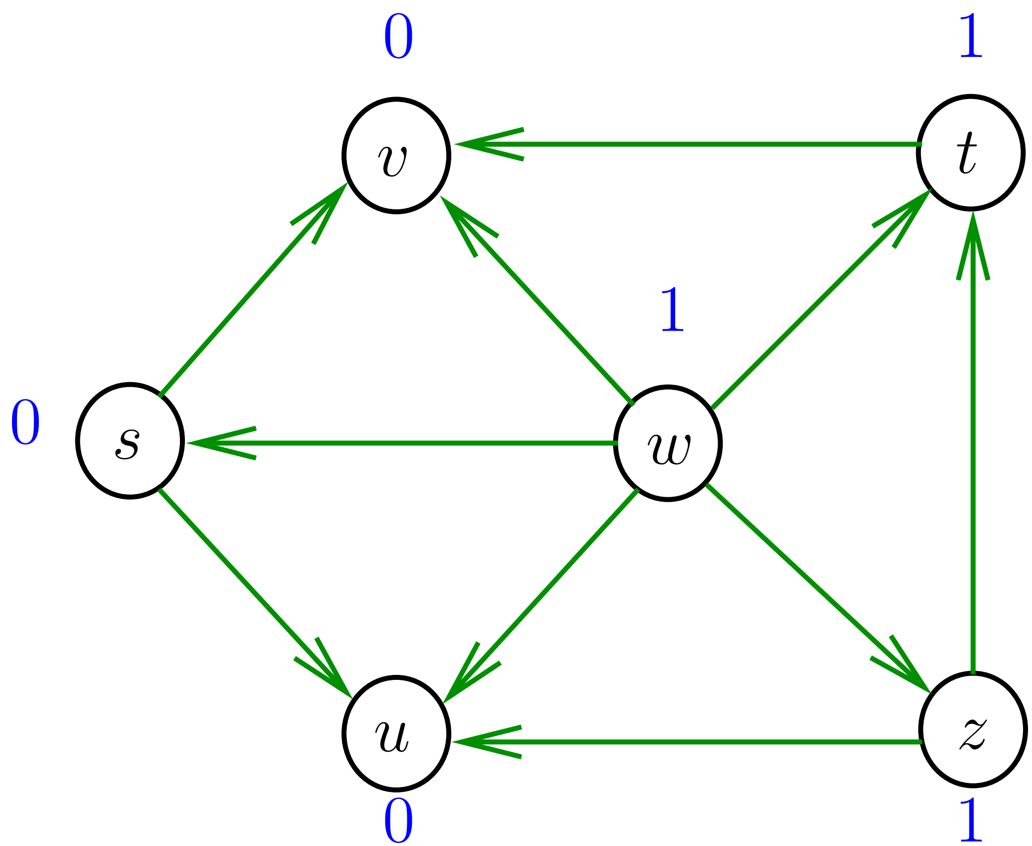
Melhores momentos

AULA 3

0-potenciais

Um 0-potencial é qualquer função y de N em $\{0, 1\}$ ($\mathbb{Z}$) tal que

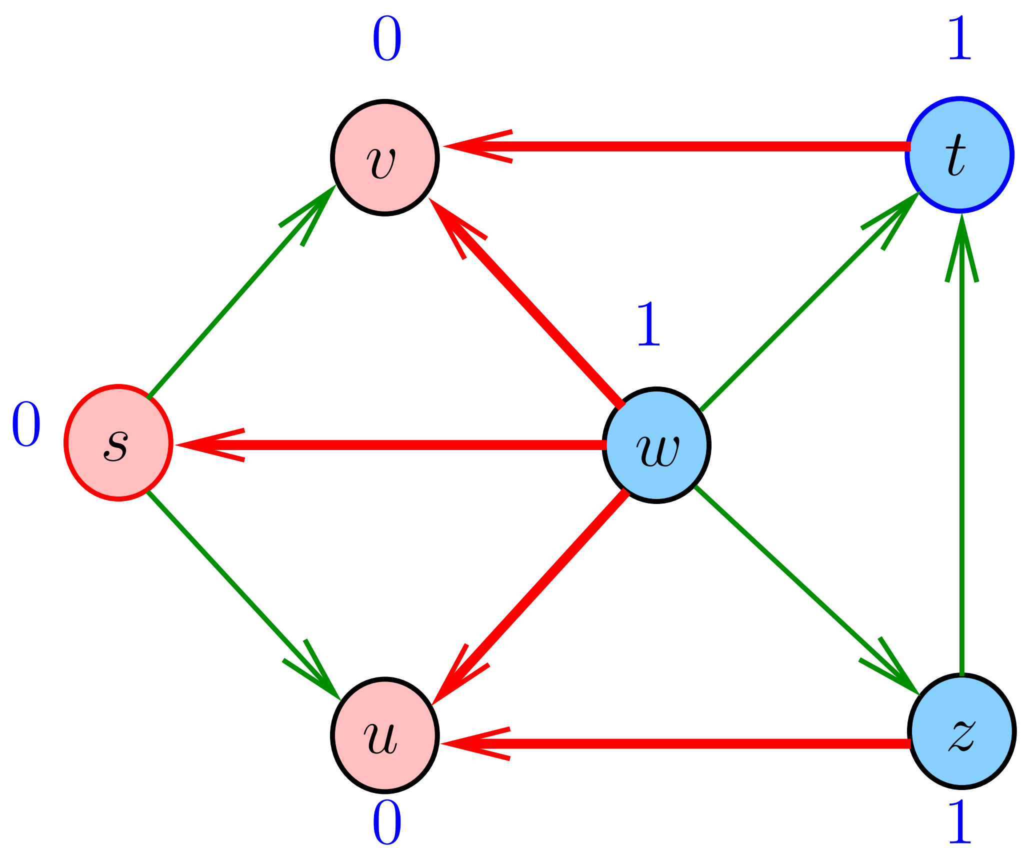
$$y(j) - y(i) \leq 0 \quad \text{para todo arco } ij.$$



Propriedade de 0-potenciais

Se y é um 0-potencial e existe um passeio de s a t então

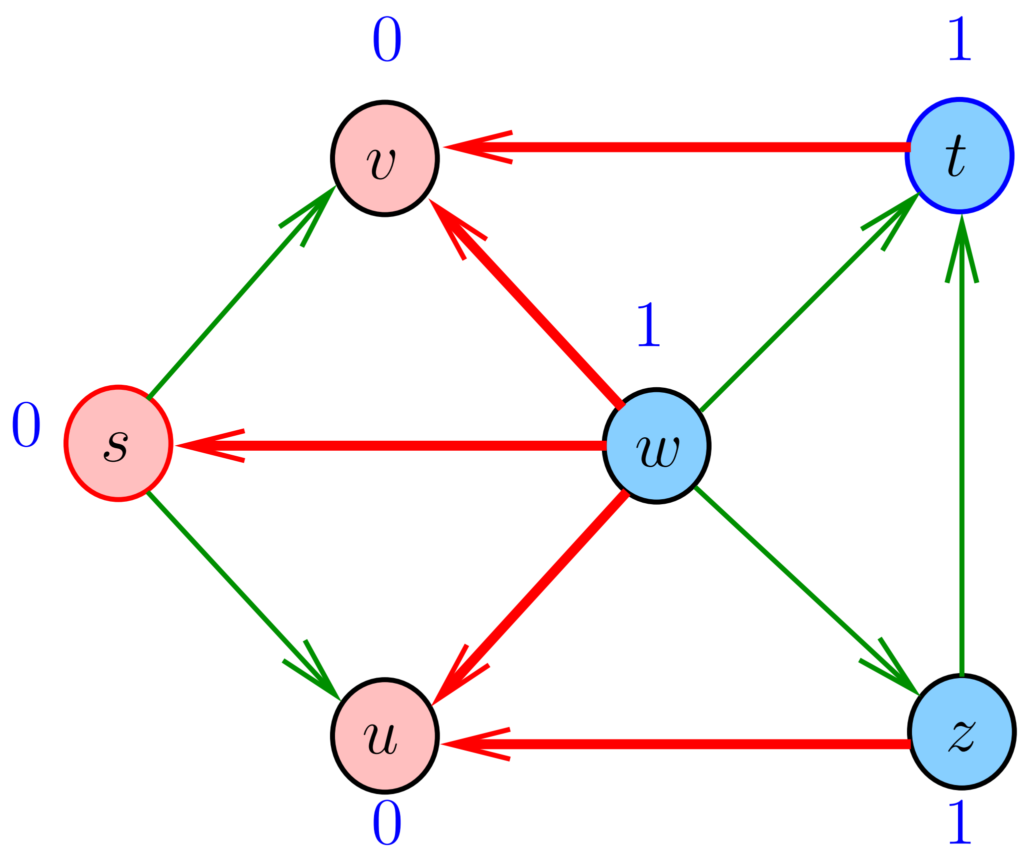
$$y(t) - y(s) \leq 0.$$



Condição de inexistência de caminho

Para mostrar que não existe um caminho de s a t basta exibir um 0-potencial tal que

