Compacto dos melhores momentos

AULA 24

Introdução

Problema: Dada uma string `pat` e uma string `txt`, encontrar uma (todas) ocorrência(s) de `pat` em `txt`.

Exemplo: encontre `ATTGG` em:

```
TGGTAAGCGGTTCCTGCCCCGGCTCAGGGCCAAGAACAGATGAGACAGCTGAGTGATGGGCCAAACAGGATATCTGTGG
TAAGCAGTTCCTGCCCCGGCTCGGGGCCAAGAACAGATGGTCCCCAGATGCGGTCCAGCCCTCAGCAGTTTCTAGTGAA
TCATCAGATGTTTCCAGGGTGCCCCAAGGACCTGAAAATGACCCTGTACCTTATTTGAACTAACCAATCAGTTCGCTTC
TCGCTTCTGTTCGCGCGCTTCCGCTCTCCGAGCTCAATAAAAGAGCCCACAACCCCTCACTCGGCGCGCCAGTCTTCCG
ATAGACTGCGTCGCCCGGGTACCCGTATTCCCAATAAAGCCTCTTGCTGTTTGCATCCGAATCGTGGTCTCGCTGTTCC
TTGGGAGGGTCTCCTCTGAGTGATTGACTACCCACGACGGGGGTCTTTCATTTGGGGGCTCGTCCGGGATTTGGAGACC
CCTGCCCAGGGACCACCGACCCACCACCGGGAGGTAAGCTGGCCAGCAACTTATCTGTGTCTGTCCGATTGTCTAGTGT
CTATGTTTGATGTTATGCGCCTGCGTCTGTACTAGTTAGCTAACTAGCTCTGTATCTGGCGGACCCGTGGTGGAACTGA
CGAGTTCTGAACACCCGGCCGCAACCCTGGGAGACGTCCCAGGGACTTTGGGGGCCGTTTTTGTGGCCCGACCTGAGGA
AGGGAGTCGATGTGGAATCCGACCCCGTCAGGATATGTGGTTCTGGTAGGAGACGAGAACCTAAAACAGTTCCCGCCTC
CGTCTGAATTTTTGCTTTCGGTTTGGAACCGAAGCCGCGCGTCTTGTCTGCTGCAGCATCGTTCTGTGTTGTCTCTGTC
TGACTGTGTTTCTGTATTTGTCTGAAAATTAGGGCCAGACTGTTACCACTCCCTTAAGTTTGACCTTAGGTCACTGGAA
AGATGTCGAGCGGATCGCTCACAACCAGTCGGTAGATGTCAAGAAGAGACGTTGGGTTACCTTCTGCTCTGCAGAATGG
CCAACCTTTAACGTCGGATGGCCGCGAGACGGCACCTTTAACCGAGACCTCATCACCCAGGTTAAGATCAAGGTCTTTT
CACCTGGCCCGCATGGACACCCAGACCAGGTCCCCTACATCGTGACCTGGGAAGCCTTGGCTTTTGACCCCCCTCCCTG
GGTCAAGCCCTTTGTACACCCTAAGCCTCCGCCTCCTCTTCCTCCATCCGCCCCGTCTCTCCCCCTTGAACCTCCTCGT
TCGACCCCGCCTCGATCCTCCCTTTATCCAGCCCTCACTCCTTCTCTAGGCGCCGGAATTCGTTAACTCGAGGATCCGG
CTGTGGAATGTGTGTCAGTTAGGGTGTGGAAAGTCCCCAGGCTCCCCAGCAGGCAGAAGTATGCAAAGCATGCATCTCA
ATTAGTCAGCAACCAGGTGTGGAAAGTCCCCAGGCTCCCCAGCAGGCAGAAGTATGCAAAGCATGCATCTCAATTAGTC
AGCAACCATAGTCCCGCCCCTAACTCCGCCCATCCCGCCCCTAACTCCGCCCAGTTCCGCCCATTCTCCGCCCCATGGC
TGACTAATTTTTTTATTTATGCAGAGGCCGAGGCCGCCTCGGCCTCTGAGCTATTCCAGAAGTAGTGAGGAGGCTTTT
TTGGAGGCCTAGGCTTTTGCAAAAAGCTGCCCAAGCTGATCCCCGGGGGCAATGAGATATGAAAAAGCCTGAACTCACC
GCGACGTCTGTCGAGAAGTTTCTGATCGAAAAGTTCGACAGCGTCTCCGACCTGATGCAGCTCTCGGAGGGCGAAGAAT
```

Algoritmo de força bruta

pat = a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	txt
0	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
1		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
4					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
5						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
6							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
7								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
8									a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a					
9										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
10											a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a			
11												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		
12													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Conclusões

O consumo de tempo de `search()` força-bruta no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo de `search()` força-bruta no melhor caso é $O(n - m + 1)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a mn.

Em geral o algoritmo é rápido e faz não mais que $1.1 \times n$ comparações.

Algoritmo força bruta: direita para esquerda

pat = a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	txt
0	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
1		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
4					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
5						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
6							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
7								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
8									a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a					
9										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
10											a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a			
11												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		
12													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Força bruta: direita para esquerda

Devolve a primeira de ocorrências de pat em txt.

```
public static
int search(String pat, String txt) {
   int i, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();
   int skip = 1;
   for (i = 0; i <= n-m; i += skip) {
       for (j = m-1; j >= 0; j--)
           if(txt.charAt(i+j)!=pat.charAt(j))
               break;
       if (j == -1) return i;
   }
   return n;
}
```

Próximos passos

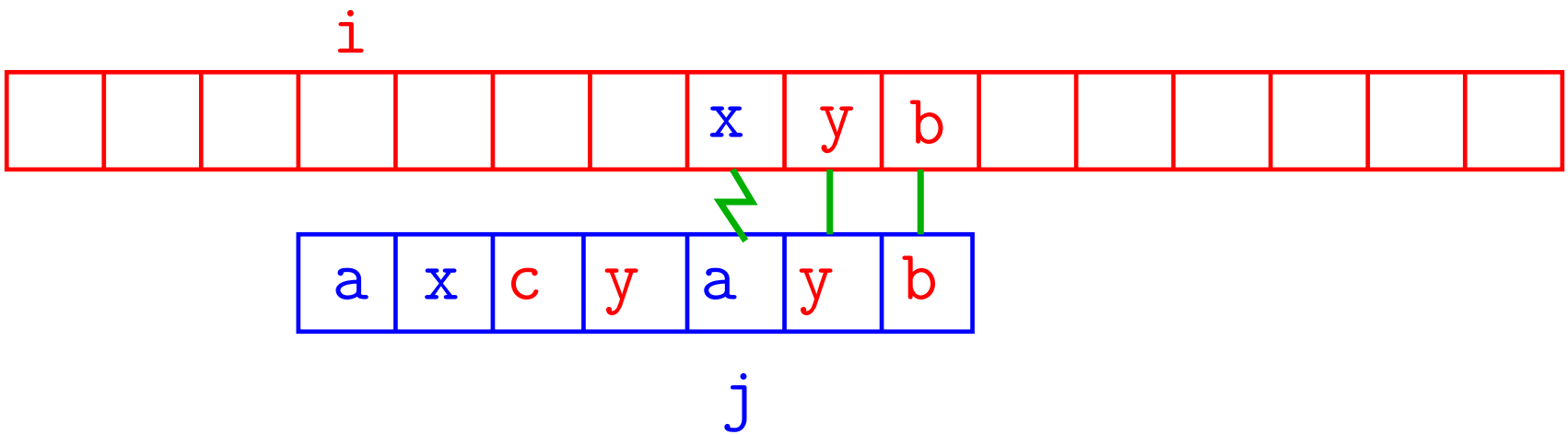
Existe algoritmo mais rápido que o força bruta?

Existe algoritmo que faz apenas `n` comparações entre caracteres?

Existe algoritmo que faz menos que `n` comparações?

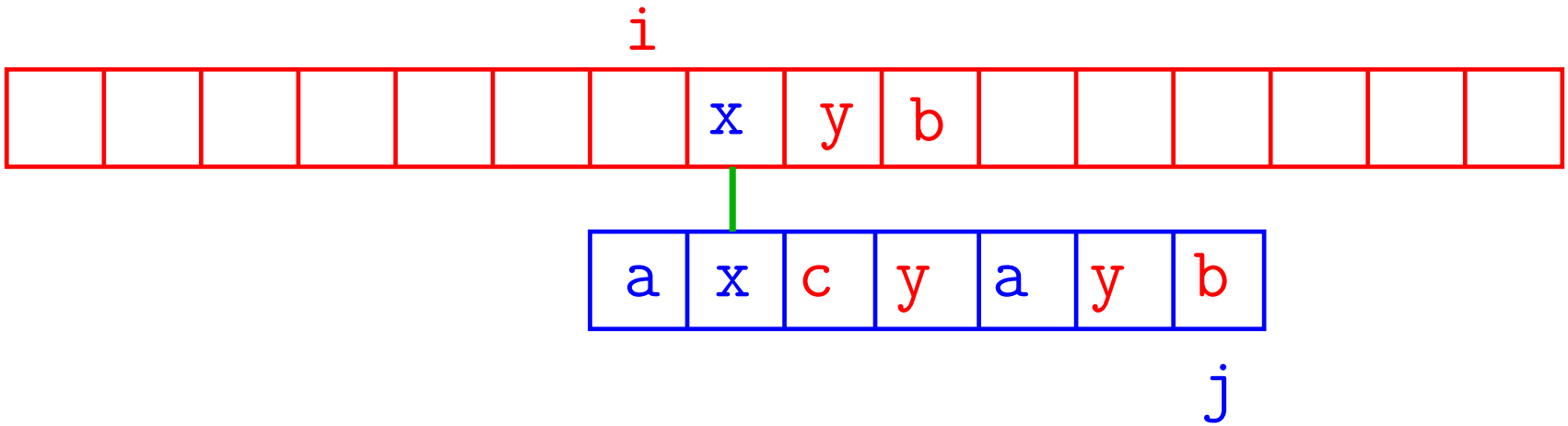
Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Bad-character heuristic

Para implementar essa ideia fazemos um pré-processamento de `pat`, determinando para cada símbolo `x` do alfabeto a posição de sua última ocorrência em `pat`.

`pat`

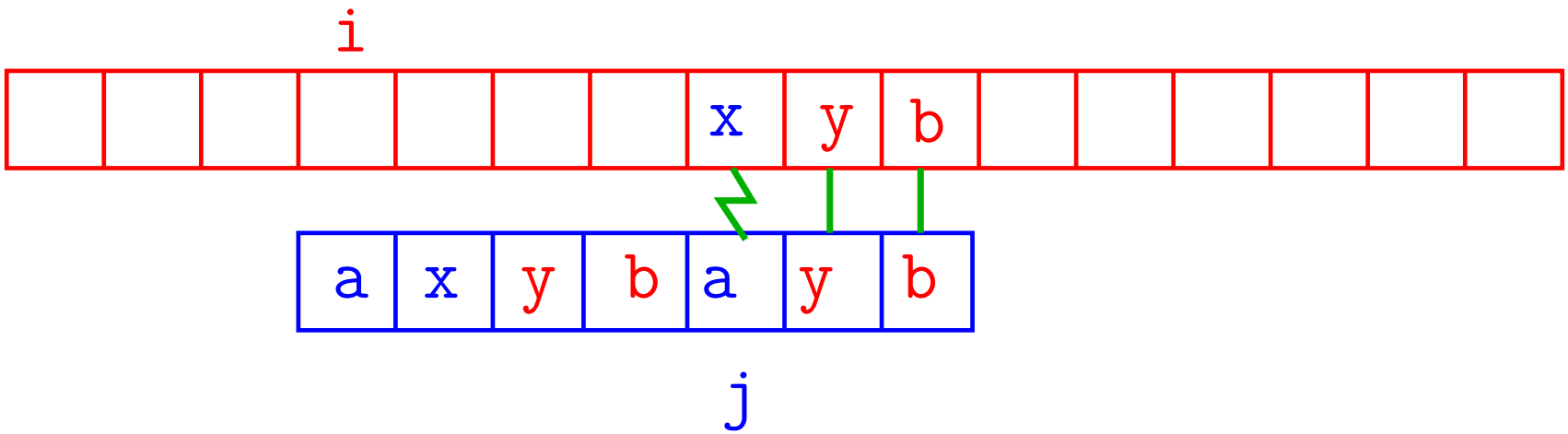
0	1	2	3	4	5	6
a	n	d	a	n	d	o

`right`

0	...	'a'	'b'	'c'	'd'	...	...	'n'	'o'	'p'	...	255
-1	$\ldots$	3	-1	-1	5	$\ldots$	$\ldots$	4	6	-1	$\ldots$	$\ldots$

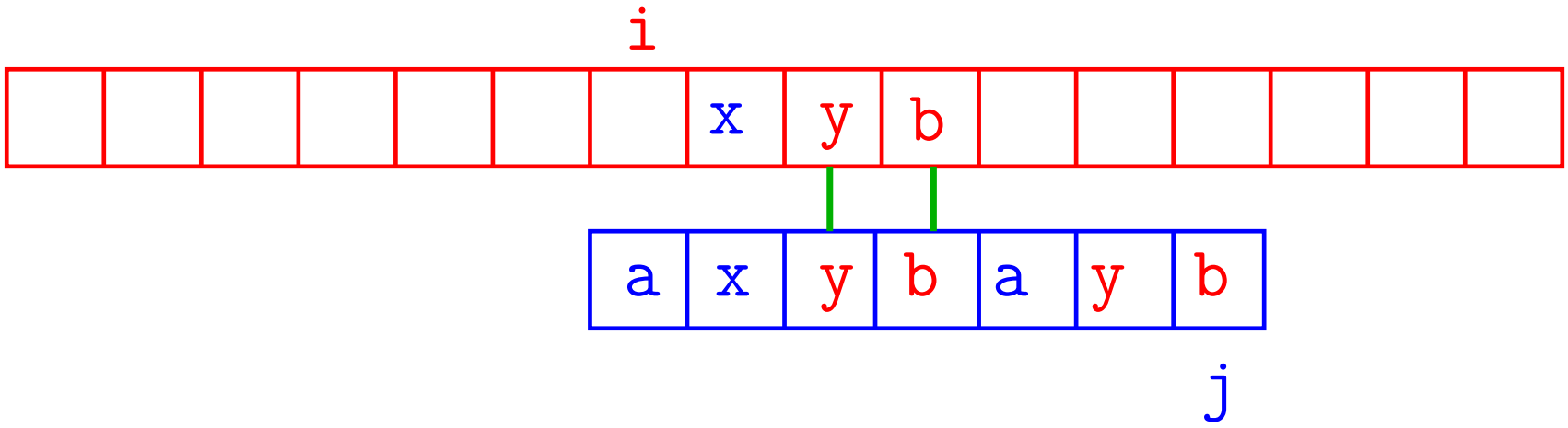
Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Good suffix heuristic

Não precisa conhecer o alfabeto explicitamente.

