



Fonte: [ash.atozviews.com](http://ash.atozviews.com)

Compacto dos melhores momentos

AULA 14

# Hash tables

Inventadas para funcionar em  $O(1)$  ... em média.

universo de chaves = conjunto de **todas** as possíveis chaves

A tabela terá a forma  $tab[0 \dots M-1]$ , onde **M** é o tamanho da tabela.

# Hash functions

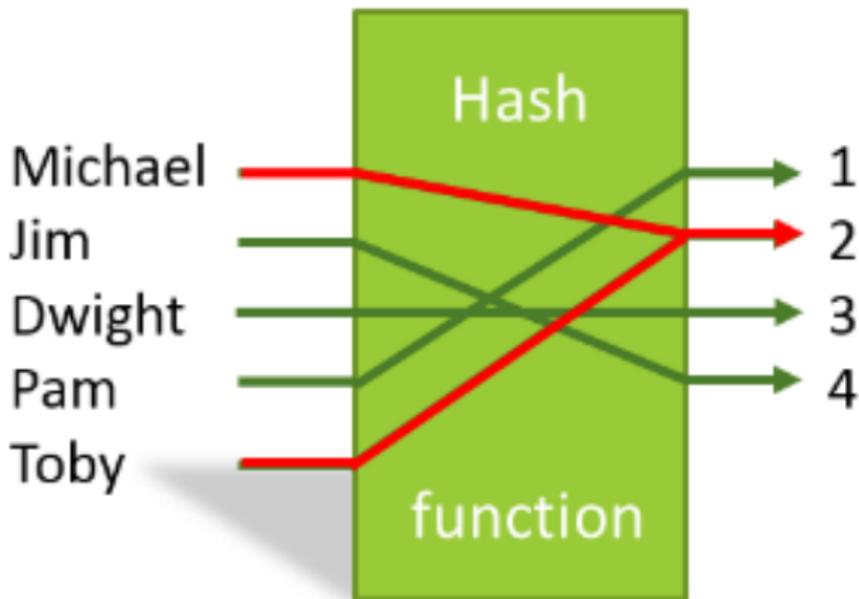
A **função de dispersão** (= *hash function*) recebe uma **chave key** e retorna um número inteiro  $h(\text{key})$  no intervalo  $0 \dots M-1$ .

O número  $h(\text{key})$  é o **código de dispersão** (= *hash code*) da chave.

Queremos uma **função de hashing** que:

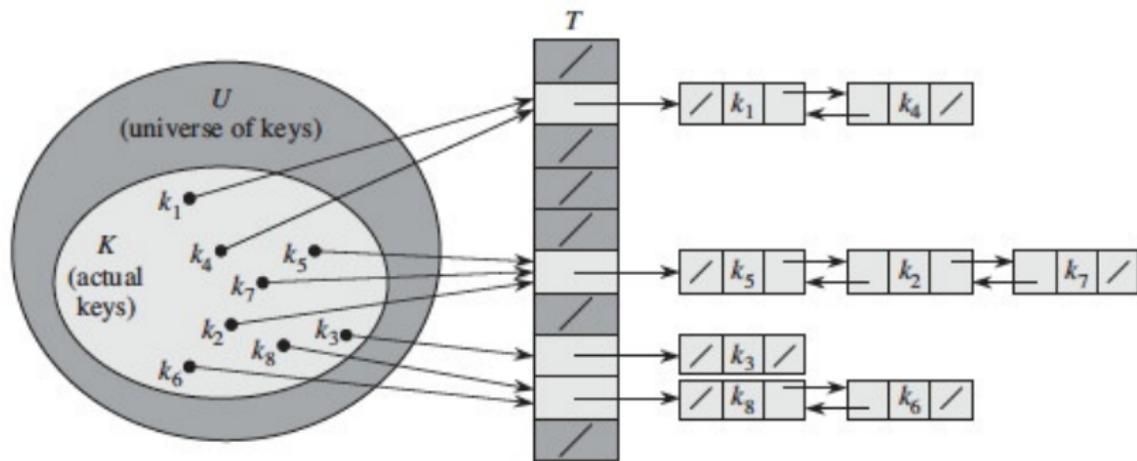
- ▶ possa ser **calculada** em  $O(1)$  e
- ▶ **espalhe bem as chaves** pelo intervalo  $0, \dots, m-1$ .

