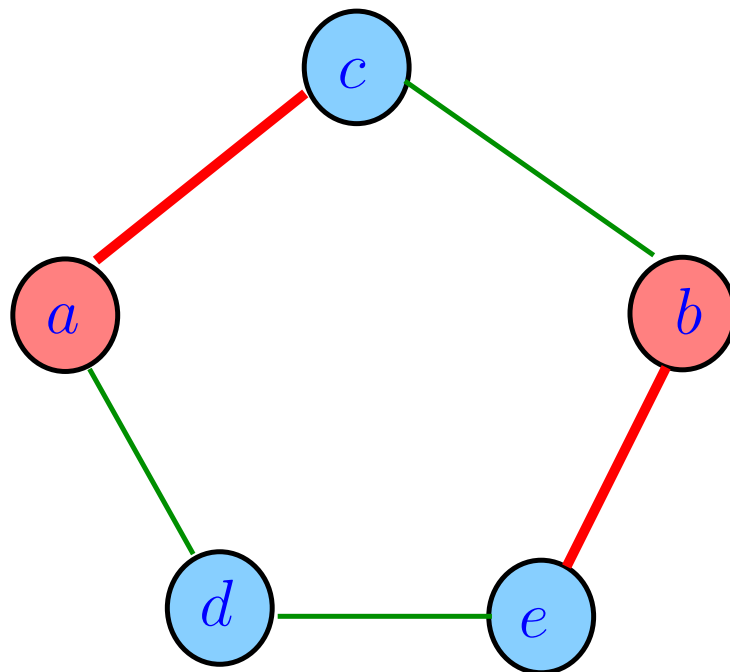
$$\nu(G) = \tau(G)?$$

Em geral, **não** é verdade que $\nu(G) = \tau(G)$.

$$\nu(G) = \tau(G)?$$

Em geral, **não** é verdade que $\nu(G) = \tau(G)$.

Exemplo: $\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$



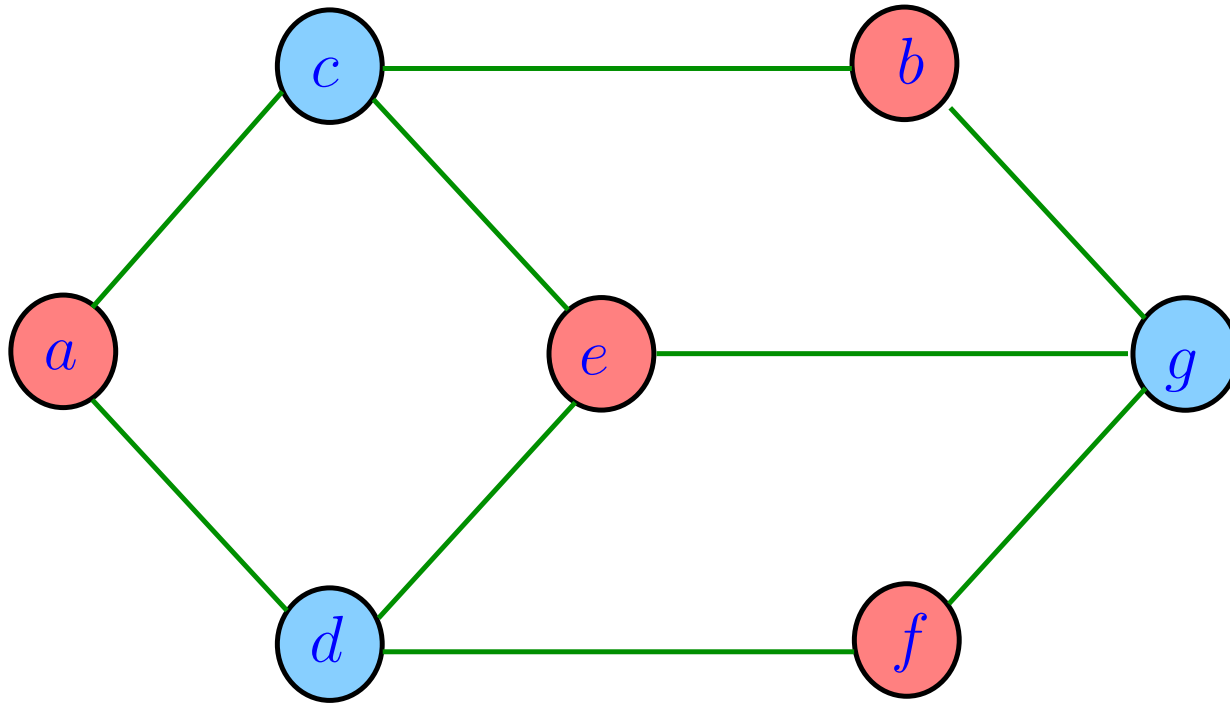
Grafos bipartidos

Um grafo (N, E) é **biparticionável** se existe uma partição U W de N tal que toda aresta tem uma ponta em U e a outra em W .