A implementação deve começar com um pré-processamento de `pat`: para cada `j` em $0, 1, \ldots,$ `m` $- 1$ devemos calcular o maior `k` em $0, 1, \ldots,$ `m` $- 2$ tal que:

- `pat[j..m-1]` é sufixo de `pat[0..k]` ou
- `pat[0..k]` é sufixo de `pat[j..m-1]`

Chamemos de `bm[j]` esse valor `k`.

Good suffix heuristic

Exemplo 1:

	0	1	2	3	4	5
pat	c	a	a	b	a	a

	0	1	2	3	4	5
bm	−1	−1	−1	−1	2	4

Exemplo 2:

	0	1	2	3	4	5	6	7
pat	b	a	–	b	a	∗	b	a

	0	1	2	3	4	5	6	7
bm	1	1	1	1	1	1	4	4

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo BoyerMoore no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo do algoritmo BoyerMoore no melhor caso é $O(n/m)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a mn e no melhor caso o algoritmo é **sublinear**.

Prato do dia

Algoritmos que consomem tempo $O(n + m)$:

- Knuth, Morris e Pratt;
  ferramenta: autômato finito
  operação básica: `charAt()`
- Rabin e Karp;
  ferramenta: hash
  operações básica: $+, -, \times, \%$

AULA 25

Algoritmo KMP para busca de substring

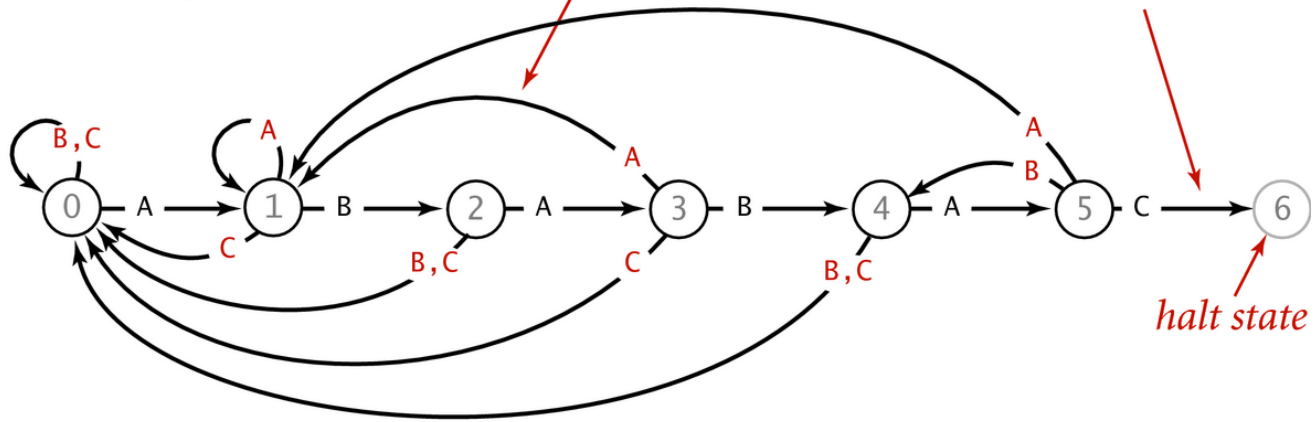
internal representation

j	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6

mismatch transition (back up)

match transition (increment)

graphical representation



DFA corresponding to the string A B A B A C

Algoritmo de força bruta

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a	b	a	b																				
1		a																						
2			a	b																				
3				a	b	a	b	b																
4					a																			
5						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b									
6							a																	
7								a	b	a														
8									a															
9										a														
10											a	b	a	b										
11												a												
12													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Algoritmo de força bruta: versão alternativa

```
public static
int search(String pat, String txt) {
   int i, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();
   for(i=0, j=0; i < n && j < m; i++) {
       if(txt.charAt(i)==pat.charAt(j))j++;
       else {
           i -= j; // retrocesso
           j = 0;
       }
   }
   if (j == m) return i - m;
   return n; }
```

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T

0 a

1 a b

2 a b a

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

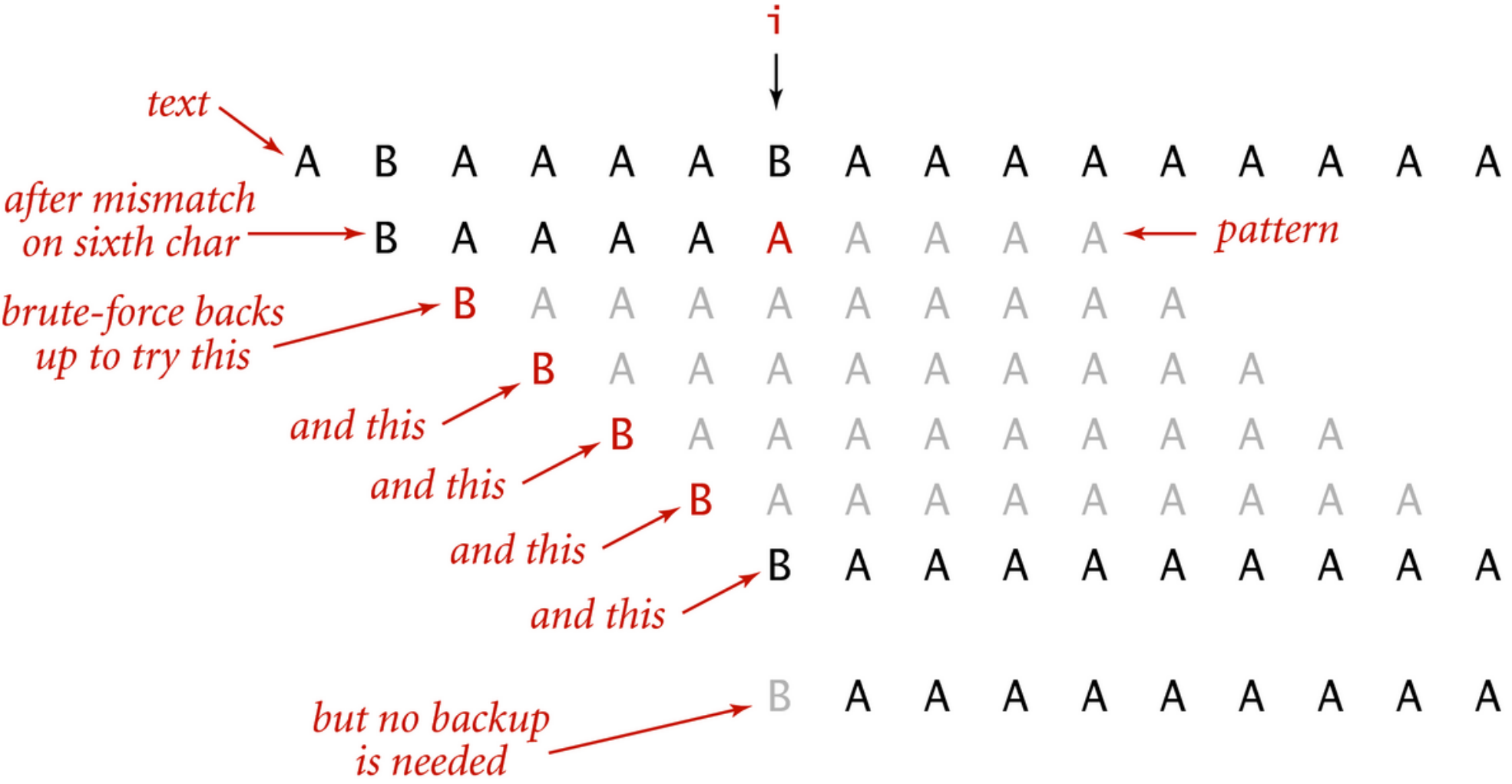
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo

$P =$ a b a b b a b a b b a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
0	a																							
1	a	b																						
2	a	b	a																					
3				a																				
4				a	b																			
5				a	b	a																		
6				a	b	a	b																	
7						a	b	a																
8						a	b	a	b															
9						a	b	a	b	b														
10						a	b	a	b	b	a													
11						a	b	a	b	b	a	b												
12						a	b	a	b	b	a	b	a											
13						a	b	a	b	b	a	b	a	b										
14													a	b	a									
15													a	b	a	b								
16													a	b	a	b	b							
17													a	b	a	b	b	a						

Ideia básica do algoritmo



Text pointer backup in substring searching

Ideia geral

Quando encontramos um conflito entre `txt[i]` e `pat[j]`, **não** é necessário retroceder `i` e passar a comparar `txt[i-j+1 . . ]` com `pat[0 . . ]`.
Basta:

> *encontrar o comprimento do maior prefixo de `pat[0 . . ]` que é sufixo de `txt[. . i]`,*

ou seja,

> *encontrar o maior `k` tal que*
> *`pat[0 . . k-1]` é igual a*
> *`txt[i-k+1 . . i]` que é igual a*
> *`pat[j-k+1 . . j-1]+txt[i]`,*

e passar a comparar `txt[i+1 . . ]` com `pat[k..]`.

Ideia geral

Exemplo: texto `CAABAABAAAA` e padrão `AABAAA`: depois do conflito entre `txt[6]` e `pat[5]`, não precisamos retroceder no texto: podemos continuar e comparar `txt[7..]` com `pat[3..]`:

```
                      C A A B A A B A A A A
                      ---------------------
      uma tentativa:    A A B A A A
  não precisa tentar:     A A B A A A
  não precisa tentar:       A A B A A A
   próxima tentativa:         A A B A A A
```

Algoritmo KMP

Examina os caracteres de `txt` um a um, da esquerda para a direita, sem nunca retroceder.

Em cada iteração, o algoritmo sabe qual posição `k` de `pat` deve ser emparelhada com a próxima posição `i+1` de `txt`.

Ou seja, no fim de cada iteração, o algoritmo sabe qual índice `k` deve fazer o papel de `j` na próxima iteração.

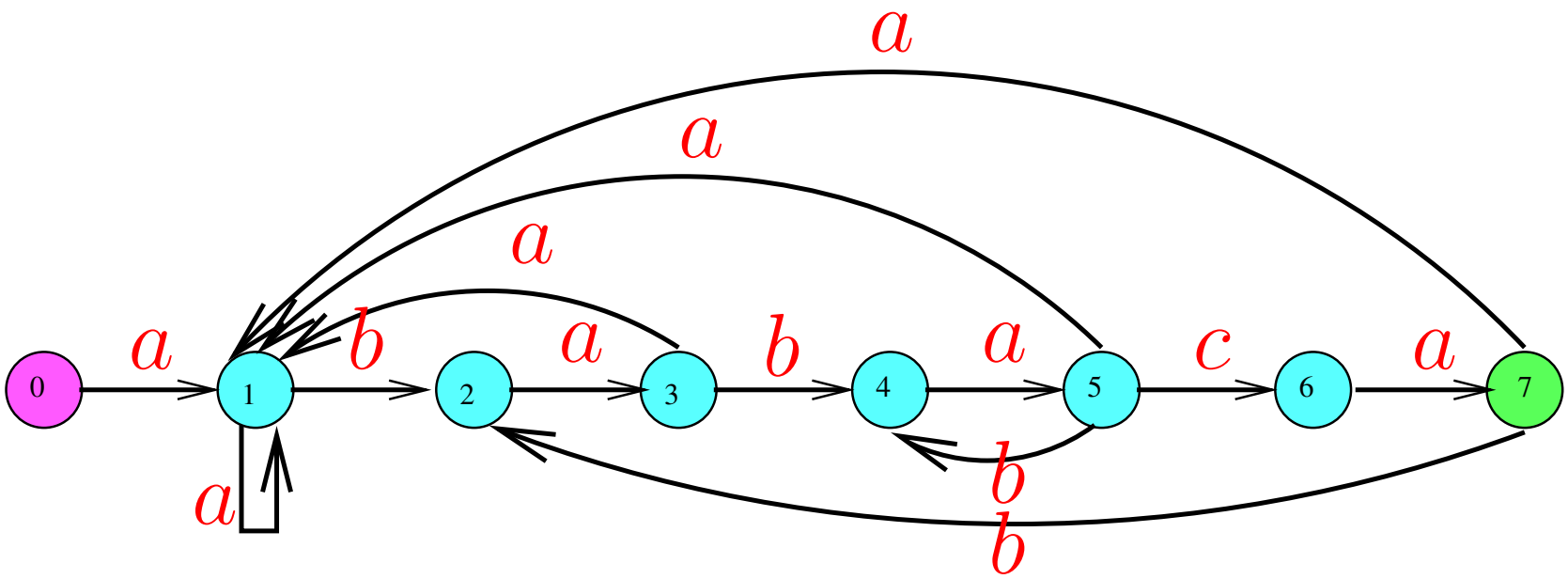
Algoritmo KMP

O algoritmo KMP usa uma tabela `dfa[][]` que armazena os `índices mágicos` `k`.

O nome da tabela deriva da expressão *deterministic finite-state automaton*.

As colunas da tabela são indexadas pelos índices `0 . . m-1` do padrão e as linhas são indexadas pelo alfabeto, que é o conjunto de todos os caracteres do texto e do padrão.