## Conviver com colisões...



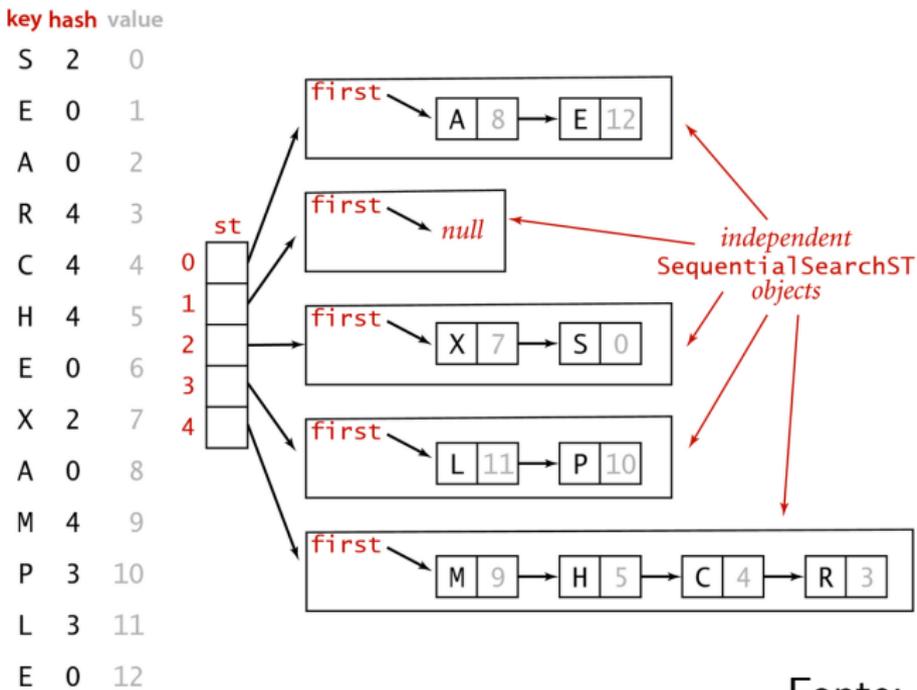
Fonte: <https://stackoverflow.com/>

# Separate chaining



Fonte: [CLRS](#)

# Separate chaining



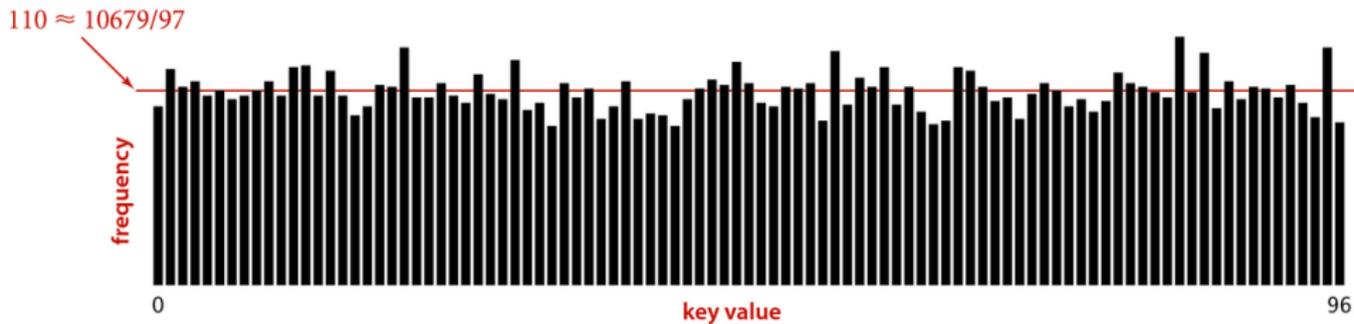
Fonte: [algs4](#)

Hashing with separate chaining for standard indexing client

# Hipótese do Hashing Uniforme

**Hipótese do Hashing Uniforme:** Vamos supor que nossas funções de hashing distribuem as chaves pelo intervalo de inteiros  $0 \dots m$  de maneira **uniforme** (todos os valores hash **igualmente prováveis**) e **independente**.