Grafos bipartidos

Um grafo (N, E) é **biparticionável** se existe uma partição U W de N tal que toda aresta tem uma ponta em U e a outra em W .

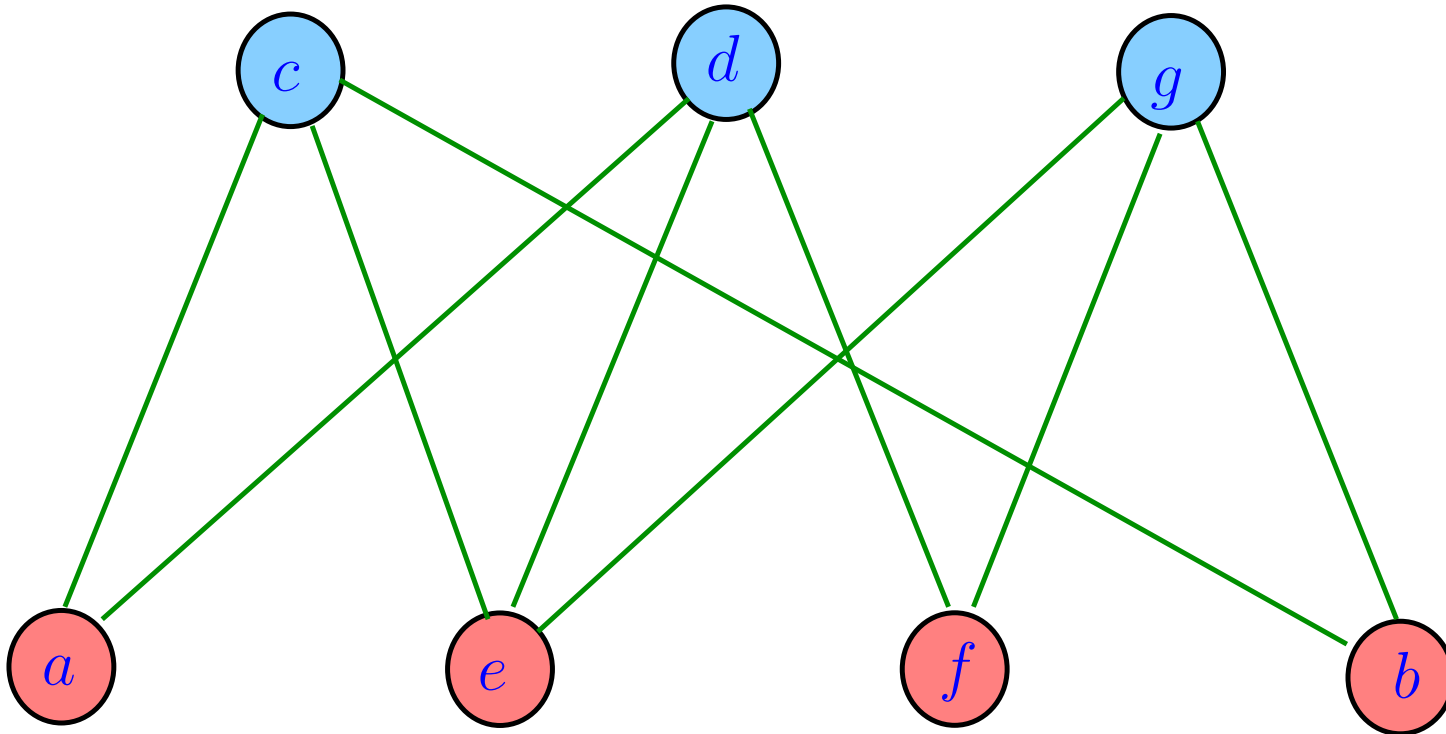
Exemplo:



Grafos bipartidos

Um grafo (N, E) é **biparticionável** se existe uma partição U W de N tal que toda aresta tem uma ponta em U e a outra em W .

Exemplo:



Teorema de König

Se $G = (N, E)$ é um grafo biparticionável, então

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Exemplo: $\nu(G) = 3 = \tau(G)$