Autômato de estados determinístico (DFA)



$0 \ldots 7 =$ conjunto de estados

$\Sigma = \{\text{a, b, c}\} =$ alfabeto

$\delta =$ função de transição

0 é estado inicial e 7 é estado final

Exemplo: pat = ABABAC

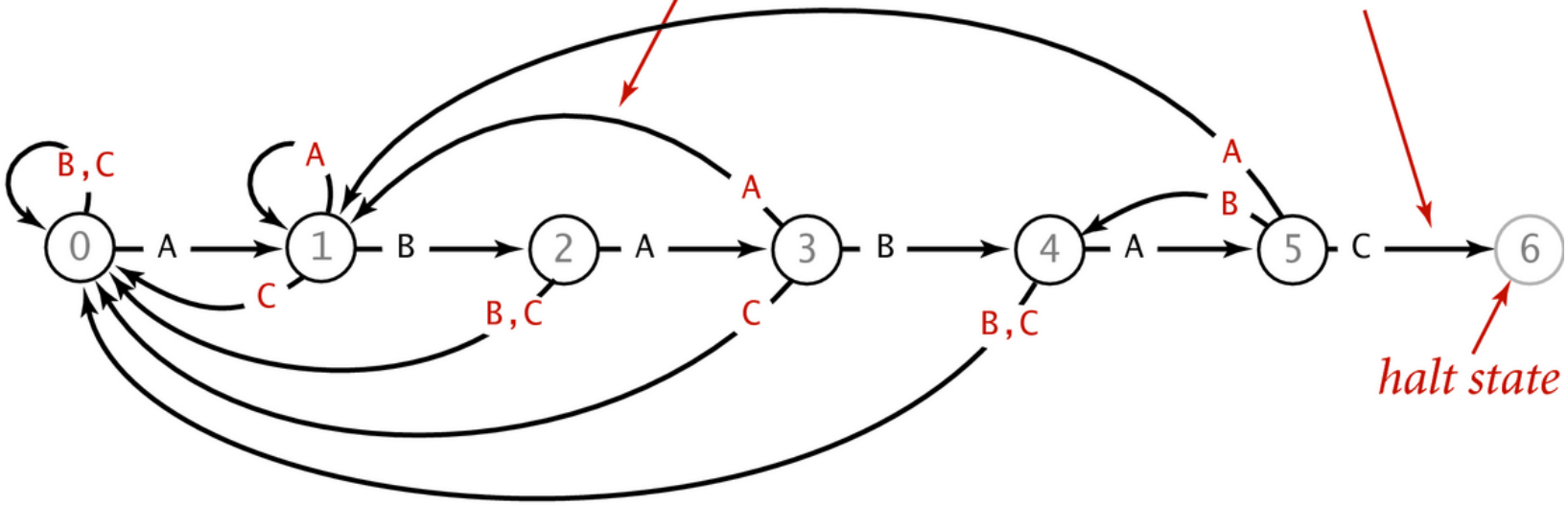
internal representation

	j	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

mismatch transition (back up)

match transition (increment)

graphical representation



Autômato finito determinístico (DFA)

O algoritmo KMP simula o funcionamento do autômato de estados.

O autômato começa no estado 0 e examina os caracteres do texto, um de cada vez, da esquerda para a direita, mudando para um novo estado cada vez que lê um caractere do texto.

Se atingir o estado `m`, dizemos que o autômato reconheceu ou aceitou o padrão.

Se chegar ao fim do texto sem atingir o estado `m`, sabemos que o padrão não ocorre no texto.

Autômato finito determinístico (DFA)

O autômato está no estado `j` se acabou de casar os `j` primeiros caracteres do padrão com um segmento do texto, ou seja, se acabou de casar `pat[0..j-1]` com `txt[i-j..i-1]`.

Para cada estado `j`, a transição que corresponde ao caractere `pat[j]` é de casamento e leva ao estado `j+1`.

Todas as outras transições que começam no estado `j` são de conflito e levam a um estado $\leq$ `j`.

O autômato de estados é uma ideia **muito importante** em compilação, na teoria da computação, etc.

Autômato finito determinístico (DFA)

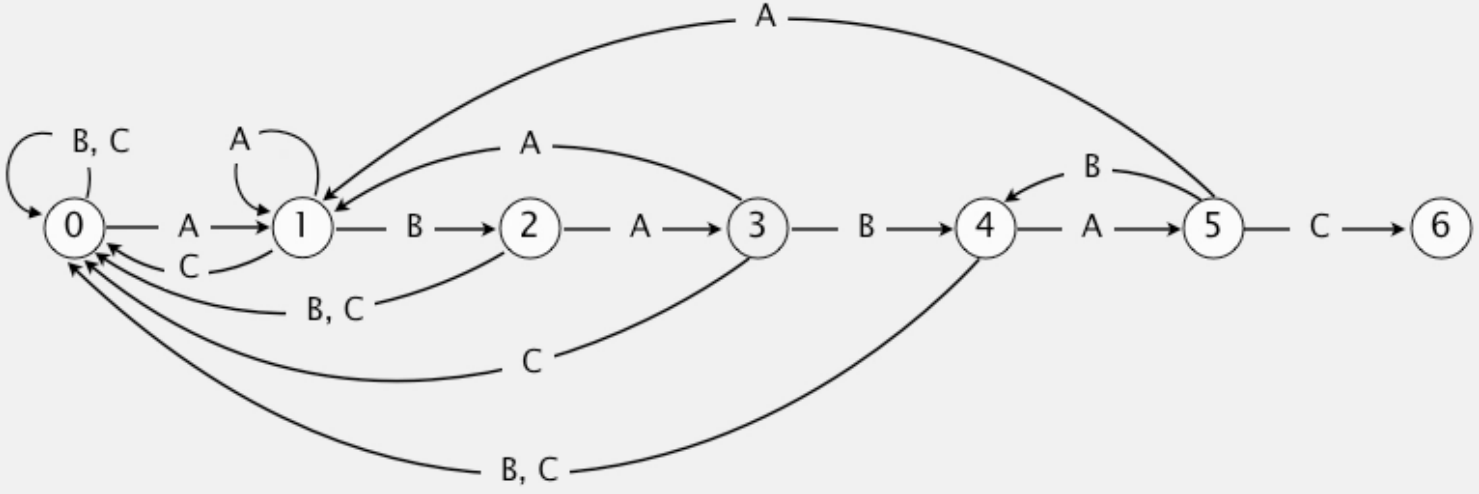
Um **autômato finito** é formado uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finitos de estados,
- Σ é um conjunto finito chamado alfabeto,
- $\delta : Q \times \Sigma$ é a função de transição,
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial, e
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de aceitação.

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

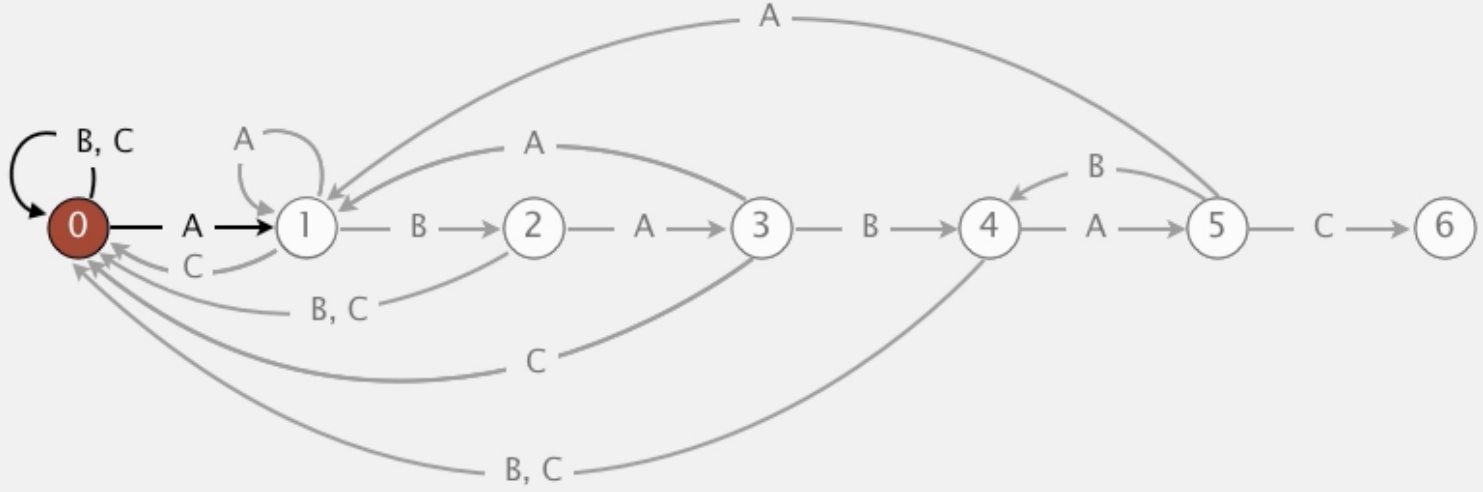


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

pat.charAt(j)	0	1	2	3	4	5
	A	B	A	B	A	C
A	1	1	3	1	5	1
B	0	2	0	4	0	4
C	0	0	0	0	0	6

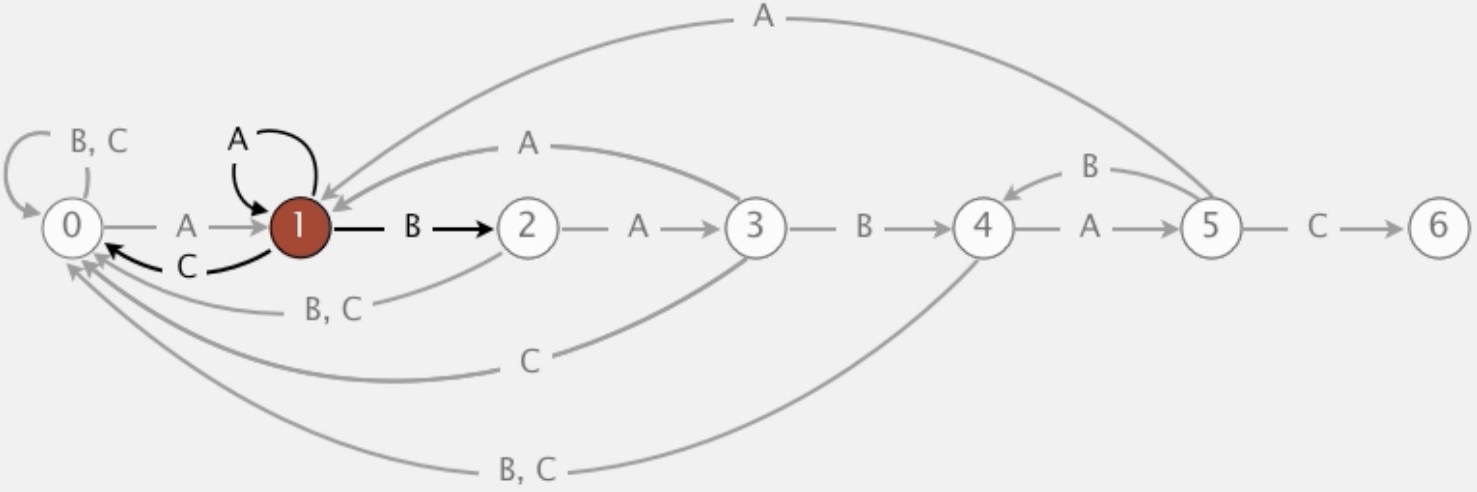
dfa[][j]



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

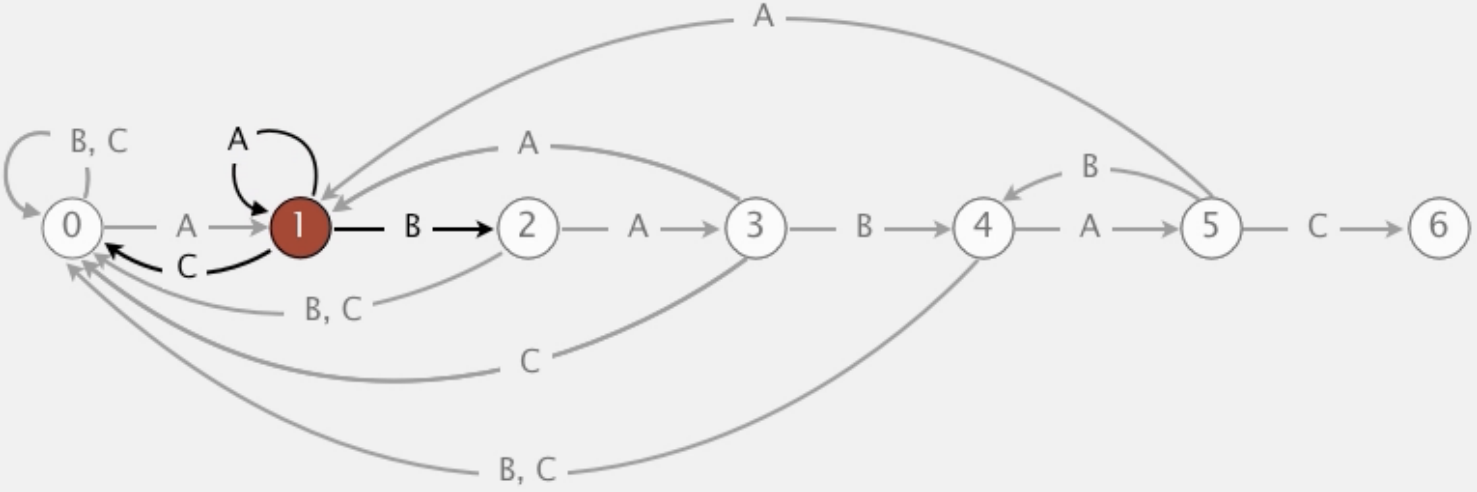
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

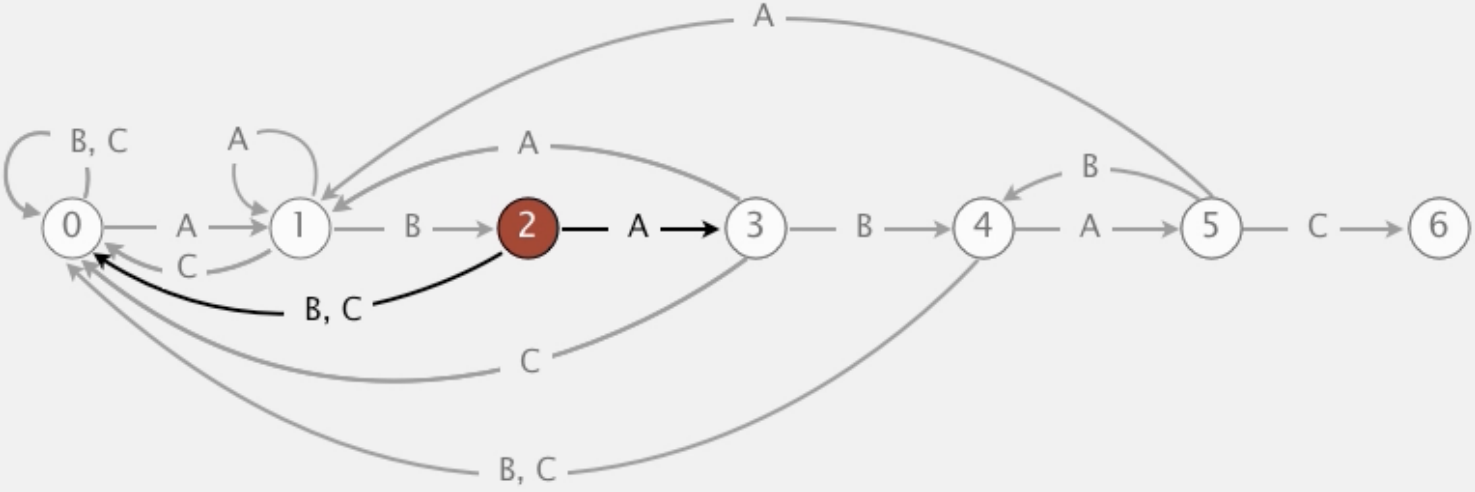
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