# Hipótese do Hashing Uniforme



Hash value frequencies for words in *Tale of Two Cities* (10,679 keys,  $M = 97$ )

Fonte: [algs4](#)

# Hipótese do Hashing Uniforme

Isso significa que se as cada chave  $key$  é escolhida de um universo  $U$  de acordo com uma distribuição de probabilidade  $Pr$ ; ou seja,  $Pr(key)$  é a probabilidade de  $key$  ser escolhida. Então a hipótese do hashing uniforme nos diz que

$$\sum_{key:h(key)=j} Pr(key) = \frac{1}{m}$$

para  $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ .

## Consumo de tempo

Supondo a função `hash` distribua as chaves uniformemente em  $[0..m-1]$ , em uma **tabela de distribuição** com **listas encadeadas** o consumo de tempo de `get()`, `put()` e `delete()` é  $O(1 + \alpha)$ .

Se  $n \leq c m$  para alguma constante  $c$ , ou seja,  $n = O(m)$ , então  $\alpha$  é  $O(1)$  e portanto  $O(1 + \alpha)$  é **constante**.

## Mais mais experimentos ainda

Consumo de tempo para se criar um **ST** em que a **chaves** são as palavras em `les_miserables.txt` e os **valores** o número de ocorrências.

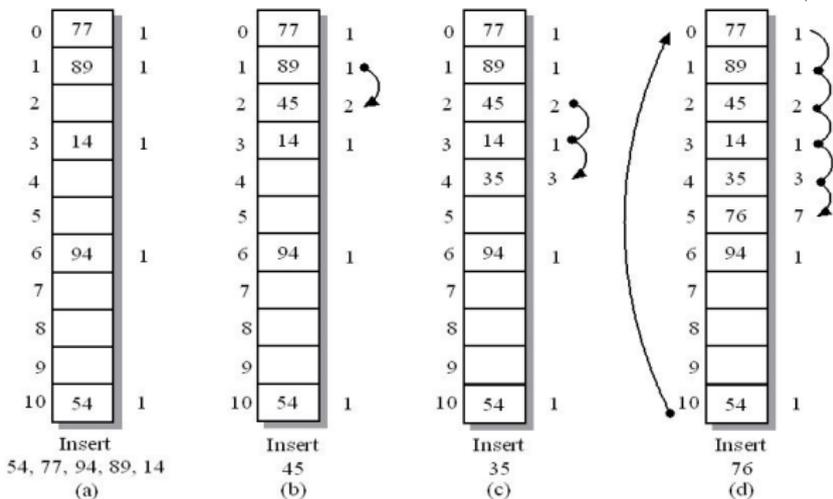
<b>estrutura</b>	<b>ST</b>	<b>tempo</b>
vetor	ordenada	1.5
skiplist	ordenada	1.1
árvore <b>rubro-negra</b>	ordenada	0.76
árvore binária de busca	ordenada	0.72
splay tree	ordenada	0.68
hash. encadeamento	não-ordenada	0.61
hash. encadeamento+MTF	não-ordenada	0.56

Tempos em **segundos** obtidos com **StopWatch**.

# AULA 15

# Colisões por *open addressing*

## Hash Table Using Linear Probing – Open Addressing



## HashMap<Key, Value>

```
public class HashMap<Key, Value>:
```

```
https://docs.oracle
```

```
.../java/util/HashMap.html
```

*“...**Hash table** based implementation of the **Map interface**.”*

*This implementation provides **constant-time performance** for the basic operations (**get** and **put**)*

***assuming the hash function disperses the elements properly among the buckets... .**”*

## HashMap<Key, Value>

```
public class HashMap<Key, Value>:  
https://docs.oracle  
.../java/util/HashMap.html
```

An instance of *HashMap* has two parameters that affect its performance: *initial capacity* and *load factor*.

... *initial capacity* is simply the capacity at the time the *hash table* is created.

The *load factor* is a measure of how full the hash table is allowed to get before its capacity is *automatically increased*.

## HashMap<Key, Value>

```
public class HashMap<Key, Value>:  
https://docs.oracle  
.../java/util/HashMap.html
```

When the *number of entries* in the hash table exceeds the product of the *load factor* and the current capacity, the hash table is **reshaped** ...

so that the hash table has approximately *twice the number of buckets*.