$$y(t) - y(s) > 0.$$



Busca genérico

Recebe dois nós s e t de um grafo (N, A) e **devolve** um caminho de s a t ou um 0-potencial y tal que $y(t) - y(s) > 0$.

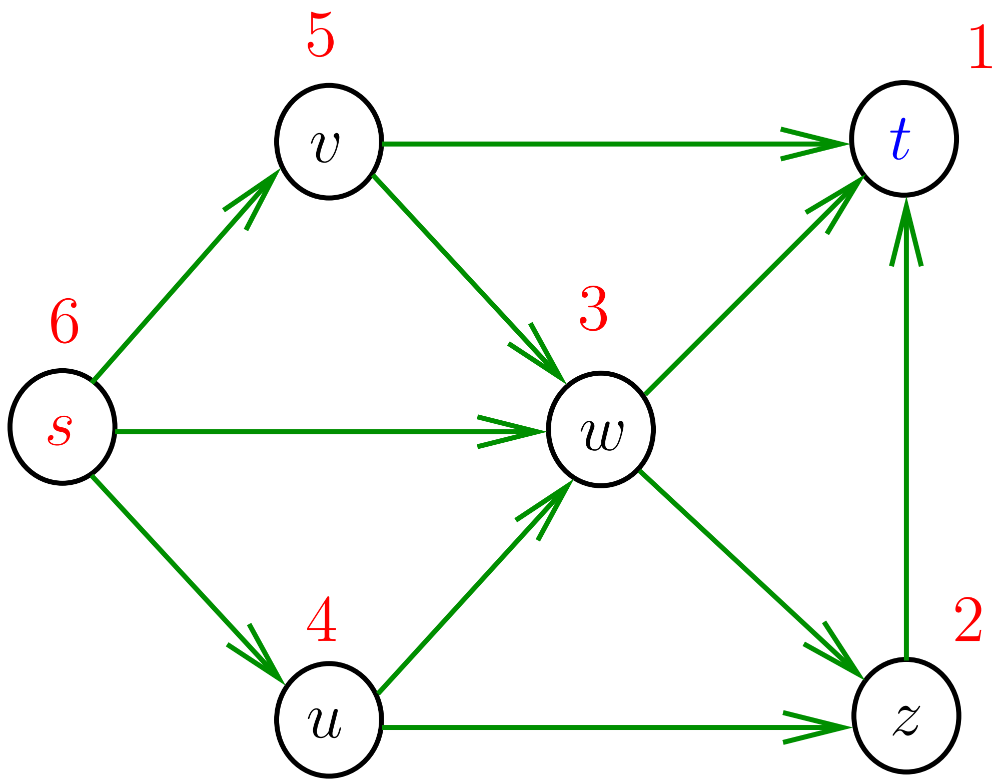
BUSCA-GENÉRICO (N, A, s, t)

```
para cada i em N faça
        y(i) ← 1
        π(i) ← NIL
y(s) ← 0

enquanto y(j) > y(i) para algum ij ∈ A faça
        y(j) ← y(i)
        π(j) ← i

se y(t) = 0
        então devolva o st-caminho no grafo (N, A_π)
        senão devolva y
```

-1-potenciais

Um -1-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

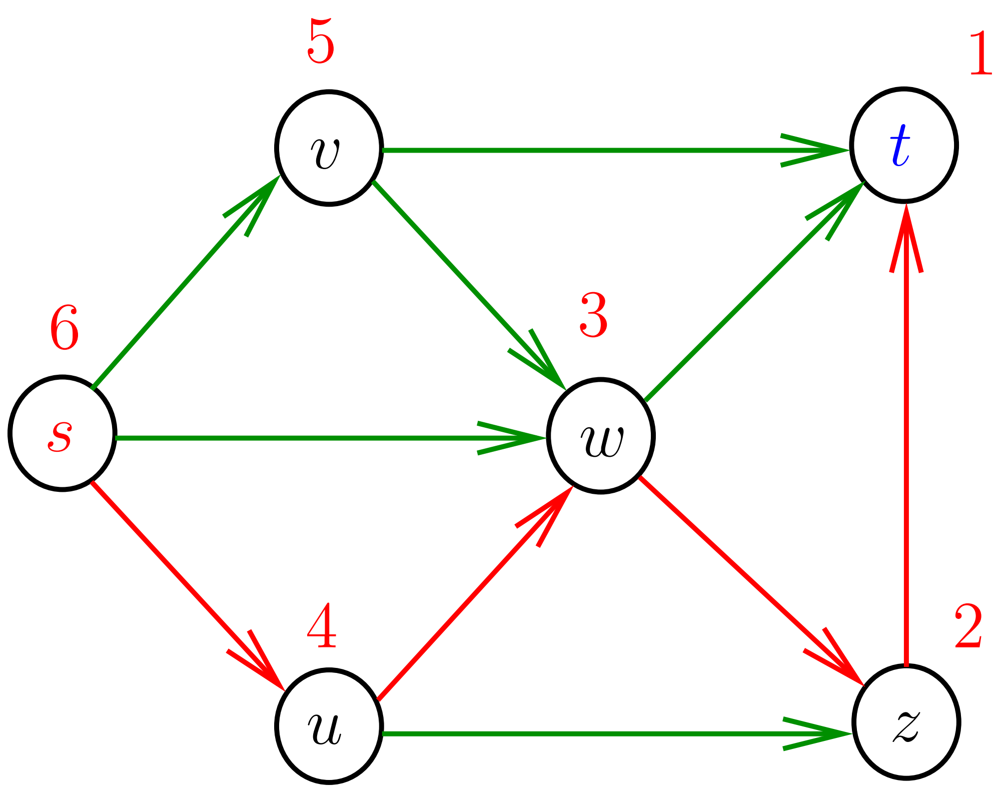
$$y(j) - y(i) \leq -1 \quad \text{para todo arco } ij.$$