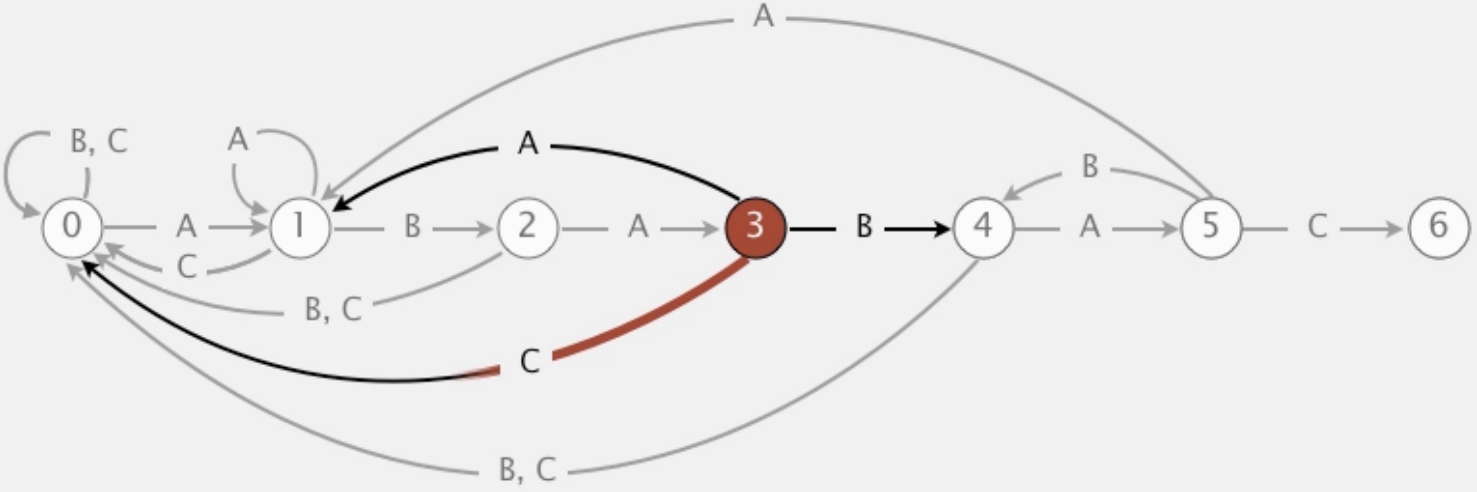
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

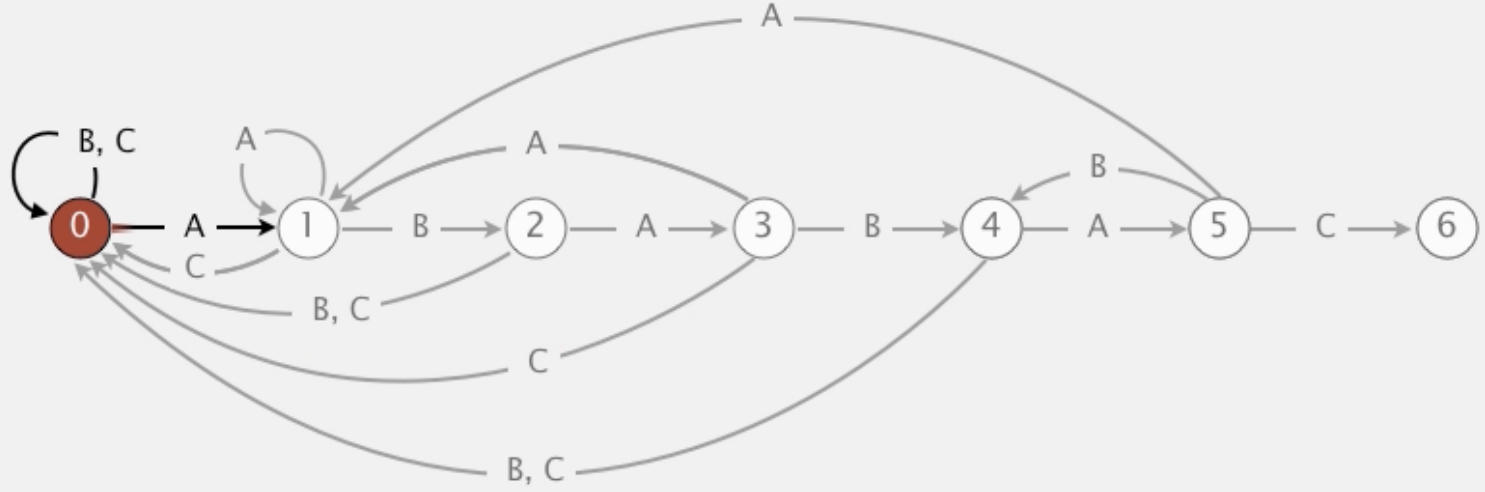
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

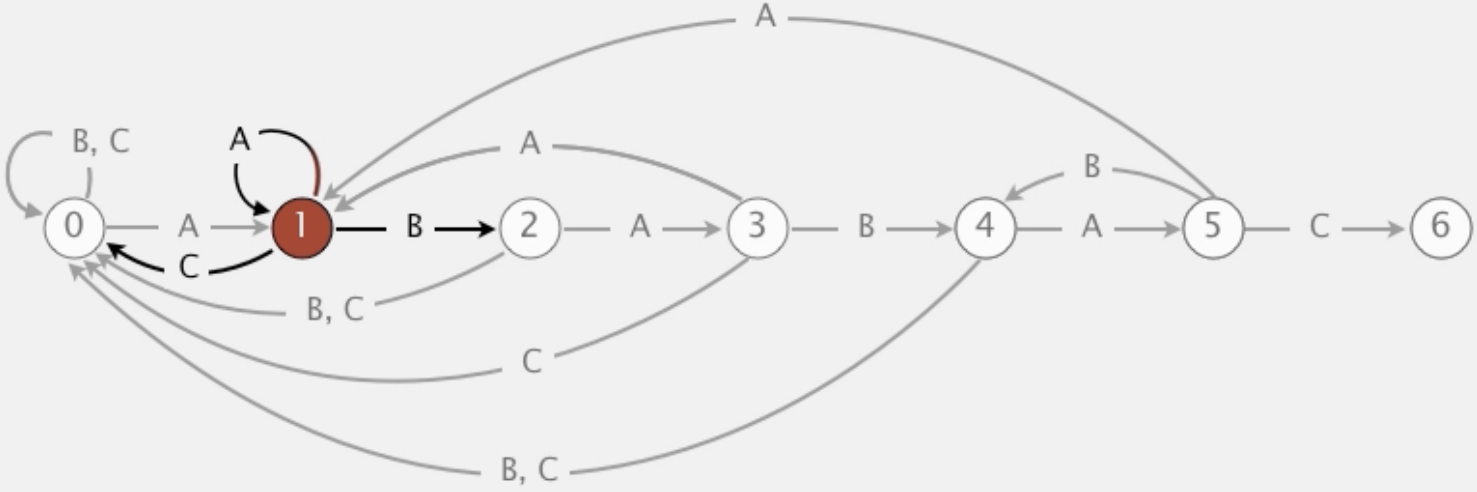
		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

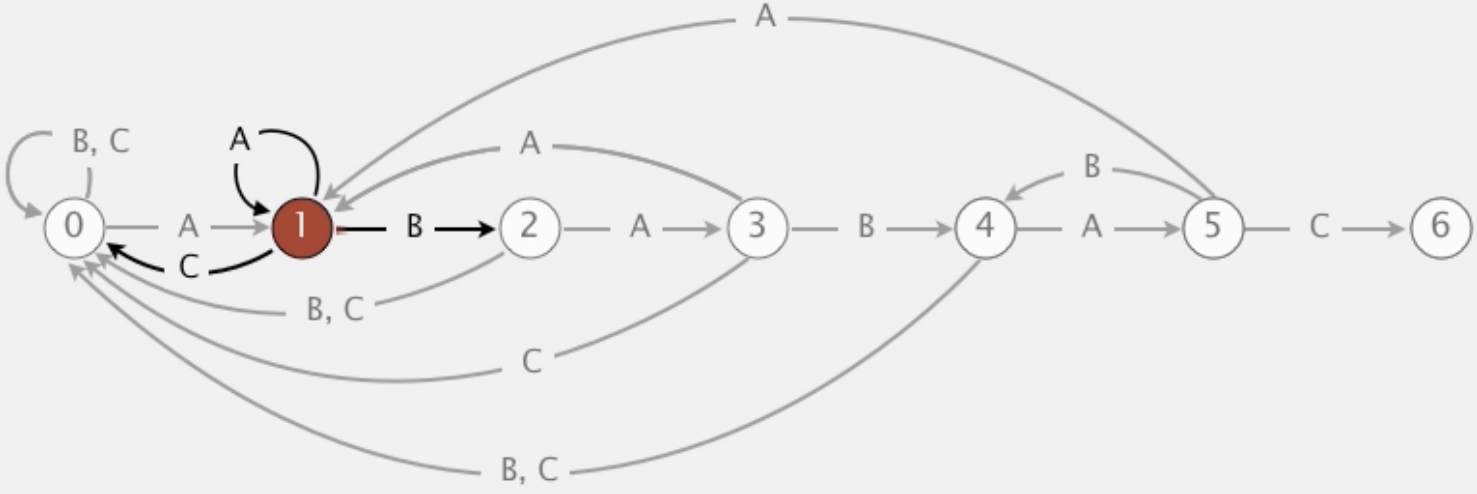
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

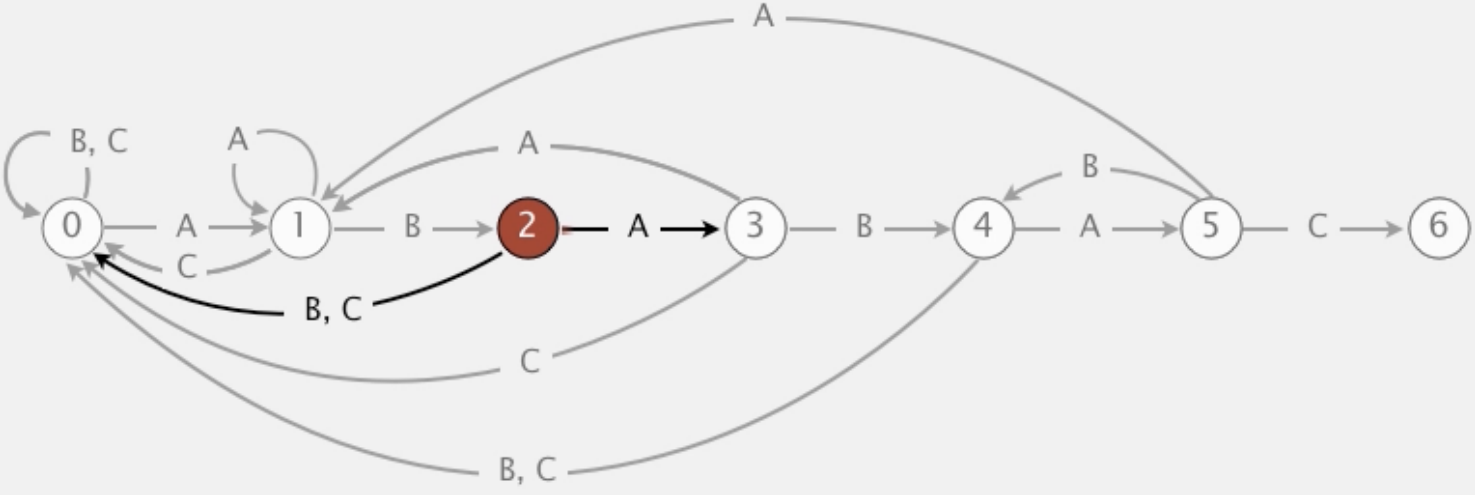
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

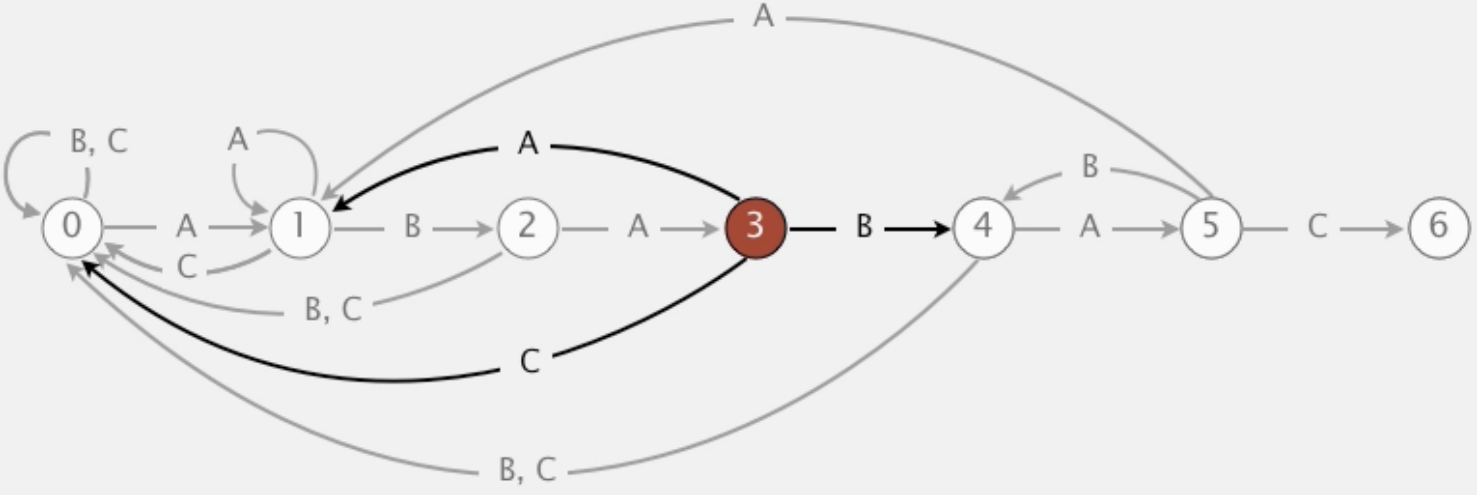
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