## Open addressing

**Open addressing** procura **evitar** o espaço extra usado por listas ligadas colocando todas as chaves na tabela `tab[]`.

O **fator de carga**  $\alpha = n/m$  da tabela é **menor do que 1**.

Examinar uma posição é chamado de **sondagem** (= *probe*).

Estendemos a **função de hash** para ter o **número da sondagem** como segundo parâmetro.

A sequência de sondagens

$$h(\text{key}, 0), h(\text{key}, 1), \dots, h(\text{key}, m-1)$$

**deve ser** uma **permutação** de  $0, \dots, m-1$ .

## Colisões por sondagem linear

O métodos de resolução de **colisões** por *open addressing* mais simples é conhecido como **sondagem linear** (= *linear probing*).

Todos os itens são armazenados em um vetor `tab[0..m-1]`.

Quando ocorre uma **colisão**, procuramos a **próxima posição vaga** do vetor.

Se  $h()$  é a função de hash então a sequência de sondagens é

$$h(\text{key})\%m, (h(\text{key})+1)\%m, \dots, (h(\text{key})+m-1)\%m$$

## Colisões por sondagem linear

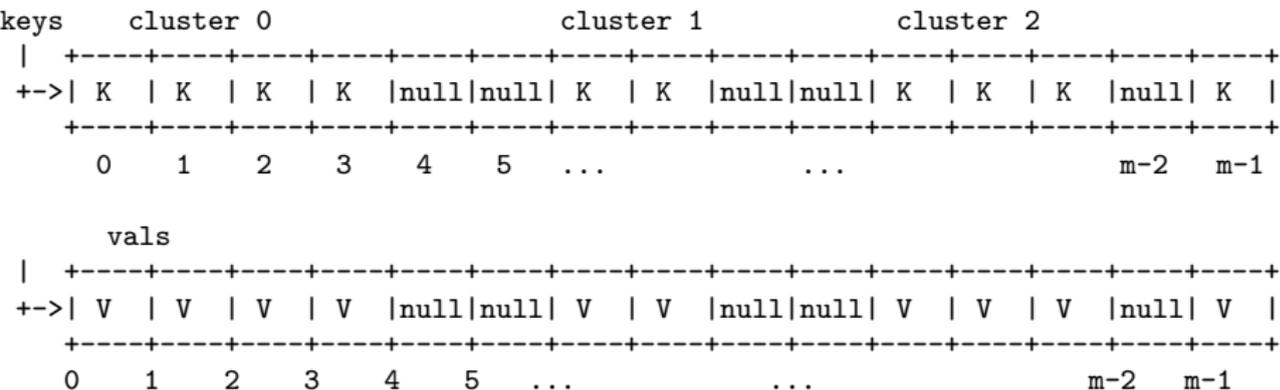
Quanto maior o **fator de carga**, mais tempo as funções de busca e inserção vão consumir.

Durante a busca há três possibilidades:

- ▶ **encontramos a chave**, paramos a busca;
- ▶ **posição não-ocupada**, paramos a busca;
- ▶ **posição está ocupada** e não é a chave, vamos para a próxima posição

# LinearProbingHashST

```
private Key[] keys;  
private Value[] vals;
```



# Clusters

*9/64 chance of new key  
hitting this cluster*

before



*key lands here  
in that event*



*and forms a much  
longer cluster*

after



Clustering in linear probing ( $M = 64$ )

Fonte: [algs4](#)

# Clusters

linear probing

random

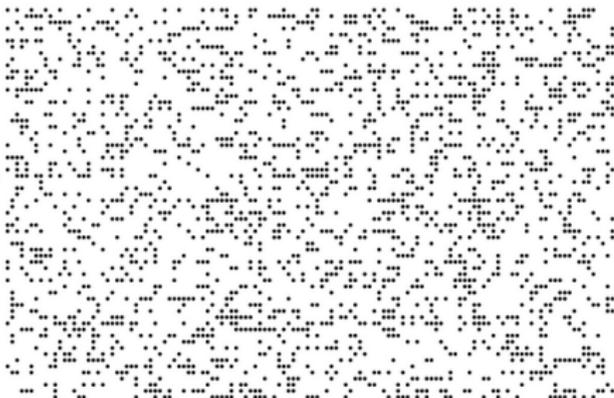
$\alpha = 1/2$



*long clusters are common*



$\alpha = 1/4$



keys[0..127]



keys[8064..8192]