Propriedade de -1-potenciais

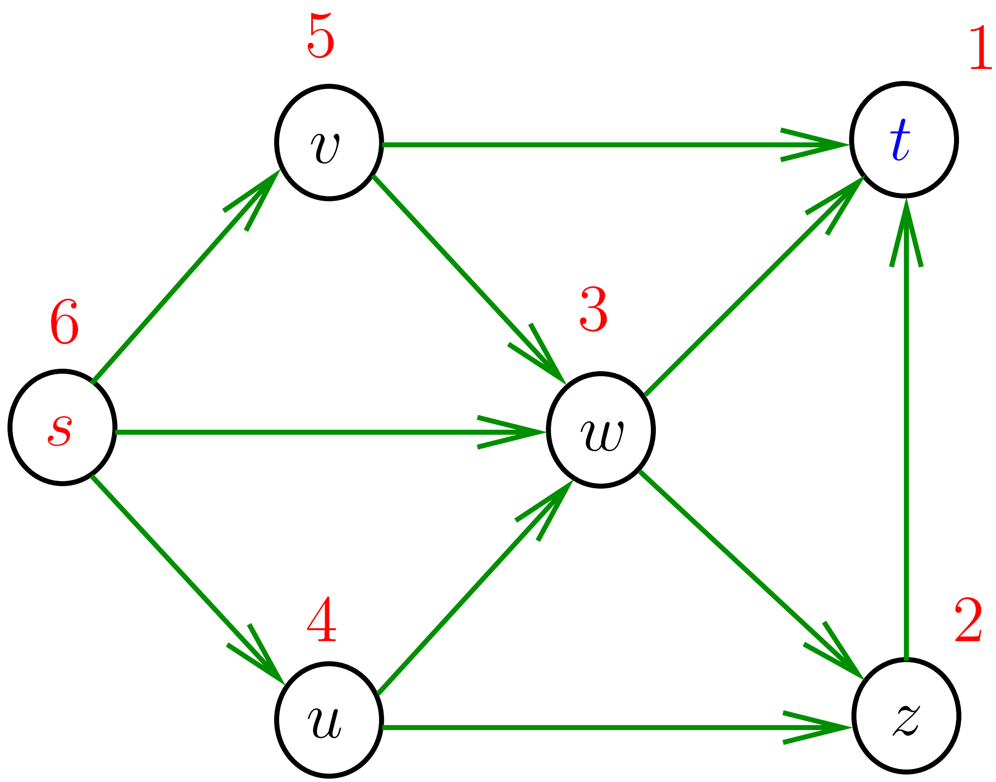
Se y é um -1-potencial e P é passeio de s a t então

$$y(t) - y(s) \leq -|P|.$$



Condição de inexistência de ciclo

Para mostrar que não existe um ciclo basta exibir um -1-potencial.



DAG genérico

Recebe um grafo (N, A) e devolve uma ciclo ou um -1-potencial.

DAG-GENÉRICO (N, A)

para cada i em N **faça**
  $y(i) \leftarrow n + 1$ $\triangleright$ $n + 1$ faz o papel de ∞
  $\pi(i) \leftarrow \text{NIL}$

enquanto $y(j) > y(i) - 1$ **para** algum $ij \in A$ **faça**
  $y(j) \leftarrow y(i) - 1$
  $\pi(j) \leftarrow i$
  se $y(j) \leq 0$
    então devolva j e **pare**

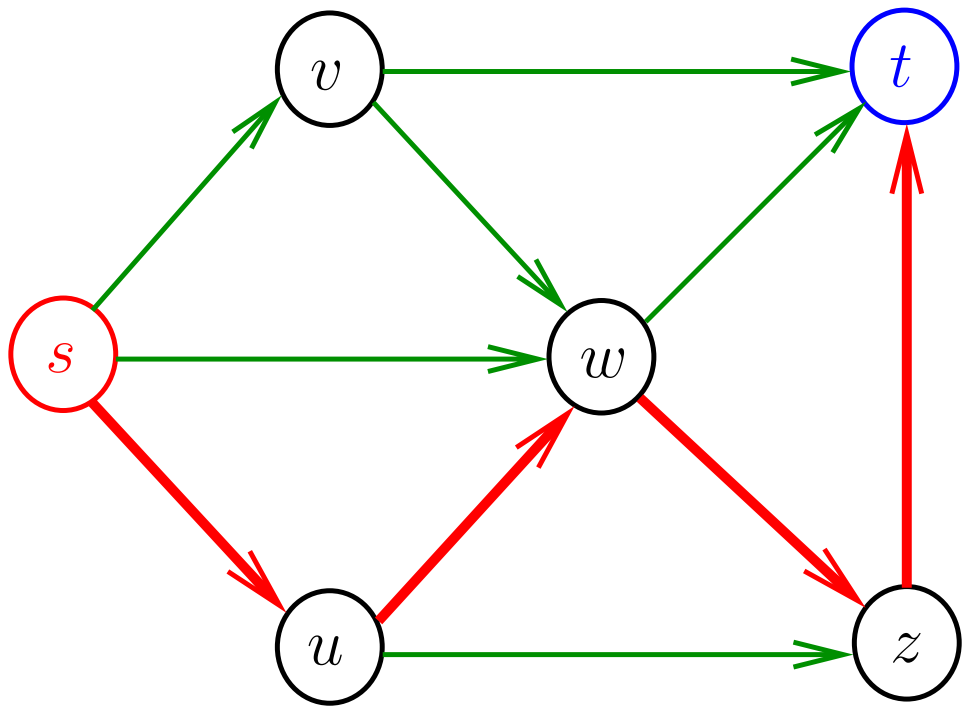
devolva y

AULA 4

Caminhos e matrizes de incidências

Grafo

Eis um grafo e um caminho de s a t.



Matrizes de incidências

Eis a matriz de incidências M do grafo.

Onde está o caminho $\langle s, u, w, z, t\rangle$?

	sv	su	sw	uw	uz	vw	vt	wt	wz	zt	A
s	-1	-1	-1								
u		$+1$		-1	-1						
v	$+1$					-1	-1				
w			$+1$	$+1$		$+1$		-1	-1		
z					$+1$				$+1$	-1	
t							$+1$	$+1$		$+1$	

N

Matrizes de incidências

Rerranjei as linhas e colunas de M.

Que “cara” tem a “submatriz do caminho” $\langle s, u, w, z, t \rangle$?

	su	uw	wz	zt	sv	sw	uz	vw	vt	wt	A
s	-1				-1	-1					
u	$+1$	-1					-1				
w		$+1$	-1			$+1$		$+1$		-1	
z			$+1$	-1			$+1$				
t				$+1$					$+1$	$+1$	
v					$+1$			-1	-1		
N											

Caminhos e submatrizes

Submatrizes associadas a caminhos têm estrutura semelhante a da seguinte.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l} & su & uw & wz & zt & A' \\ \hline s & -1 & & & & \\ \hline u & +1 & -1 & & & \\ \hline w & & +1 & -1 & & \\ \hline z & & & +1 & -1 & \\ \hline t & & & & +1 & \\ \hline N' & & & & & \end{array}$$

Note que as colunas são linearmente independentes.

Conclusão

O problema da busca é equivalente ao abaixo.

Problema. Dada a matriz de incidências M de um grafo (N, A) e o vetor de incidência b de um par (s, t), encontrar um vetor x indexado por A tal que

- $Mx = b$ e
- $x[ij] \in \{0, 1\}$ para todo $ij \in A$.

Conclusão

Da correção do algoritmo BUSCA-GENÉRICO temos o seguinte.

Para quaisquer matriz de incidências M e vetor de incidência b de um par (s, t), vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um vetor x com elementos em $\{0, 1\}$ tal que $Mx = b$
- existe um vetor y tal que $yM \leq 0$ e $yb > 0$.

Nos algoritmos BUSCA-GENÉRICO e BUSCA o vetor x é representado pela função-predecessor π.