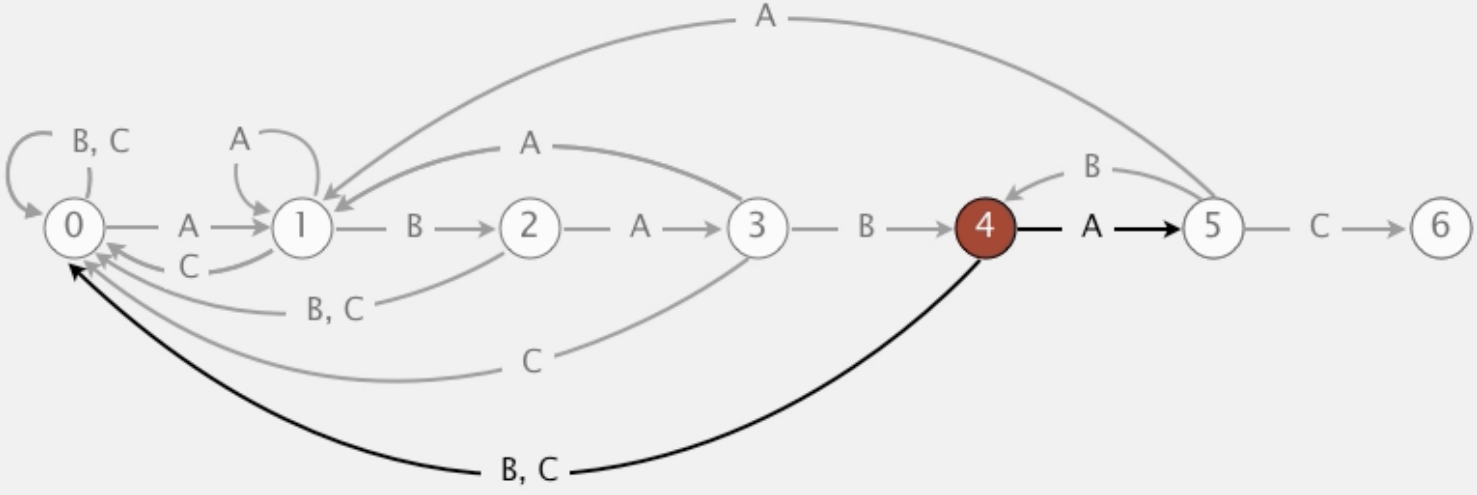
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

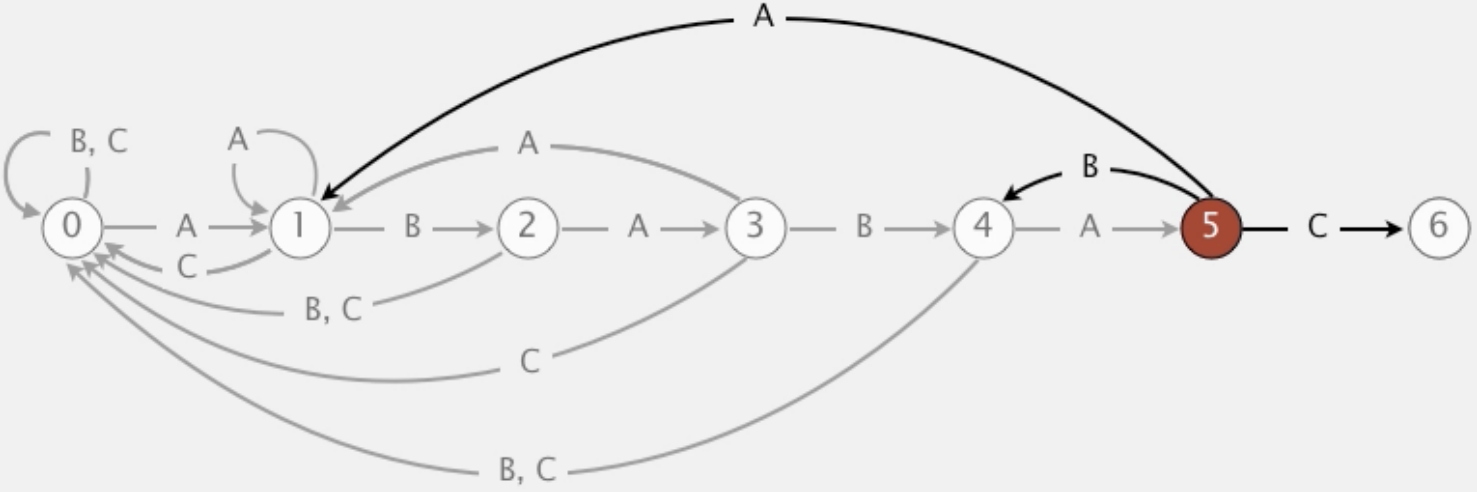
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

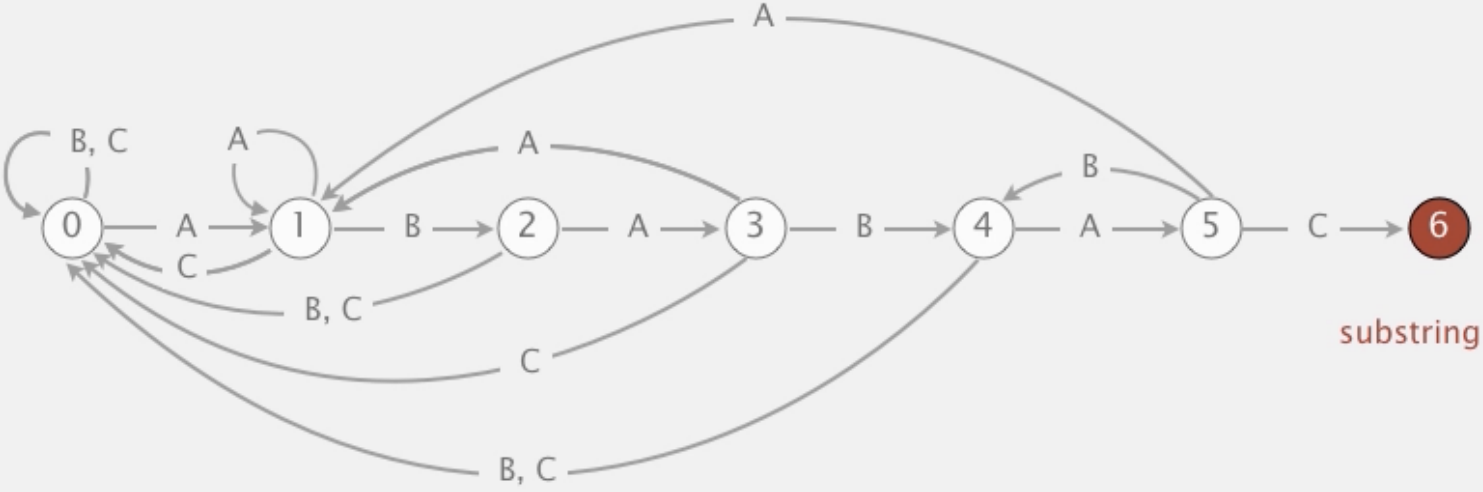
	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA simulation

A A B A C A A B A B A C A A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6



substring found

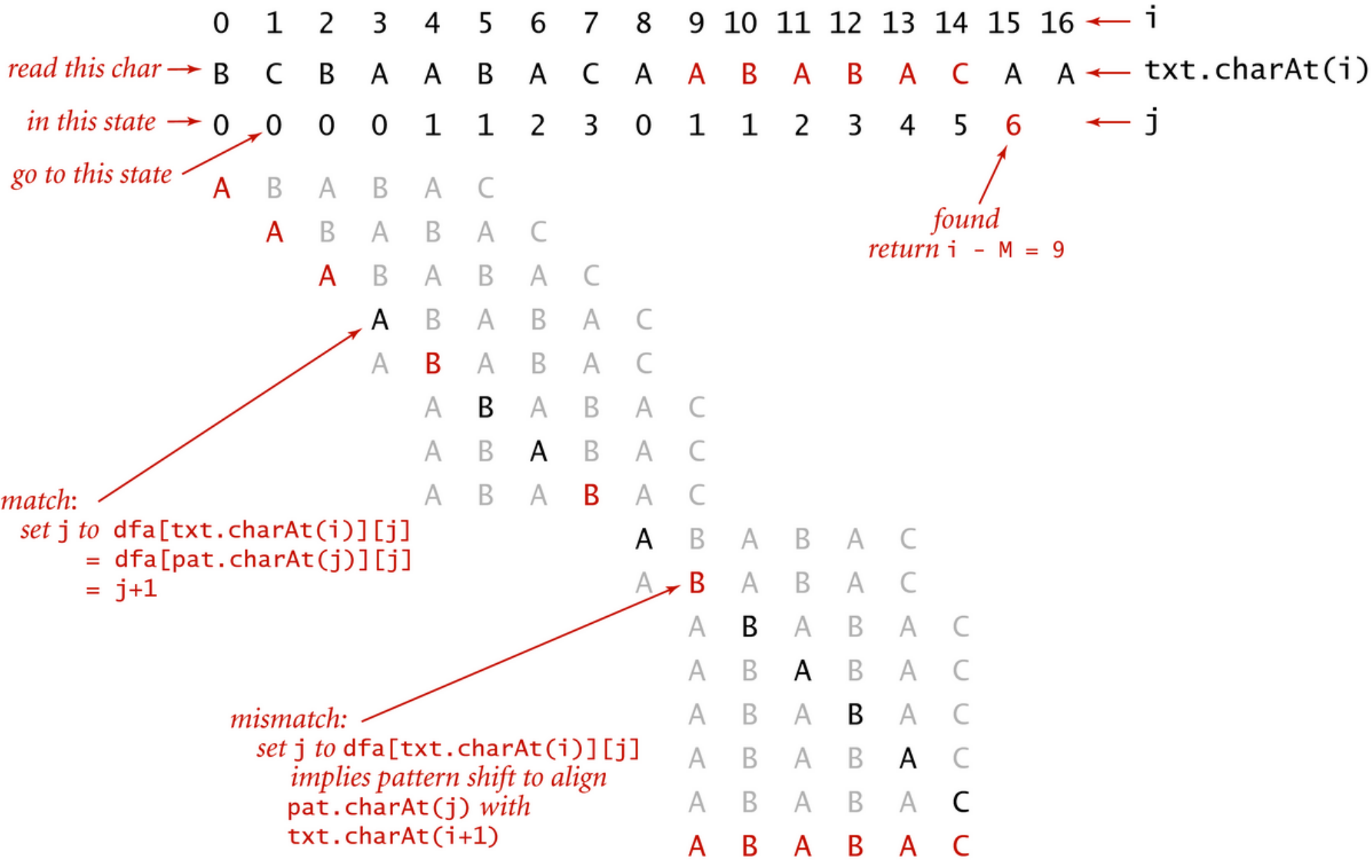
Algoritmo KMP

Retorna a posição a partir de onde pat ocorre em txt se pat não ocorre em txt retorna n.

```
public int search(String txt) {
   int i, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();

   for (i = 0, j = 0; i < n && j < m; i++)
       j = dfa[txt.charAt(i)][j];

   if (j == m) return i - m;
   return n;
}
```



Trace of KMP substring search (DFA simulation) for A B A B A C

Invariantes

O método `search()` de KMP tem os seguintes invariantes.

Imediatamente antes do teste `i < n && j < m` vale que:

- `pat` não ocorre em `txt[0 . . i-1]`;
- `pat[0 . . k]` é diferente de `txt[i-k . . i]` para todo `k` no conjunto `j+1 . . m-1`; e
- `pat[0 . . j-1]` é igual a `txt[i-j . . i-1]`.

Autômato de estados determinístico (DFA)

A tabela `dfa[][]` representa uma máquina imaginária conhecida como **autômato de estados** (*deterministic finite-state automaton, DFA*).

Os estados do autômato correspondem aos índices `0 . . m-1` de `pat`.

Também há um estado *final* `m`.

Para cada estado e cada caractere do alfabeto, há uma transição que leva desse estado a um outro.