Table occupancy patterns (2,048 keys, tables laid out in 128-position rows)

## Colisões por sondagem linear

```
public class Lin...HashST<Key, Value>{  
    private int n;  
    private int m = 16;  
    private Key[] keys;  
    private Value[] vals;
```

## Colisões por sondagem linear

```
public LinearProbingHashST() {  
    keys = (Key[]) new Object[m];  
    vals = (Value[]) new Object[m];  
}  
public LinearProbingHashST(int cap) {  
    m = cap;  
    keys = (Key[]) new Object[m];  
    vals = (Value[]) new Object[m];  
}
```

## Colisões por sondagem linear

```
public Value get(Key key) {  
    for (int h=hash(key); keys[h] != null; h=(h+1)%m)  
        if (keys[h].equals(key))  
            return vals[h];  
    return null;  
}
```

## Colisões por sondagem linear

```
public void put(Key key, Value val) {
    int h;
    for (h=hash(key); keys[h] != null; h=(h+1)%m)
        if (keys[h].equals(key)) {
            vals[h] = val;
            return;
        }
    this.keys[h] = key;
    this.vals[h] = val;
    this.n++;
}
```

## Colisões por sondagem linear

Retorna todas as chaves na **ST** como iterável.

```
public Iterable<Key> keys() {  
    Queue<Key> queue = new Queue<Key>();  
    for(int h = 0; h < m; h++)  
        if (keys[h] != null)  
            queue.enqueue(keys[h]);  
    return queue;  
}
```

# Rehashing

Na **sondagem linear**, é essencial que  $\alpha$  fique bem abaixo de 1.

Convém manter  $\alpha \leq 1/2$  (ou seja,  $n \leq m/2$ ).

Para manter  $\alpha$  sob controle, a tabela de hash deve ser **redimensionada**, quando necessário, no início de `put()`.

```
public void put(Key key, Value val) {  
    if (n >= m/2) resize(2*m);  
    ...  
    ...  
}
```

# Rehashing

```
private void resize(int cap) {  
    LinearProbingHashST<Key, Value> t;  
    t = new LinearProbingHashST<Key, Value>(cap);  
    for (int h = 0; h < m; h++) {  
        if (keys[h] != null) {  
            t.put(keys[h], vals[h]);  
        }  
    }  
    keys = t.keys;  
    vals = t.vals;  
    m = t.m;  
}
```

# Rehashing

```
public void delete(Key key) {  
    if (!contains(key)) return;  
  
    // encontre key  
    int h = hash(key);  
    while (!key.equals(keys[h]))  
        h = (h + 1) % m;  
  
    // remova key  
    keys[h] = null;  
    vals[h] = null;  
    n--;
```

## Rehashing

```
// rehash todas as chaves no cluster
h = (h + 1) % m;
while (keys[h] != null) {
    Key keyToRehash = keys[h];
    Value valToRehash = vals[h];
    keys[h] = null;
    vals[h] = null;
    n--;
    put(keyToRehash, valToRehash);
    h = (h + 1) % M;
}
// resize se estiver alfa <= 0.125
if (n > 0 && 8*n <= m) resize(m/2);
}
```

## Consumo de tempo

O consumo de tempo de uma busca em tabelas de hash com sondagem linear depende, no pior caso, do tamanho do maior **cluster** (=fatia da tabela com chaves não nulas).

## Consumo de tempo

**Proposição:** Supondo que vale a **hipótese do hashing uniforme**, e que  $\alpha$  está entre 0 e 1 mas não muito perto de 1, o número médio de sondagens em **buscas bem-sucedidas** é aproximadamente

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{(1 - \alpha)} \right)$$

e o número médio de sondagens em **buscas malsucedidas** (ou inserções) é aproximadamente

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \right)$$

## Consumo de tempo

**Exemplo:** quando  $\alpha = 0.5$ , temos aproximadamente 1,5 sondagens por busca bem-sucedida e aproximadamente 2,5 sondagens por busca malsucedida.