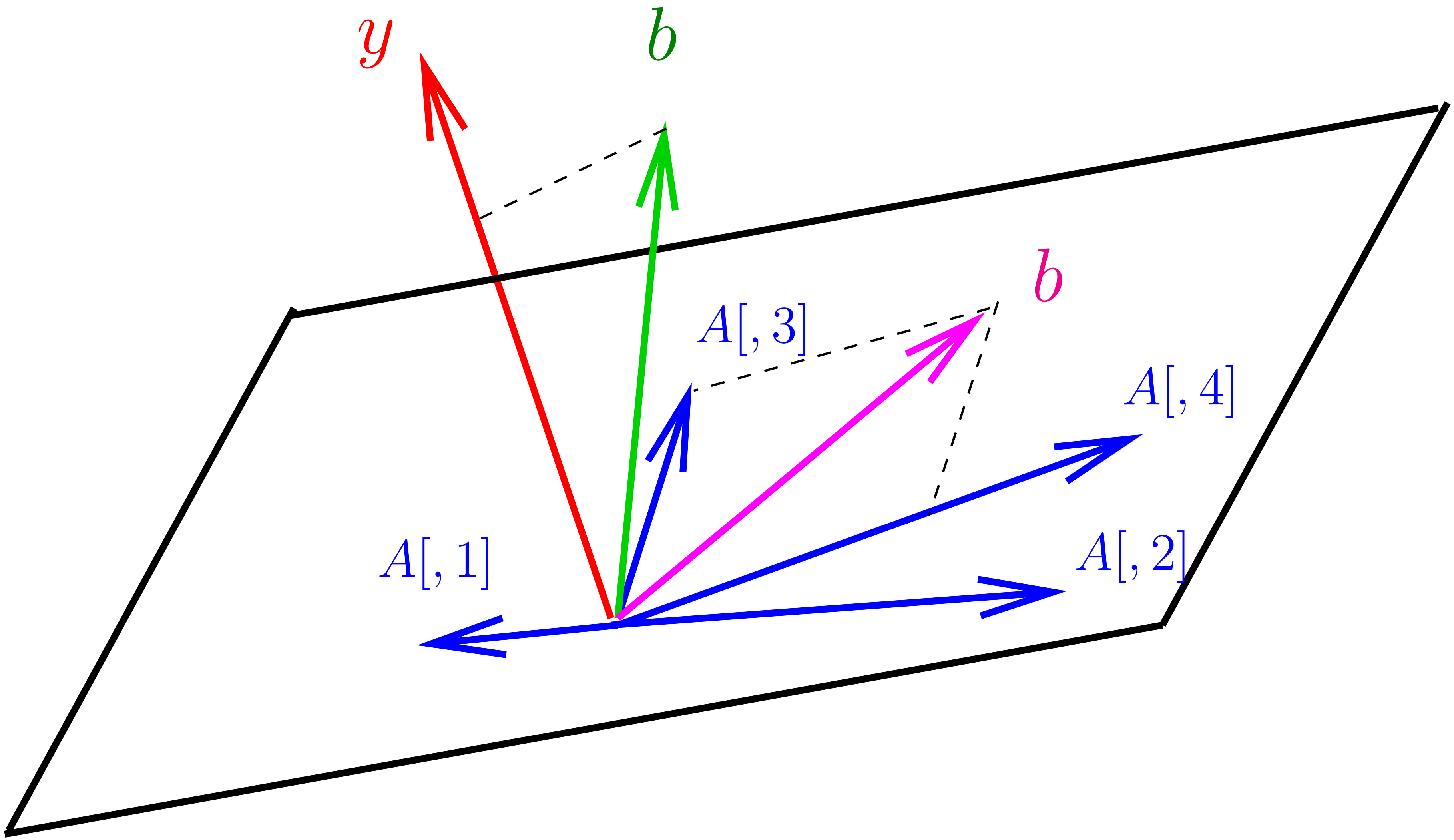
Já vi este filme

O fato a seguir pode ser demonstrado através da correção do algoritmo de Gauss-Jordan.

Para quaisquer matriz A e vetor b, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um vetor x tal que $Ax = b$
- existe um vetor y tal que $yA = 0$ e $yb \neq 0$.

Geometricamente



Soma de subconjuntos (*subset-sum*)

Problema: Dados inteiros não-negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, encontrar uma solução de

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i.

Exemplo:

$$100x_1 + 30x_2 + 90x_3 + 35x_4 + 40x_5 + 30x_6 + 10x_7 = 160$$

tem uma solução 0-1?

Soma de subconjuntos (*subset-sum*)

Problema: Dados inteiros não-negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, encontrar uma solução de

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i.

Exemplo:

$$100x_1 + 30x_2 + 90x_3 + 35x_4 + 40x_5 + 30x_6 + 10x_7 = 160$$

tem uma solução 0-1?

Sim! $x_1 = x_2 = x_6 = 1$ e $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$ é solução.

Soma de subconjuntos (*subset-sum*)

Problema: Dados inteiros não-negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, encontrar uma solução de

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i.

Exemplo:

$$100x_1 + 30x_2 + 90x_3 + 35x_4 + 40x_5 + 30x_6 + 10x_7 = 160$$

tem uma solução 0-1?

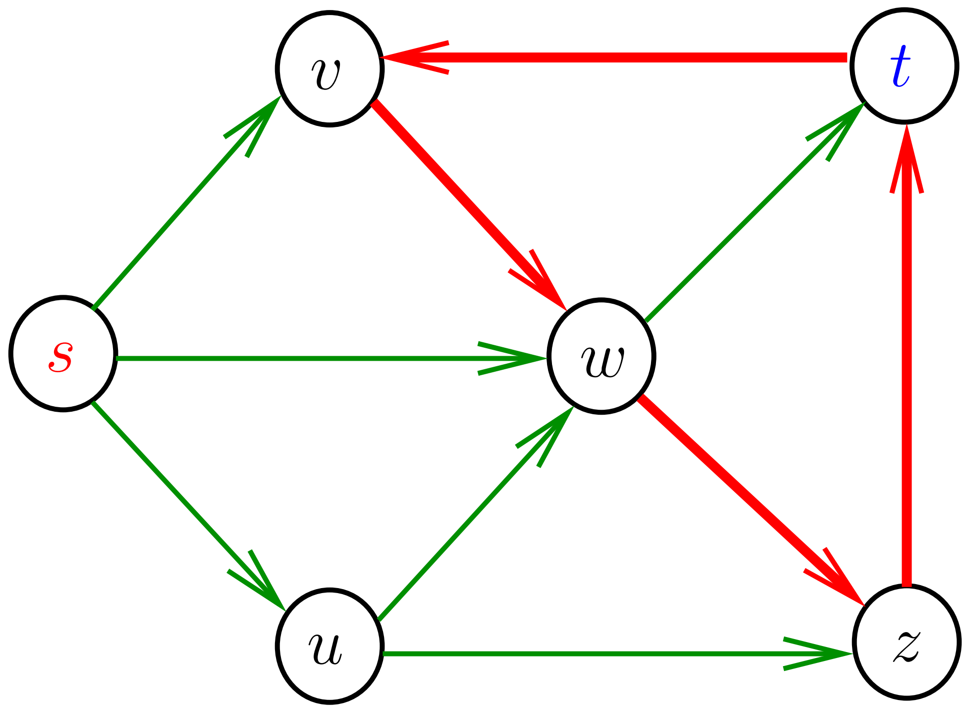
Sim! $x_1 = x_2 = x_6 = 1$ e $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$ é solução.

Este problema é NP-difícil.
Existe algoritmo "pseudo-polinomial" (prog. dinâmica).

Ciclos e matrizes de incidências

Grafo

Eis um grafo e um ciclo.



Matrizes de incidências

Eis a matrize de incidências M do grafo.

Onde está o ciclo $\langle v, w, z, t, v \rangle$?

	sv	su	sw	uw	uz	vw	tv	wt	wz	zt	A
s	-1	-1	-1								
u		$+1$		-1	-1						
v	$+1$					-1	$+1$				
w			$+1$	$+1$		$+1$		-1	-1		
z					$+1$				$+1$	-1	
t							-1	$+1$		$+1$	

N

Matrizes de incidências

Rerranjei as linhas e colunas de M.

Que "cara" tem a "submatriz do ciclo" $\langle v, w, z, t, v\rangle$?

	vw	wz	zt	tv	sv	su	sw	uw	uz	wt	A
v	-1			$+1$	$+1$						
w	$+1$	-1					$+1$	$+1$		-1	
z		$+1$	-1						$+1$		
t			$+1$	-1						$+1$	
s					-1	-1	-1				
u						$+1$			-1	-1	

N

Ciclos e submatrizes

Submatrizes associadas a ciclos têm estrutura semelhante a da seguinte.

	vw	wz	zt	tv	A'
v	-1			$+1$	
w	$+1$	-1			
z		$+1$	-1		
t			$+1$	-1	
N'					

Note que as colunas são linearmente dependentes.

Conclusão

O problema do ciclo é equivalente ao abaixo.

Problema. Dada a matriz de incidências M de um grafo (N, A), encontrar um vetor não-nulo x indexado por A tal que

- $Mx = 0$ e
- $x[ij] \in \{0, 1\}$ para todo $ij \in A$.