Construção do DFA

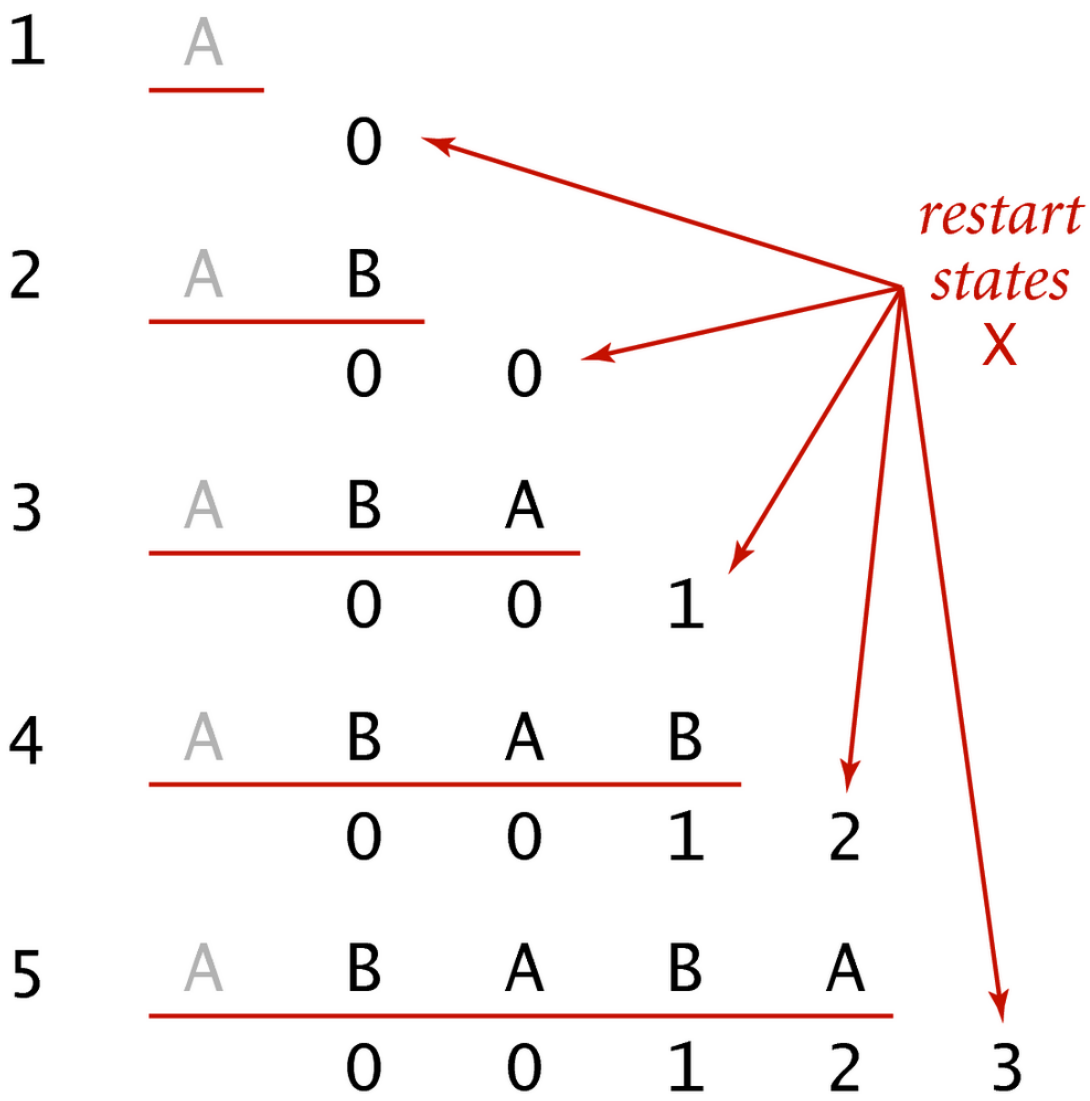
Para construir a tabela `dfa[][]` que representa o autômato podemos pré-processar o padrão `pat` desde que o alfabeto de `txt` seja conhecido.

Para qualquer caractere `c` do alfabeto e qualquer `j` em `0..m-1`, o valor de `dfa[c][j]` é

> *o comprimento do maior prefixo de `pat[0..j]` que é sufixo de `pat[0..j-1]+c`.*

Uma implementação literal dessa definição faria cerca de Rm^3 comparações entre caracteres para calcular a tabela `dfa[][]`, sendo `R` o número de caracteres do alfabeto.

Exemplo: padrão ABABAC e alfabeto A B C



DFA simulations to compute

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Include one state for each character in pattern (plus accept state).

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A						
dfa[][j] B						
dfa[][j] C						

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

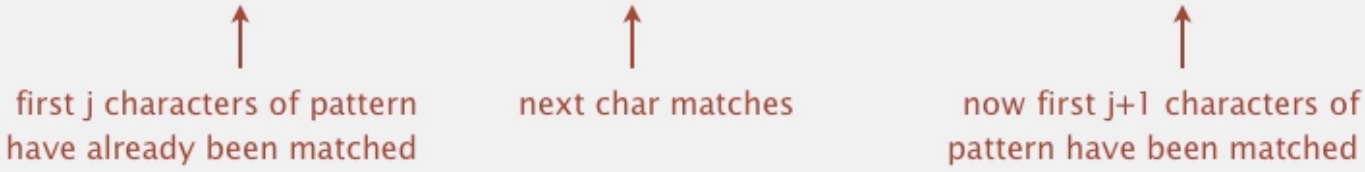
Include one state for each character in pattern (plus accept state).

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A						
dfa[][j] B						
dfa[][j] C						

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Match transition. If in state `j` and next char `c == pat.charAt(j)`, go to `j+1`.



		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B		2		4		
	C						6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
A	1		3		5	
dfa[][j] B		2		4		
C						6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
	A	1		3		5	
dfa[][j]	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1		3		5	
dfa[][j] B	0	2		4		
dfa[][j] C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3		5	
dfa[][j] B	0	2		4		
dfa[][j] C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3		5	
dfa[][j] B	0	2		4		
dfa[][j] C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

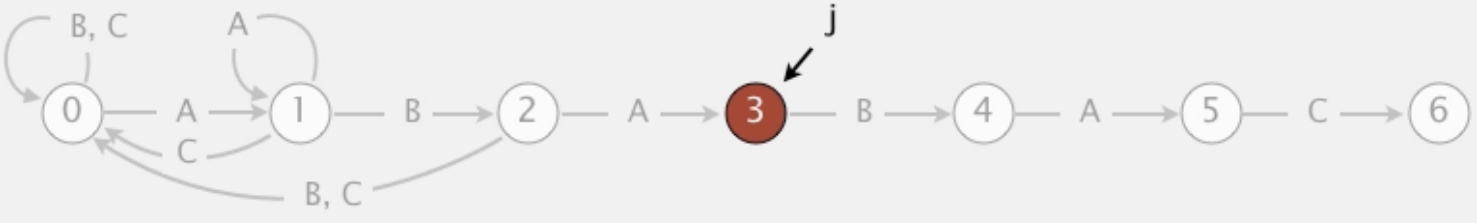
Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3		5	
dfa[][j] B	0	2	0	4		
dfa[][j] C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

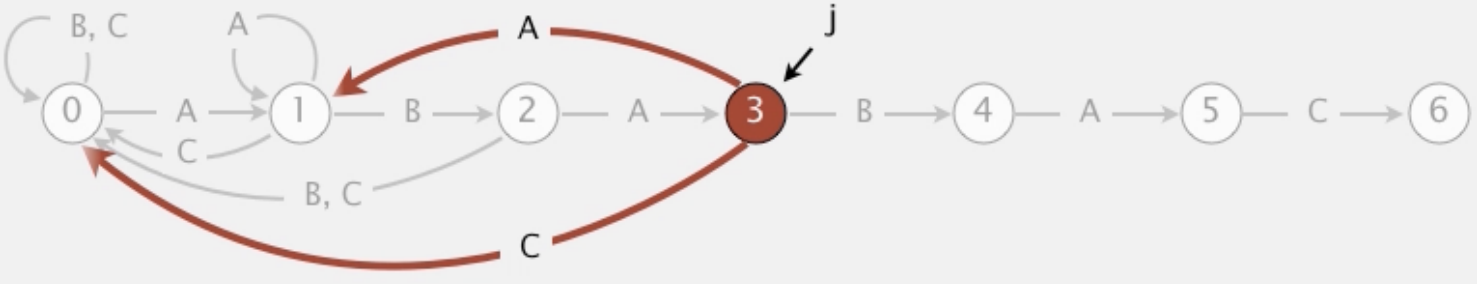


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	
dfa[][j] B	0	2	0	4		
dfa[][j] C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

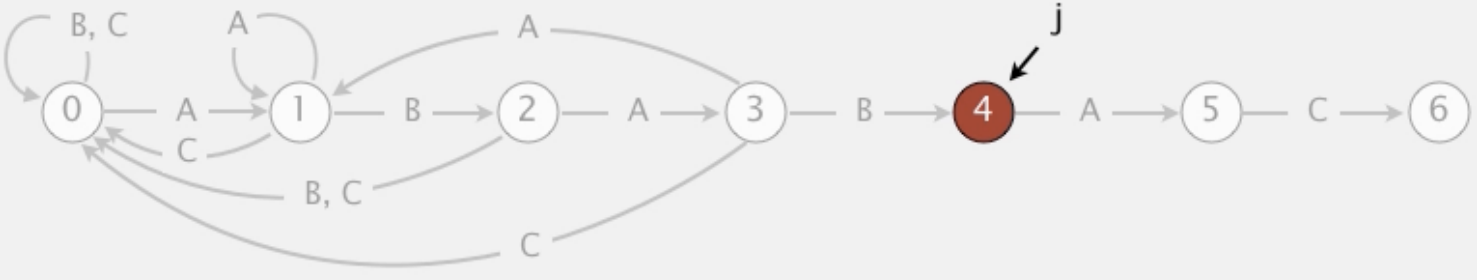


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

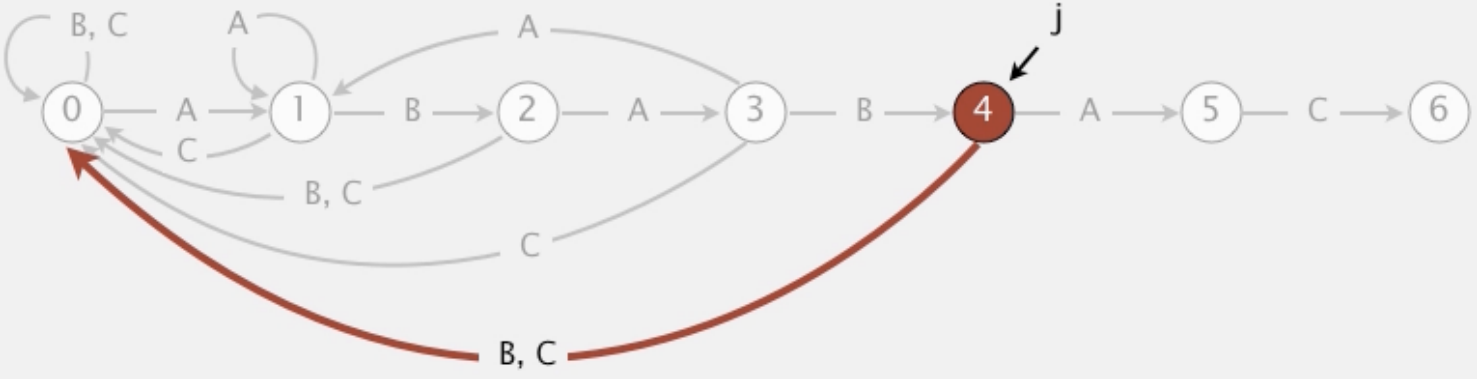


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4	0	
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

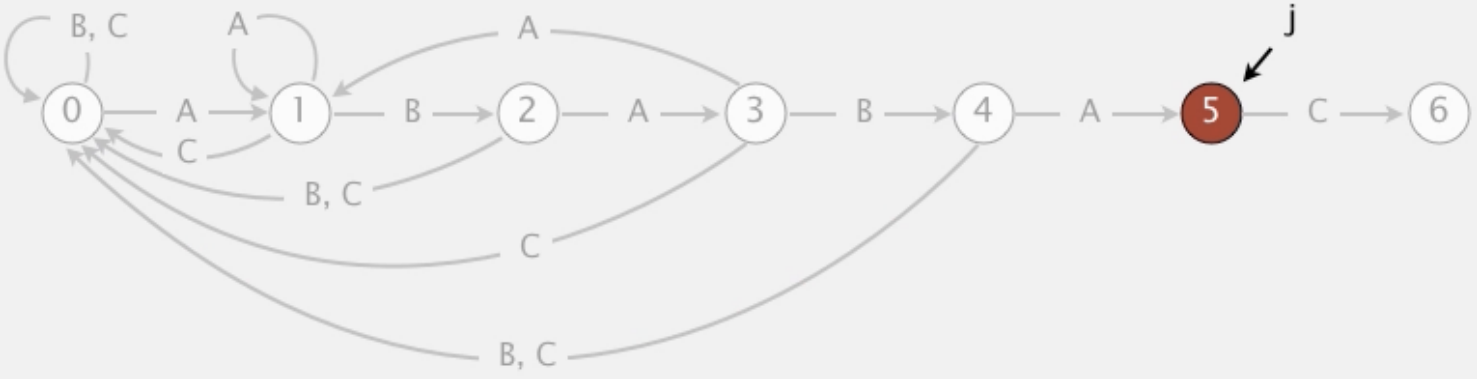


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

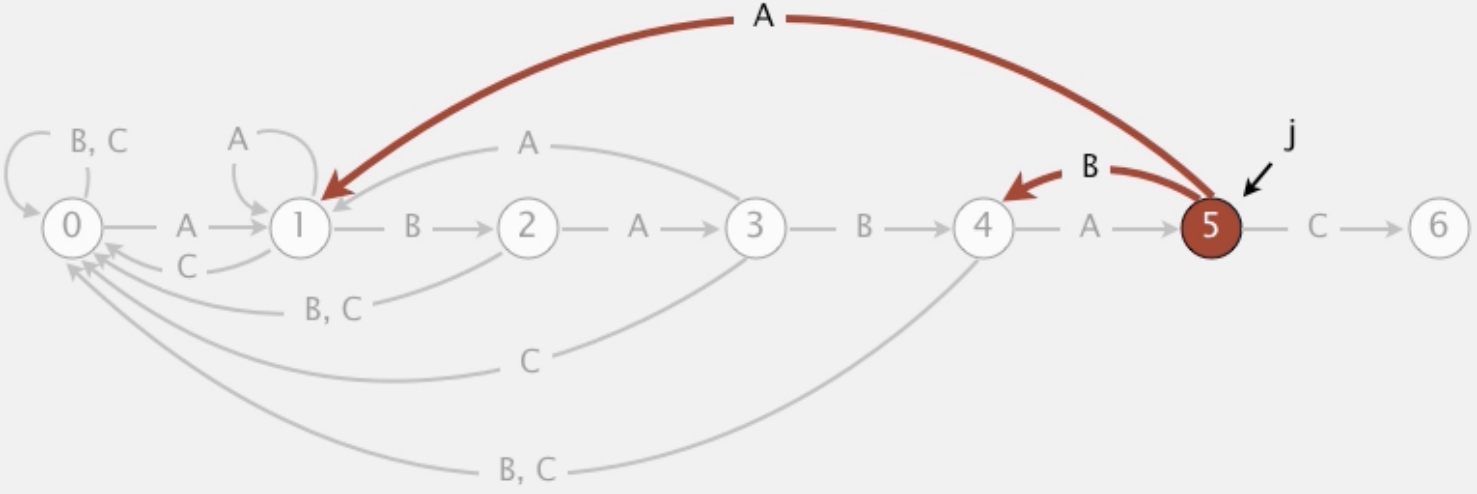


Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

Mismatch transition: back up if `c != pat.charAt(j)`.