**Exemplo:** quando  $\alpha = 0.25$ , temos aproximadamente 1,16 sondagens por busca bem-sucedida e aproximadamente 1,39 por busca malsucedida.

# Memória

método	espaço usado para $n$ itens
separating chaining	$\approx 48n + 64m$
linear probing	entre $\approx 32n$ e $\approx 128n$
BSTs	$\approx 56n$

## Colisões por *Double Hashing*

Um outra estratégia é usarmos duas funções de hash  $h_1$  e  $h_2$ , onde

- ▶  $h_1()$  fornece a posição inicial da sondagem e
- ▶  $h_2()$  é responsável pelas demais sondagens.

As posições a serem sondadas serão dadas pela função

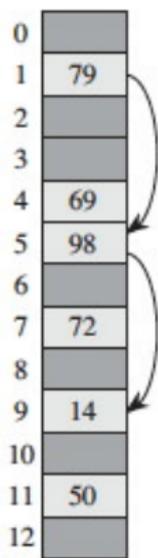
$$h(\text{key}, h) = (h_1(\text{key}) + h \times h_2(\text{key})) \% m.$$

## Colisões por *Double Hashing*

Para uma dada chave  $key$  sondaremos

- ▶ primeiro a posição  $h(key, 0) = h1(key) \% m$
- ▶ depois  $h(key, 1) = (h1(key) + h2(key)) \% m$
- ▶ em seguida  
 $h(key, 2) = (h1(key) + 2 \times h2(key)) \% m$
- ▶ em seguida  
 $h(key, 3) = (h1(key) + 3 \times h2(key)) \% m$
- ▶ ...

# Colisões por *Double Hashing*



Fonte: CLRS

## Colisões por *Double Hashing*

O valor de  $h_2(\text{key})$  e  $m$  devem ser relativamente primos. para garantir que a sequência de sondagens é uma permutação de  $0, 1, \dots, m-1$ .

Duas métodos utilizados:

- ▶ **to**me  $m$  como um potência de 2 e  $h_2()$  que sempre forneça inteiros ímpares;
- ▶ **selecione** um primo  $m$  e  $h_2()$  que retorne valores no intervalo  $2 \dots m-1$ .

O método nos fornece  $m^2$  **sequências diferentes de sondagem**; sondagem linear que fornece apenas  $m$ .

# Fator de carga

Note a diferença da interpretação do fator de carga.  
Em

- ▶ **separate chaining** o fator de carga  $\alpha$  é o **número médio de itens** por lista:  $\alpha$  pode ser maior que 1.
- ▶ **open addressing** o fator de carga  $\alpha$  é a **fração da tabela** que está ocupada:  $\alpha$  é menor que 1.

# Universal hash functions

Um **adversário maldoso**, vendo a nossa função de hash, pode fornecer chaves que fazem com que as chaves sejam pessimamente distribuídas.

**Hashing universal** fornece um mecanismo aleatorizado que sorteia uma função de hash cada vez que construímos uma **ST**.

A função sorteada garante que o consumo de **tempo médio** das operações seja  $O(1)$

**Detalhes em MAC0338!**

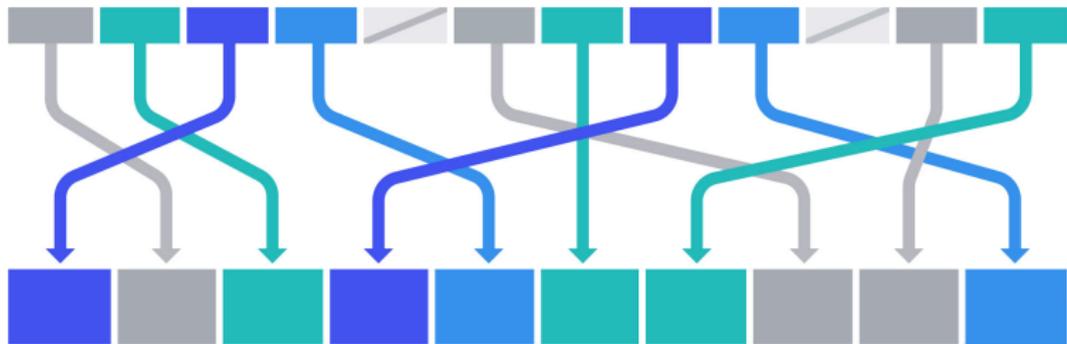
## Mais mais mais experimentos ainda

Consumo de tempo para se criar um **ST** em que a **chaves** são as palavras em `les_miserables.txt` e os **valores** o número de ocorrências.