Conclusão

Da correção do algoritmo DAG-GENÉRICO temos o seguinte.

> Para qualquer matriz de incidência M, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:
>
> - existe um vetor não-nulo x com elementos em $\{0,1\}$ tal que $Mx = 0$
> - existe um vetor y tal que $yM \leq -1$.

Nos algoritmos DAG-GENÉRICO e DAG o vetor x é representado pela função-predecessor π.

Ciclos não orientados e submatrizes

Submatrizes associadas a ciclos não-orientados têm estrutura semelhante a da seguinte.

Note que as colunas são linearmente dependentes.

	su	uz	wz	wt	tv	sv	A'
s	-1					-1	
u	$+1$	-1					
z		$+1$	$+1$				
w			-1	-1			
t				$+1$	-1		
v					$+1$	$+1$	
N'							

Conclusão

Suponha que M é a matriz de incidências de um grafo (N, A) e que A' é uma parte de A. As colunas da submatriz $M[N, A']$ são linearmente independentes se e somente se o grafo (N, A') não possui ciclos não-orientados.

Bases

Uma base de uma matriz é qualquer submatriz formada por um conjunto maximal de colunas linearmente independentes.

Bases têm uma papel importante no método Simplex de programação linear.

Suponha que M é a matriz de incidências de um grafo (N, A) e que A' é uma parte de A. A submatriz $M[N, A']$ é uma base de M se e somente se e somente se o grafo (N, A') é uma "floresta geradora".

Floresta geradora $=$ subgrafo maximal sem ciclos não-orientados.

Caminhos de comprimento mínimo

PF 5.1, 5.2, 5.3

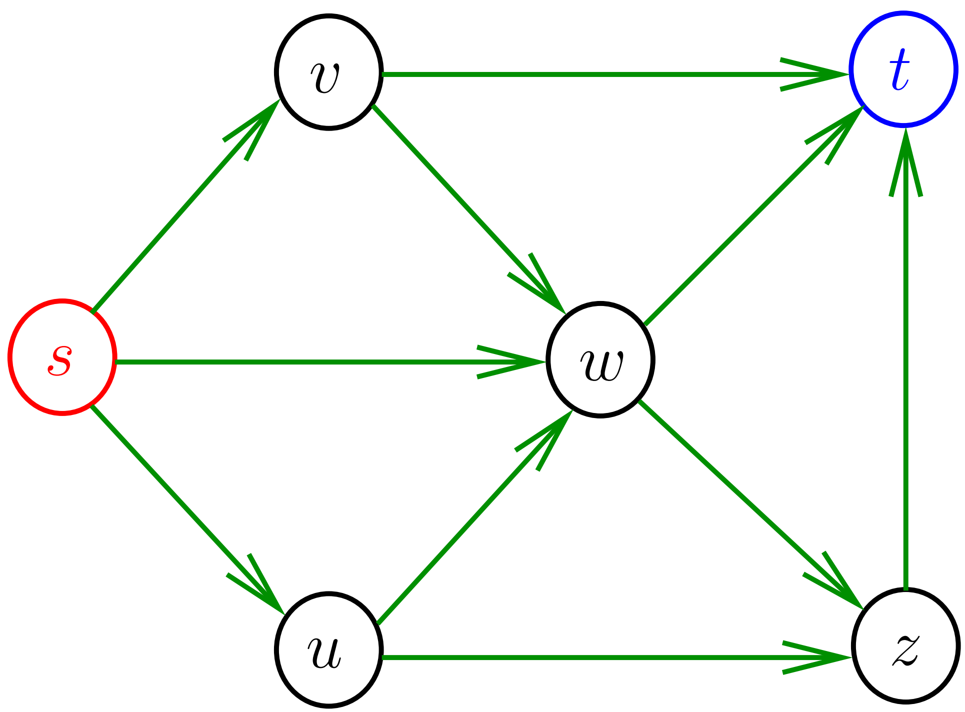
Problema

Problema do caminho mais curto: Dados nós s e t de um grafo (N, A), encontrar um caminho de s a t que tenha comprimento mínimo.

Problema

Problema do caminho mais curto: Dados nós s e t de um grafo (N, A), encontrar um caminho de s a t que tenha comprimento mínimo.

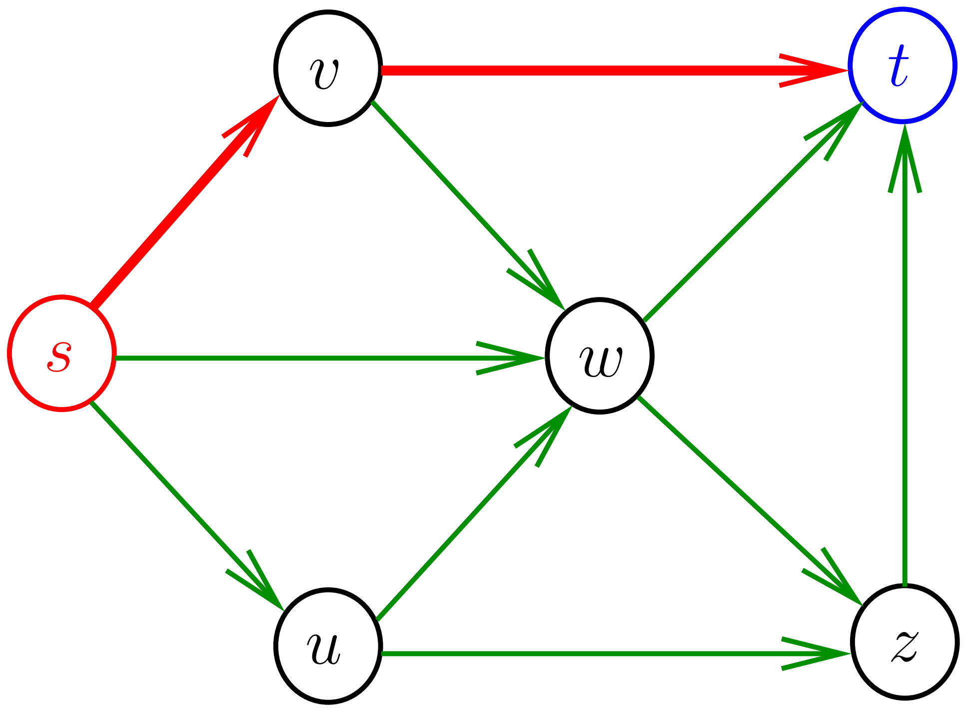
Entra:



Problema

Problema do caminho mais curto: Dados nós s e t de um grafo (N, A), encontrar um caminho de s a t que tenha comprimento mínimo.

Sai:



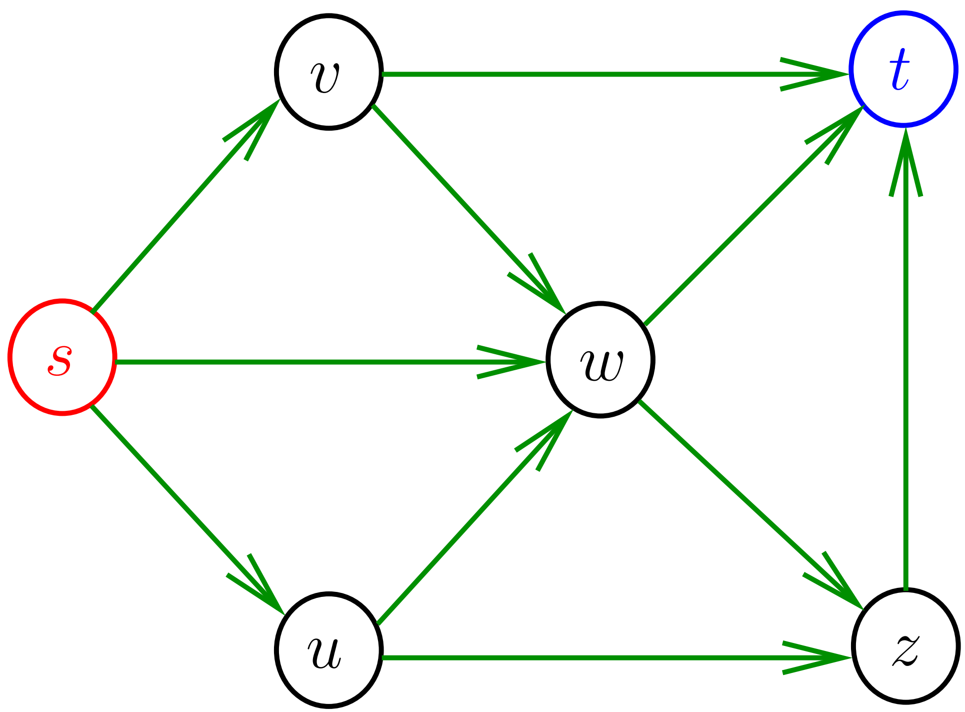
Condição de inexistência

Como é possível provar que um dado caminho de s a t tem comprimento mínimo?