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6

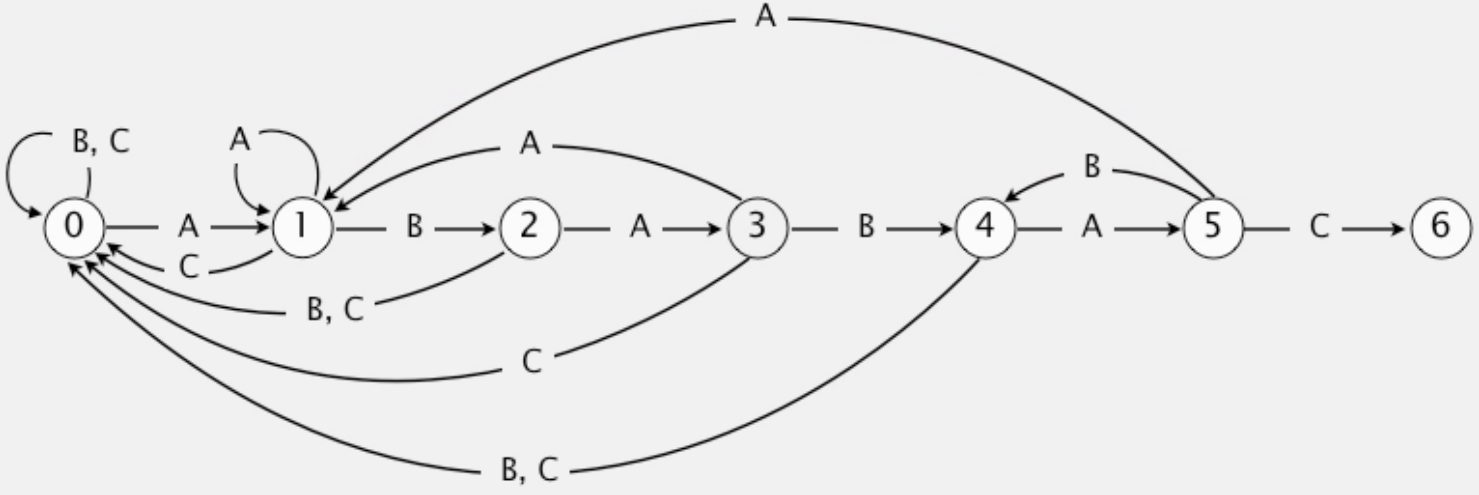
Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Include one state for each character in pattern (plus accept state).

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A						
dfa[][j] B						
dfa[][j] C						

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Match transition. For each state `j`, `dfa[pat.charAt(j)][j] = j+1`.

first j characters of pattern have already been matched

now first j+1 characters of pattern have been matched

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1		3		5	
dfa[][j] B		2		4		
dfa[][j] C						6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For state `0` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][0] = 0`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For state `0` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][0] = 0`.

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of empty string

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1		3		5	
	B	0	2		4		
	C	0					6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of empty string

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of empty string

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2		4		
	C	0	0				6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3		5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C

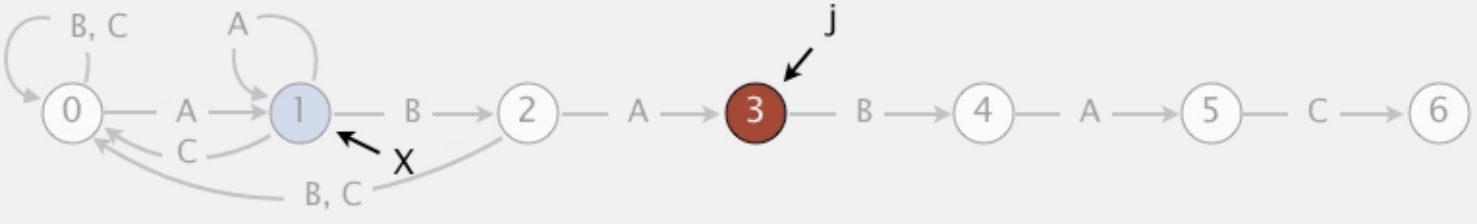
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3		5	
dfa[][j] B	0	2	0	4		
dfa[][j] C	0	0	0			6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



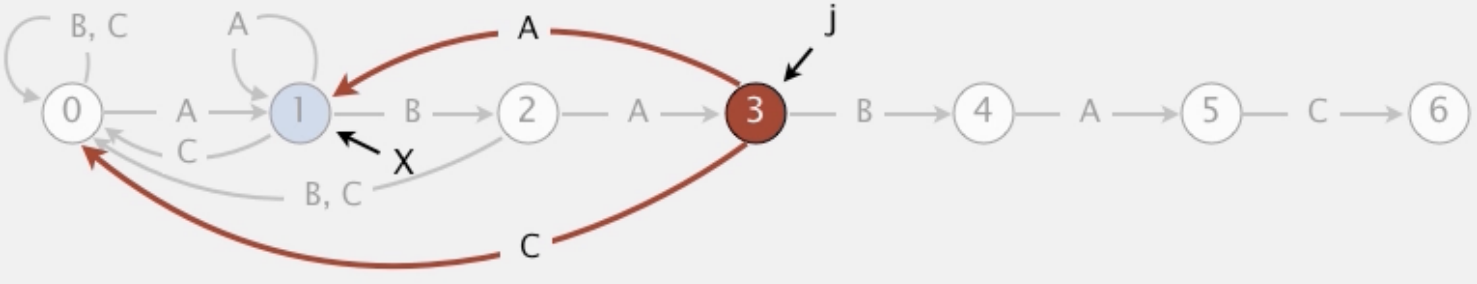
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



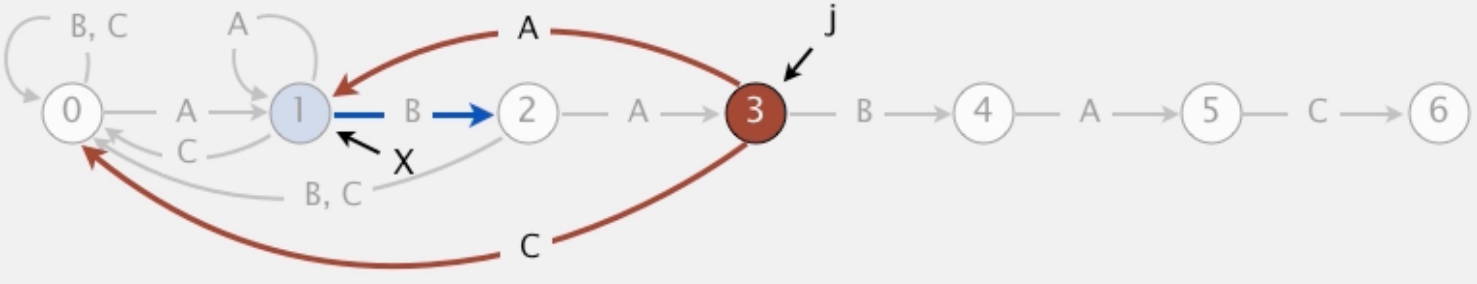
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	
	B	0	2	0	4		
	C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



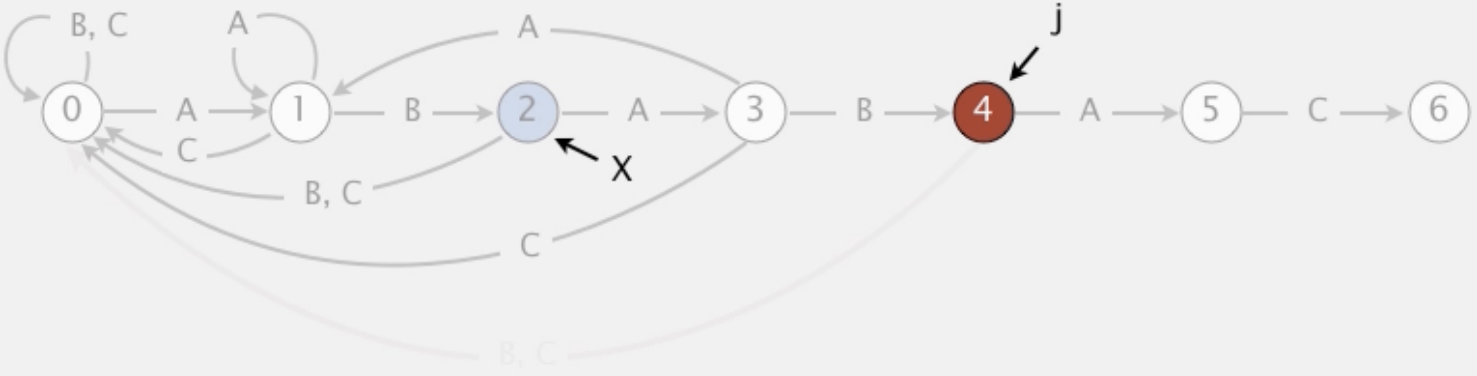
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	
dfa[][j] B	0	2	0	4		
dfa[][j] C	0	0	0	0		6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



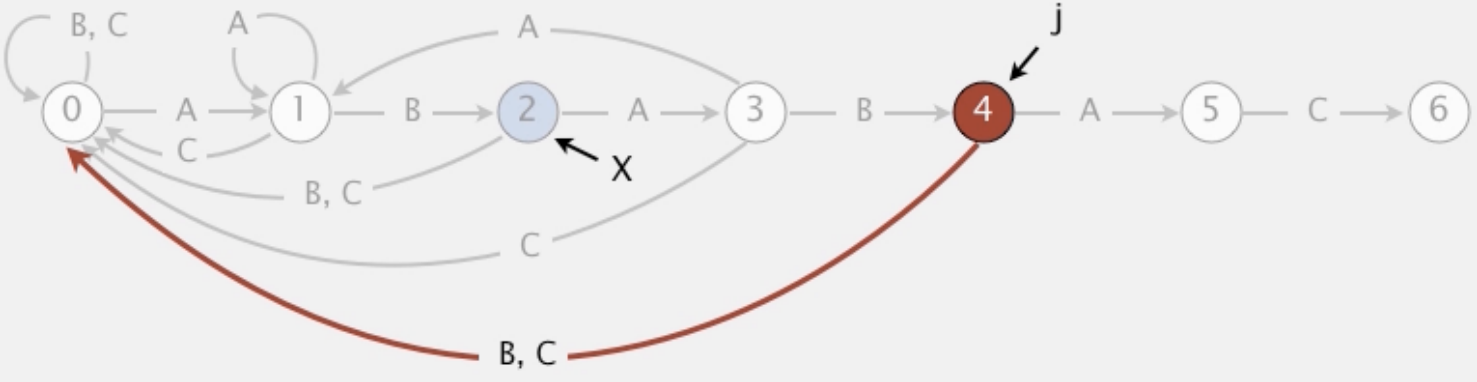
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



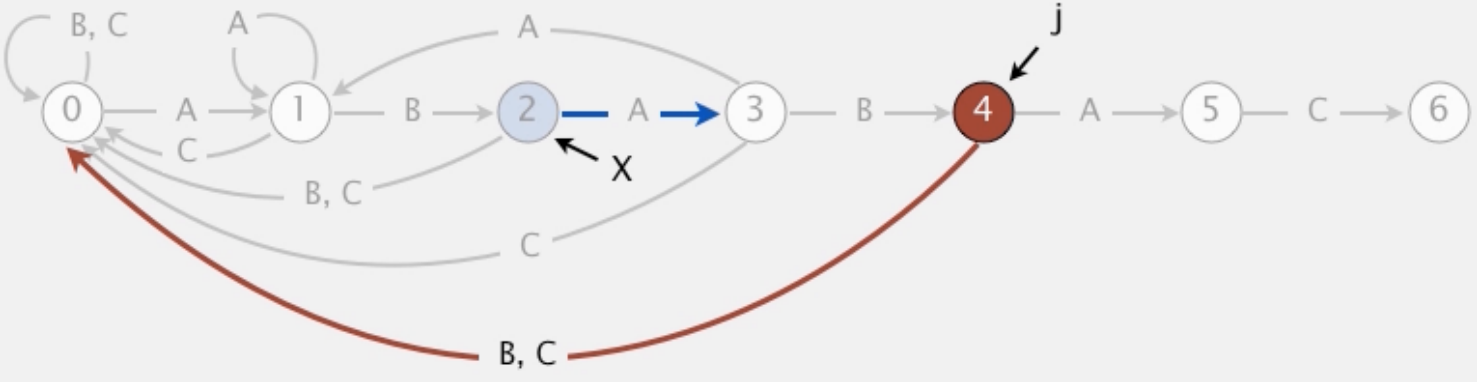
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



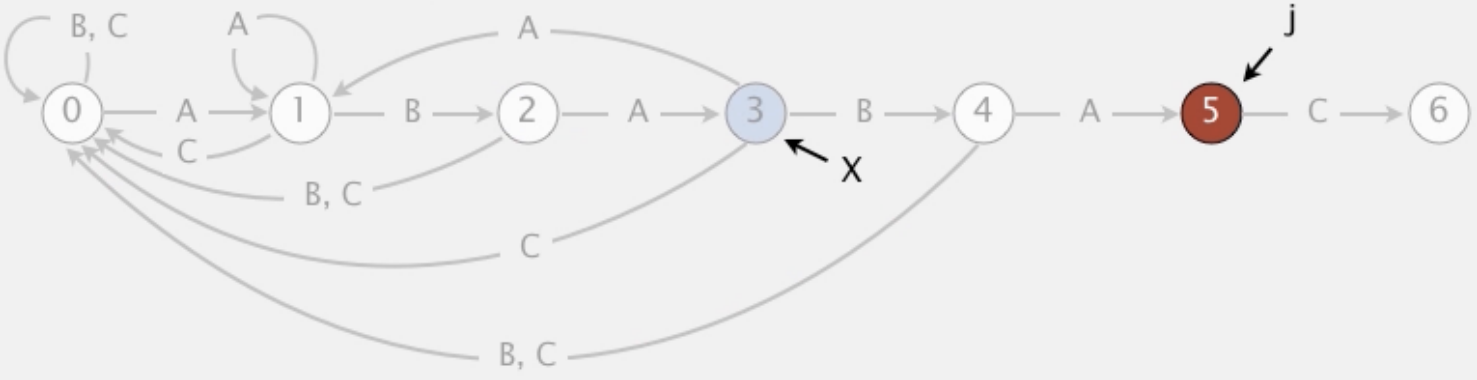
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B A