<b>estrutura</b>	<b>ST</b>	<b>tempo</b>
vetor	ordenada	1.5
skiplist	ordenada	1.1
árvore <b>rubro-negra</b>	ordenada	0.76
árvore binária de busca	ordenada	0.72
splay tree	ordenada	0.68
hash. encadeamento	não-ordenada	0.61
hash. encadeamento+MTF	não-ordenada	0.56
hash. sondagem linear	não-ordenada	0.53

Tempos em segundos obtidos com **StopWatch**. 

## Comentários finais: Facebook F14

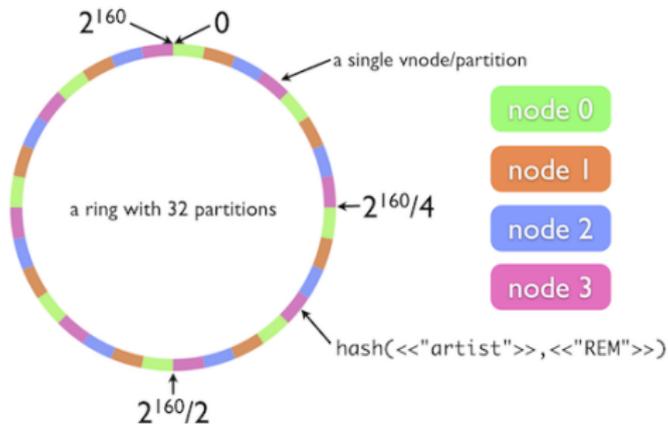


Fonte: [Open-sourcing F14 for faster, more memory-efficient hash tables](#)

*Facebook F14 is a 14-way probing hash table that resolves collisions by double hashing.*

Posted on apr 25, 2019 to [Developer Tools](#), [Open Source](#), no [github](#)

## Mais comentários: *Consistent hashing*



Fonte: The Simple Magic of Consistent Hashing

Na média *rehash*  $n/m$  chaves quando a tabela é redimensionada.

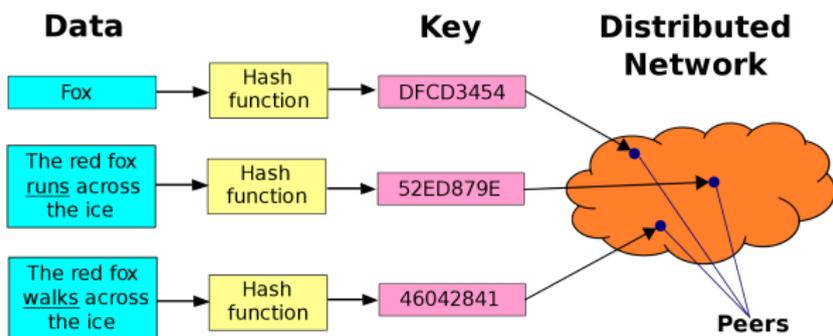
Mais comentários: *banco de dados*



Fonte: [Cassandra](#)

**Apache Cassandra** é um banco de dados *open-source*, distribuído utiliza *consistent hash*.

## Mais comentários: *Distributed hash table*



Fonte: [Distributed hash table \(wikipedia\)](#)

Classe sistemas distribuídos descentralizado que fornece um serviço de consulta semelhante a uma **tabela hash**: pares **key-val** são armazenados em um **DHT**, e qualquer nó participante pode recuperar com eficiência **val** associado a uma dada **key**.

## Mais comentários: funções de hash

As aplicações de **funções de hash** vão muito além de **tabelas de hash**.

- ▶ consistência e arquivos: **Dropbox**;
- ▶ criptografia: **Cryptographic hash function (wikipedia)**
- ▶ **hash'em all!**: sítio onde podemos obter o valor de hash de textos escolhendo dentre vários algoritmos;
- ▶ sistemas de senhas
- ▶ ...