Condição de inexistência

Como é possível provar que um dado caminho de s a t tem comprimento mínimo?

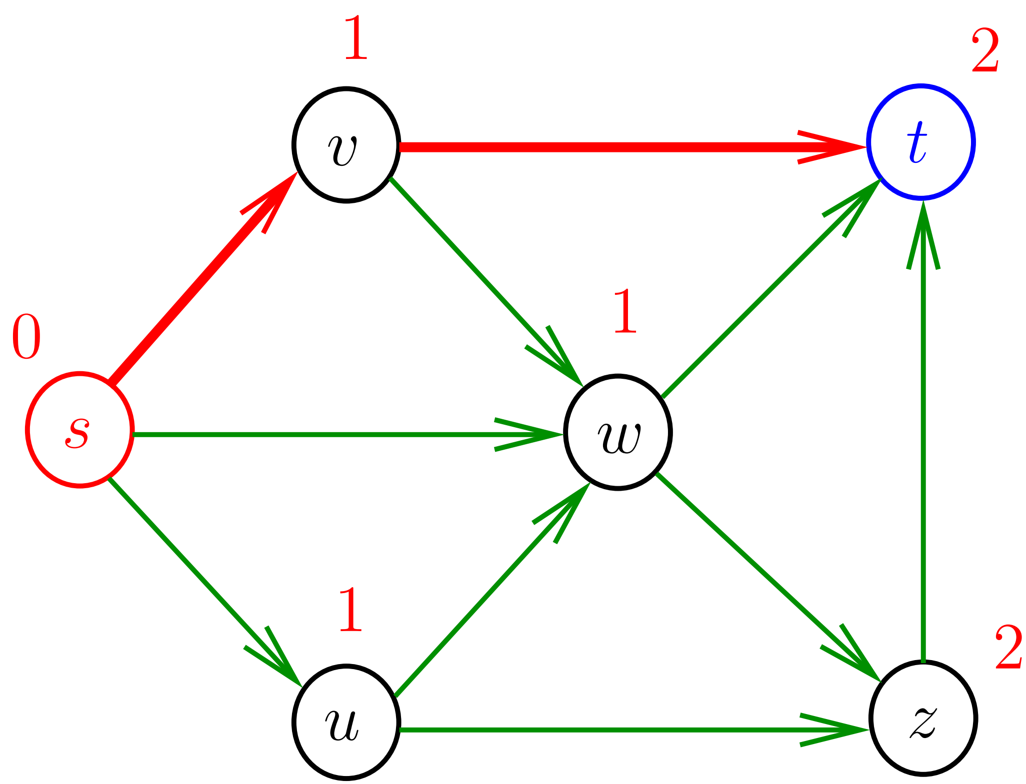
Entra:



Condição de inexistência

Como é possível provar que um dado caminho de s a t tem comprimento mínimo?

Sai: um "certo potencial"



1-potencial

Um 1-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

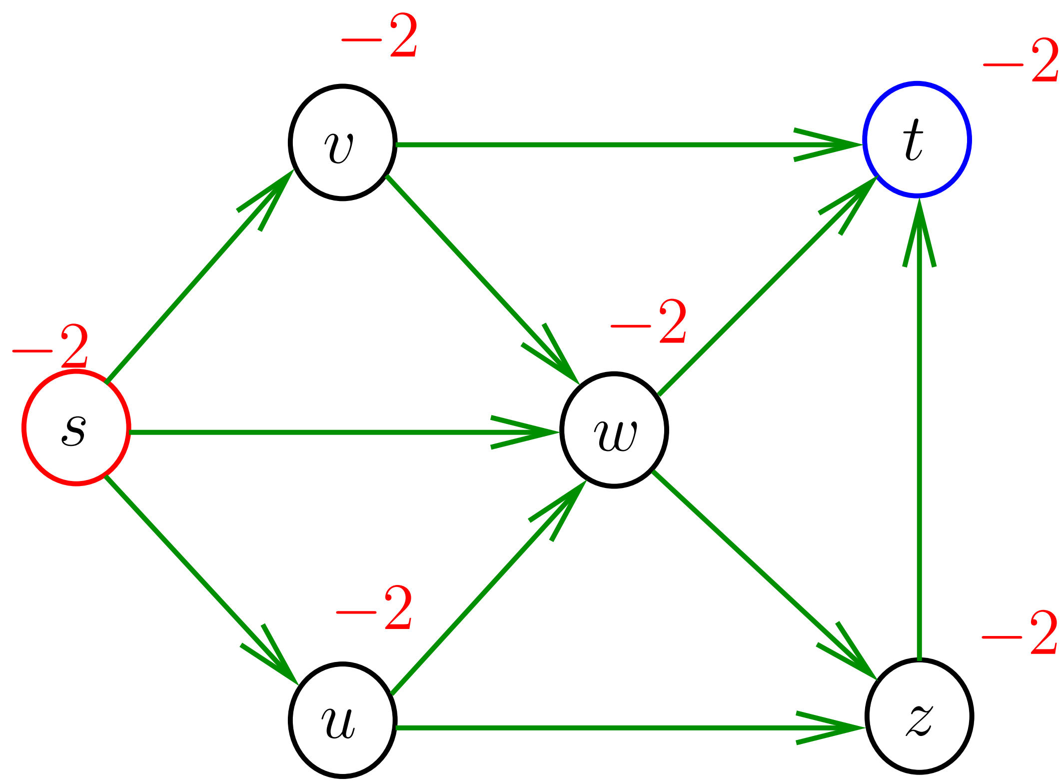
$$y(j) - y(i) \leq 1 \quad \text{para todo arco } ij.$$

1-potencial

Um 1-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

$$y(j) - y(i) \leq 1 \quad \text{para todo arco } ij.$$

Exemplo 1: 1-potencial constante (sem graça...)

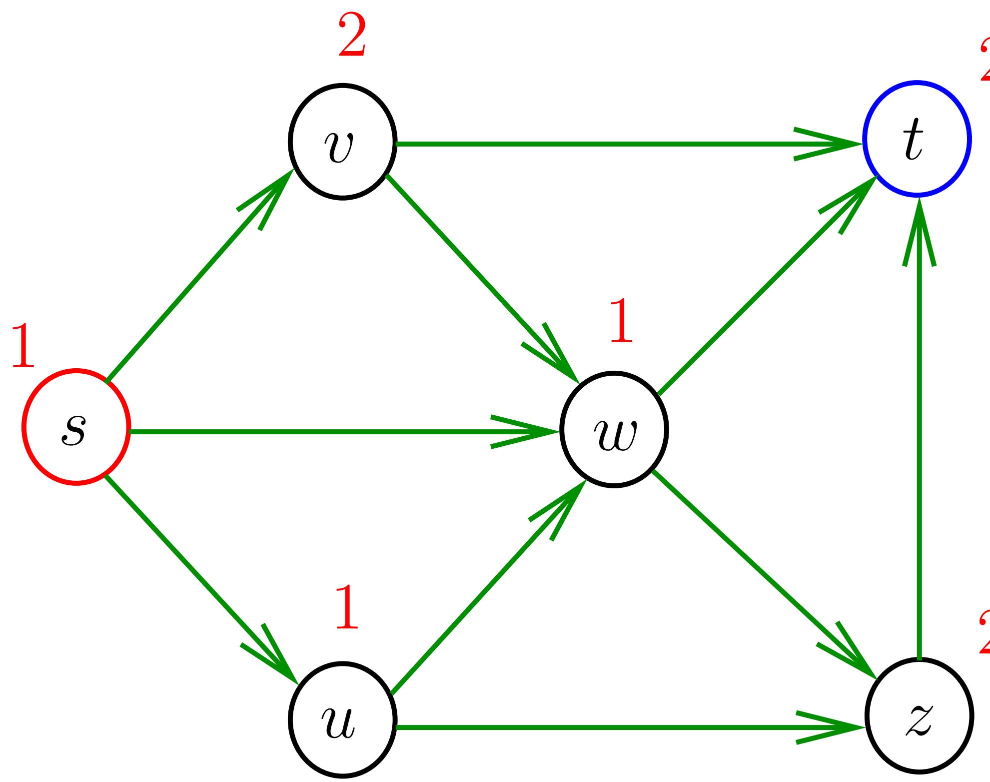


1-potencial

Um 1-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

$$y(j) - y(i) \leq 1 \quad \text{para todo arco } ij.$$

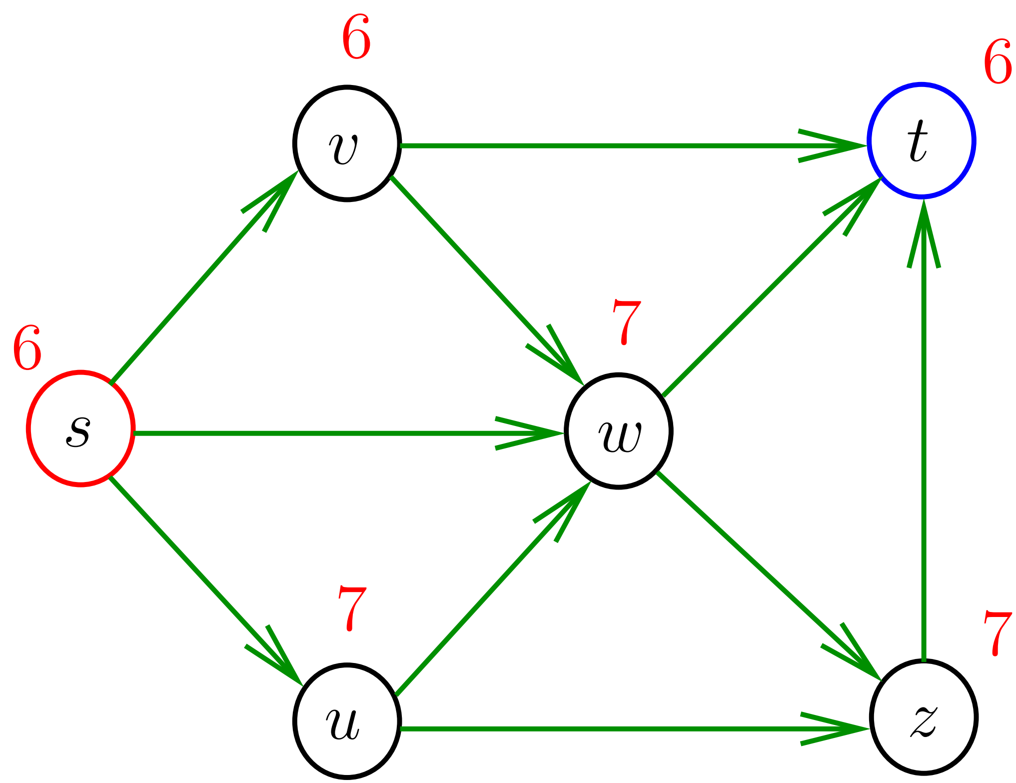
Exemplo 2: um 1-potencial menos “bobo”



Propriedade de 1-Potenciais

(Lema da dualidade.) Se P é um passeio de s a t e y é um 1-potencial então

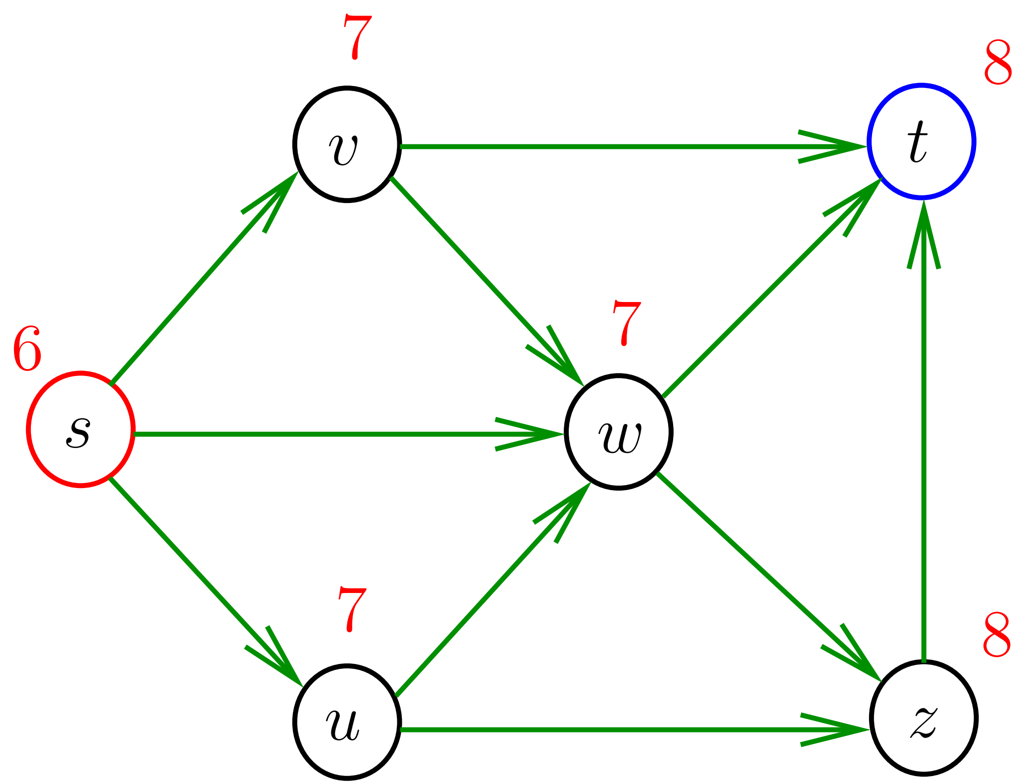
$$|P| \geq y(t) - y(s).$$



Propriedade de 1-Potenciais

Para mostrar que não existe um caminho de s a t de comprimento $< \lambda$ basta exibir um 1-potencial tal que

$$y(t) - y(s) \geq \lambda.$$

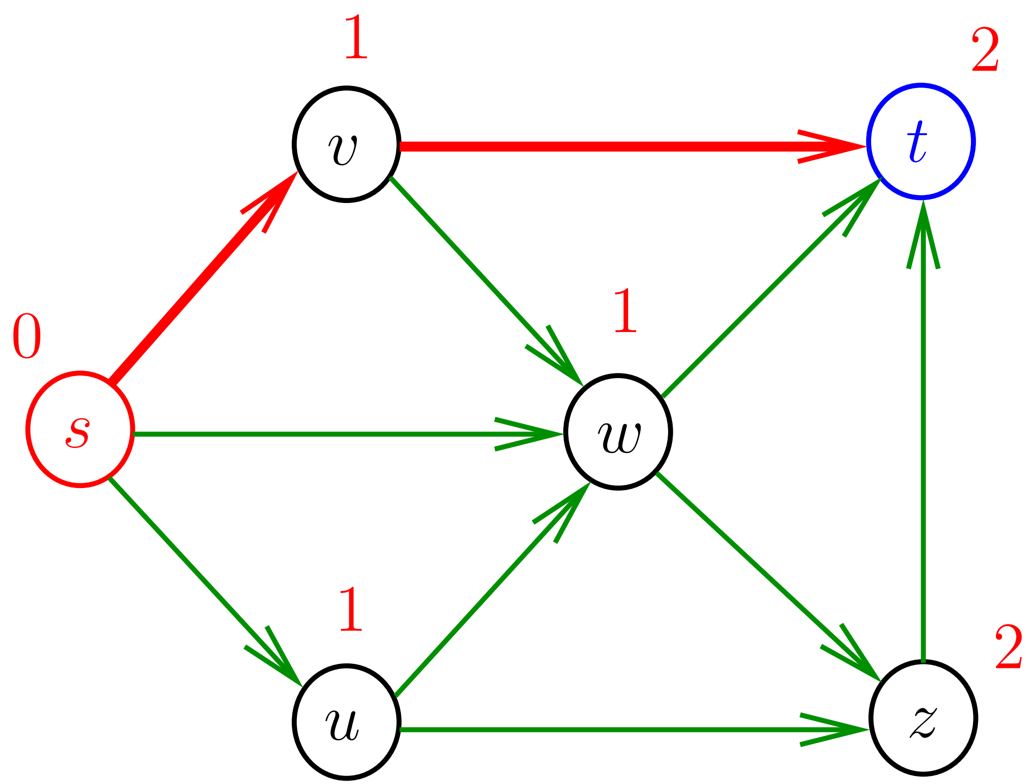


Conseqüência

Se P é um caminho de s a t e y é um 1-potencial tais que

$$|P| = y(t) - y(s),$$

então P é uma caminho mínimo e y é um 1-potencial tal que o valor de $y(t) - y(s)$ é máximo.



Algoritmo genérico

Recebe dois nós s e t de um grafo (N, A) e devolve um st-caminho P e um 1-potencial y tais que $|P| = y(t) - y(s)$.

CAMINHO-CURTO-GENÉRICO (N, A, s, t)

para cada i em N **faça**
    $y(i) \leftarrow n$ $\triangleright$ n faz o papel de ∞
    $\pi(i) \leftarrow \text{NIL}$
$y(s) \leftarrow 0$

enquanto $y(j) > y(i) + 1$ **para** algum $ij \in A$ **faça**
    $y(j) \leftarrow y(i) + 1$
    $\pi(j) \leftarrow i$

se $y(t) < n$
    então devolva o st-caminho no grafo (N, A_π) e y
    senão devolva "não há st-caminho" e y

Invariantes

Na linha 4, antes da verificação da condição "$y(j) > y(i) + 1 \ldots$" valem as seguintes invariantes:

(i0) para cada arco pq no grafo de predecessores tem-se $y(q) - y(p) \geq 1$;

(i1) $\pi(s) = \text{NIL}$ e $y(s) = 0$;

(i2) para cada nó v distinto de s, $y(v) < n \Leftrightarrow \pi(v) \neq \text{NIL}$;

(i3) para cada nó v, se $\pi(v) \neq \text{NIL}$ então existe um caminho de s a v no grafo de predecessores.

Correção

Início da última iteração:

- y é um 1-potencial
- se $y(t) < n$ então, por (i2), vale que $\pi(t) \neq \text{NIL}$. Logo, de (i3), segue que existe um st-caminho P no grafo de predecessores. Desta forma, (i0) e (i1) implicam que

$$|P| \leq y(t) - y(s) = y(t).$$

  Da propriedade dos 1-potencias, concluímos que P é um st-caminho de comprimento mínimo
- se $y(t) = n$, então (i1) implica que $y(t) - y(s) = n$ e da propriedade dos 1-potencias concluímos que não existe caminho de s a t no grafo

Conclusão: o algoritmo faz o que promete.

Conclusão

Da propriedade dos 1-potenciais (lema da dualidade) e da correção do algoritmo CAMINHO-CURTO-GENÉRICO concluímos o seguinte:

(Teorema dualidade) Se s e t são nós de um grafo (N, A) e t está ao alcance de s então

$$\min\{|P| : P \text{ é um } st\text{-caminho}\}$$
$$= \max\{y(t) - y(s) : y \text{ é um } 1\text{-potencial}\}.$$

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 4–6 é

$$< n^2.$$

linha	consumo de todas as execuções da linha
0-2	$\mathrm{O}(n)$
3	$\mathrm{O}(1)$
4	$n^2\mathrm{O}(m)$
5-6	$n^2\mathrm{O}(1)$
7-9	$\mathrm{O}(n)$
total	$(n+1)\,\mathrm{O}(1) + 2\,\mathrm{O}(n) + n^2\,\mathrm{O}(m)$ $= \mathrm{O}(n^2 m)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
CAMINHO-CURTO-GENÉRICO é $O(n^2m)$.

Implementação do algoritmo genérico

BUSCA-EM-LARGURA (N, A, s, t)

para cada i em N **faça**
    $A'(i) \leftarrow A(i) \quad y(i) \leftarrow n \quad \pi(i) \leftarrow \mathrm{NIL}$
$y(s) \leftarrow 0 \quad L \leftarrow \langle s \rangle$

enquanto $L \neq \langle\rangle$ **faça** $\triangleright$ L funciona como uma fila
    retire o primeiro elemento, digamos i, de L
    se $A'(i) \neq \emptyset$ **então**
        retire um arco ij de $A'(i)$
        se $y(j) = n$ **então**
            $y(j) \leftarrow y(i) + 1 \quad \pi(j) \leftarrow i \quad L \leftarrow L \cup \{j\}$
    senão $L \leftarrow L - \{i\}$

se $y(t) < n$
    então devolva o st-caminho no grafo (N, A_π) e y
    senão devolva "não há st-caminho" e y

Implementação do algoritmo genérico (2)

BUSCA-EM-LARGURA (N, A, s, t)

para cada i em N **faça**
  $y(i) \leftarrow n \quad \pi(i) \leftarrow \mathrm{NIL}$
$y(s) \leftarrow 0 \quad L \leftarrow \langle s \rangle$

enquanto $L \neq \langle\rangle$ **faça** $\quad \triangleright$ L funciona como uma fila
  retire o primeiro elemento, digamos i, de L
  para cada ij em $A(i)$ **faça**
    se $y(j) > y(i) + 1$ **então** $\triangleright$ $y(j) = n$
      $y(j) \leftarrow y(i) + 1$
      $\pi(j) \leftarrow i$
      acrescente j ao final de L

se $y(t) < n$
  então devolva o st-caminho no grafo (N, A_π) e y
  senão devolva "não há st-caminho" e y

Invariantes

Na linha 4, antes da verificação da condição "$L \neq \langle\rangle$" valem as seguintes invariantes:

(i0) para cada arco pq no grafo de predecessores tem-se $y(q) - y(p) = 1$ (igual!);

(i1) $\pi(s) = \text{NIL}$ e $y(s) = 0$;

(i2) para cada nó v distinto de s, $y(v) < n \Leftrightarrow \pi(v) \neq \text{NIL}$;

(i3) para cada nó v, se $\pi(v) \neq \text{NIL}$ então existe um caminho de s a v no grafo de predecessores.

Mais invariantes

Seja $S := \{v : y(v) < n\}$.

Na linha 4, antes da verificação da condição $L \neq \langle\rangle$ valem, além de (i0)-(i3), as seguintes invariantes:

(i4) para cada arco pq com $y(q) - y(p) > 1$ tem-se que p está L;

(i5) se $L = \langle i_1, i_2, \ldots, i_l\rangle$ estão

$$y(i_1) \leq y(i_2) \leq \cdots \leq y(i_l);$$

(i6) $y(w) \leq y(i_1)$, para cada nó w em $S - \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$.

Consumo de tempo

O número de iterações é $< n$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
0-2	$\mathrm{O}(n)$
3-4	$\mathrm{O}(n)$
5-9	$\mathrm{O}(m)$
10-12	$\mathrm{O}(n)$

total $\quad 3\,\mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(m)$

$$= \mathrm{O}(n + m)$$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo BUSCA-EM-LARGURA é $O(n + m)$.