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



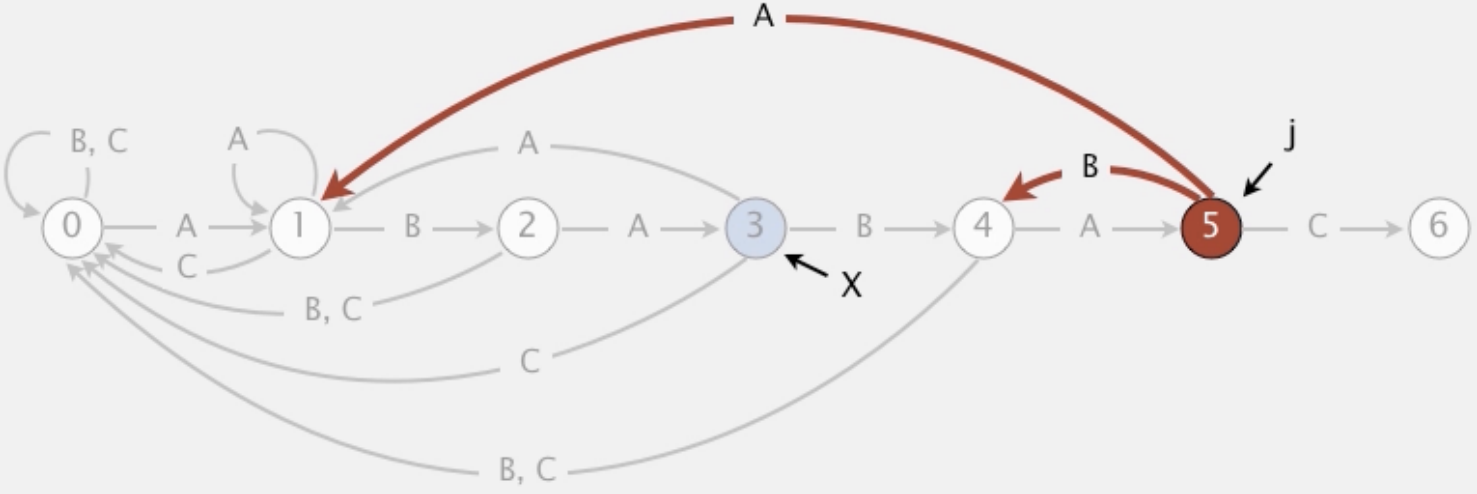
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B A

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



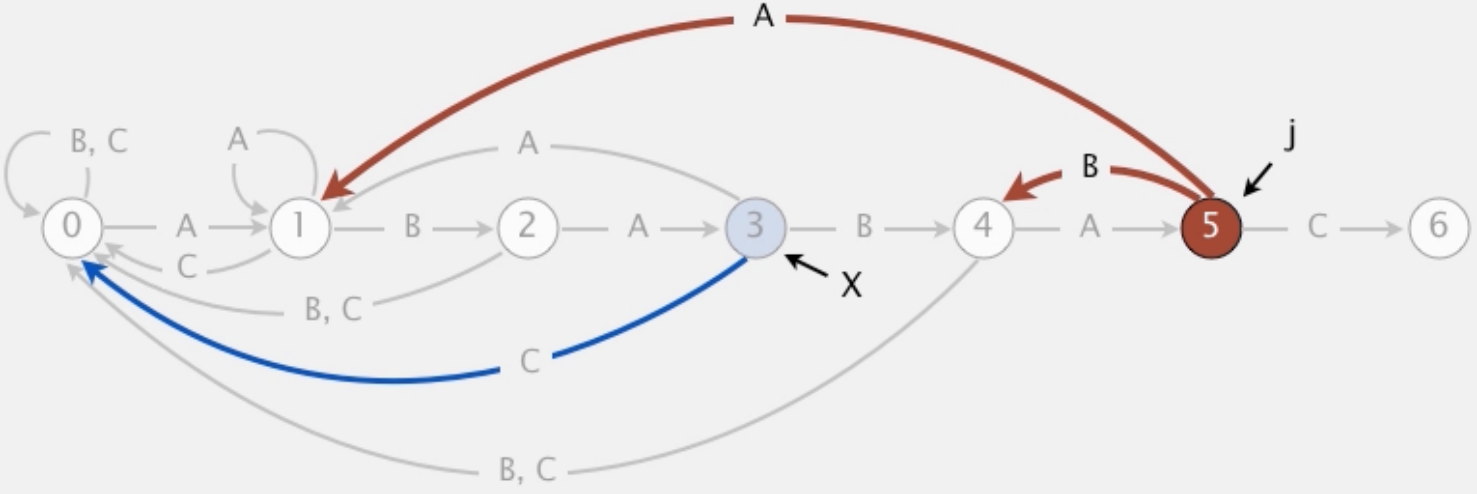
Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

Mismatch transition. For each state `j` and char `c != pat.charAt(j)`, set `dfa[c][j] = dfa[c][X]`; then update `X = dfa[pat.charAt(j)][X]`.

X = simulation of B A B A

	0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)	A	B	A	B	A	C
dfa[][j] A	1	1	3	1	5	1
dfa[][j] B	0	2	0	4	0	4
dfa[][j] C	0	0	0	0	0	6

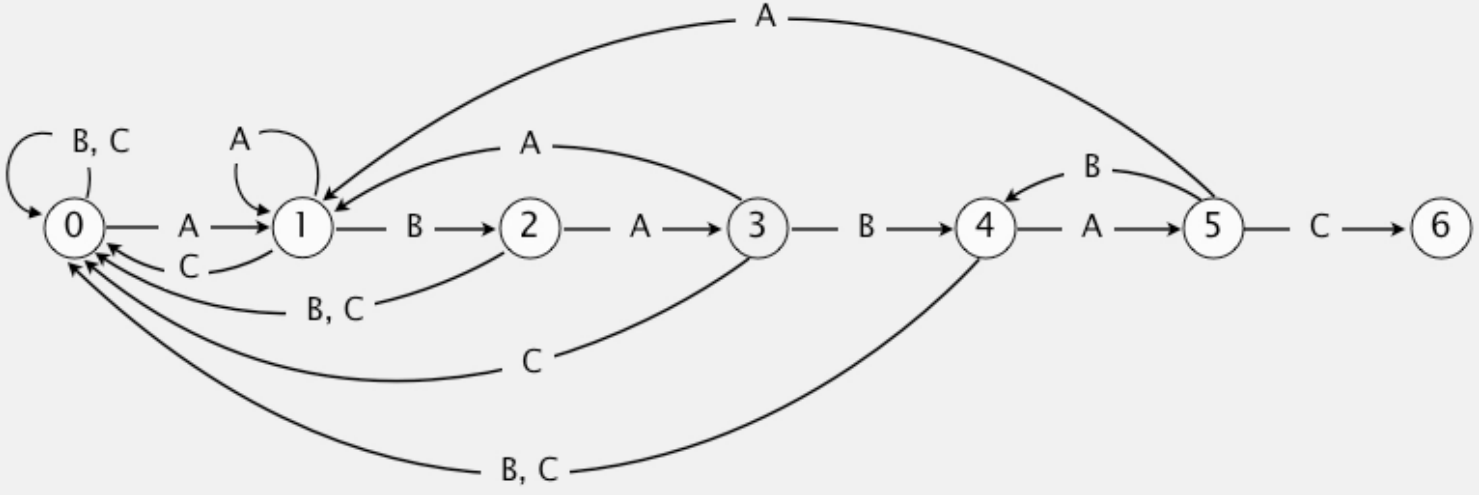
Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Knuth-Morris-Pratt demo: DFA construction in linear time

		0	1	2	3	4	5
pat.charAt(j)		A	B	A	B	A	C
dfa[][j]	A	1	1	3	1	5	1
	B	0	2	0	4	0	4
	C	0	0	0	0	0	6

Constructing the DFA for KMP substring search for A B A B A C



Construção da DFA

Trecho de código do KMP que constrói a DFA.

```
dfa[pat.charAt(0)][0] = 1;
for (int j = 1, X = 0; j < m; j++) {
    for (int c = 0; c < R; c++)
        // copie casos de conflito
        dfa[c][j] = dfa[c][X];

    // defina casos de casamento
    dfa[pat.charAt(j)][j] = j+1;

    // atualize estado de reinício
    X = dfa[pat.charAt(j)][X];
}
```

Construção da DFA: programação dinâmica

dfa[c][j] = maior k tal que
pat[0..k-1] = pat[j-k+1..j-1]+c

Para j = 0:
dfa[c][0] = 1, se pat[0] = c
0, se pat[0] $\neq$ c

Para j > 0:
dfa[c][j] = dfa[c][j-1]+1, se pat[j] = c
dfa[c][X], se pat[j] $\neq$ c,
onde X é o maior valor tal que
pat[0..X]=pat[..j-1]+c.

Classe KMP: esqueleto

```
public class KMP {
   private final int R = 256;
   private String pat;
   // dfa[][] representa o autômato
   private int[][] dfa;
   public KMP(String pat) { ...}
   public int search(String txt) {...}
}
```

KMP: construtor

```
public KMP(String pat) {
    this.pat = pat;
    int m = pat.length();
    dfa = new int[R][m];
    dfa[pat.charAt(0)][0] = 1;
    for (int j = 1, X = 0; j < m; j++){
        // calcule dfa[][j]
        for (int c = 0; c < R; c++)
            dfa[c][j] = dfa[c][X];
        dfa[pat.charAt(j)][j] = j+1;
        X = dfa[pat.charAt(j)][X];
    }
}
```

KMP: search()

```
public int search(String txt) {
   inti, n = txt.length();
   int j, m = pat.length();

   for (i = 0, j = 0; i < n && j < m; i++)
       j = dfa[txt.charAt(i)][j];

   if (j == m) return i - m;
   returnn;
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo do algoritmo KMP é $O(m + n)$.

Proposição. O algoritmo KMP examina não mais que m + n caracteres.

Se levarmos em conta o tamanho do alfabeto, R, o consumo de tempo para construir o DFA é mR.

Apêndice: Rabin-Karp

Fonte: `ADS: Boyer Moore String Search`

Referência: Algoritmo de Rabin-Karp para busca de substrings (PF)

Rabin-Karp

Criado por Richard M. Karp and Michael O. Rabin (1987).

O algoritmo também é conhecido como busca por impressão digital (*fingerprint search*).

Procura um segmento do texto que tenha o mesmo valor hash do padrão `pat`.

Usa hashing modular: módulo `Q`.

Se hash de `pat` é diferente do hash de todos os segmentos do texto então o padrão não ocorre no texto. A recíproca não vale: pode haver colisão.

Exemplo 1

pat.charAt(j)

j	0	1	2	3	4	
	2	6	5	3	5	% 997 = 613

txt.charAt(i)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	
0	3	1	4	1	5	% 997 = 508											
1		1	4	1	5	9	% 997 = 201										
2			4	1	5	9	2	% 997 = 715									
3				1	5	9	2	6	% 997 = 971								
4					5	9	2	6	5	% 997 = 442							
5						9	2	6	5	3	% 997 = 929						
6							2	6	5	3	5	% 997 = 613					

← *return* i = 6

match

Basis for Rabin-Karp substring search

Exemplo 2

Procurar o padrão 12345 nos primeiros 100 mil dígitos da expansão decimal de π.

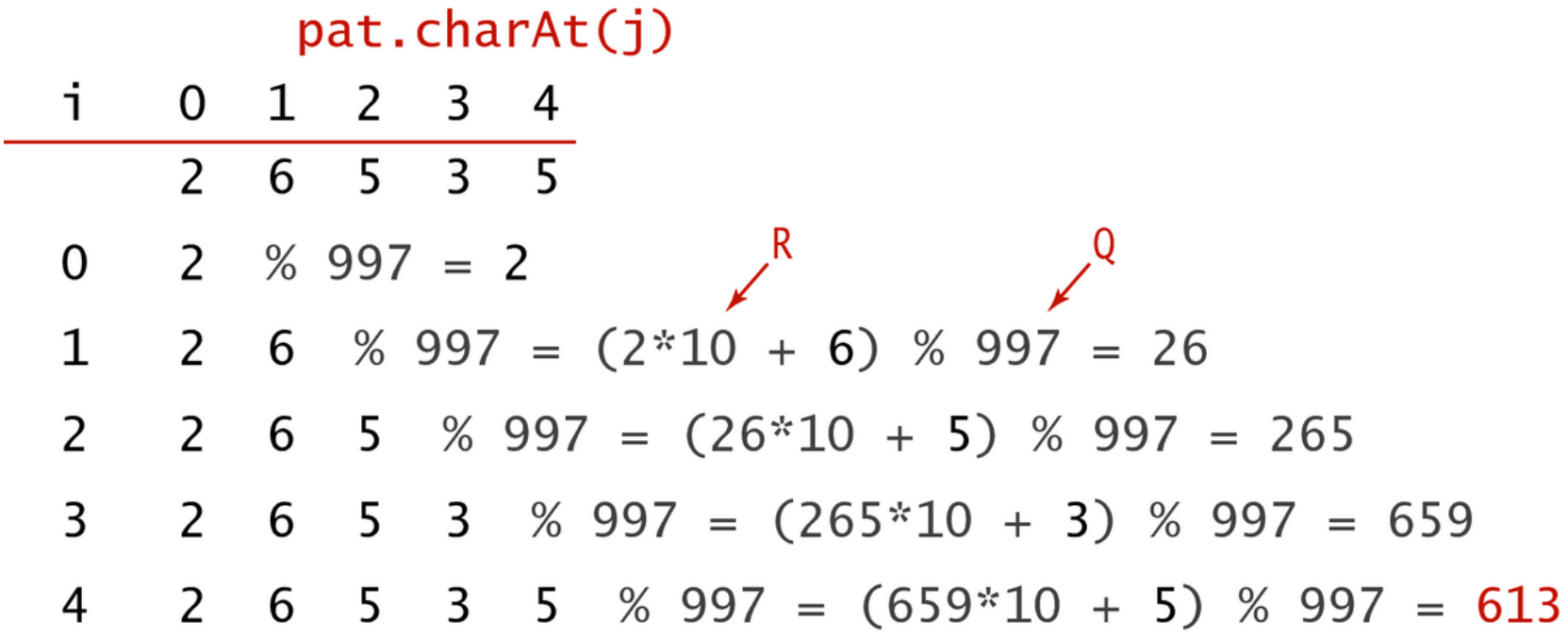
3141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012858361603563707660104710181942955596198946767837449448255379774726847104047534646208046684259069491293313677028989152104752162056966024058038150193511253382430035587640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586315030286182974555706749838505494588586926995690927210797509302955321165344987202755960236480665499119881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793800081647060016145249192173217214772350141441973568548161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983569485562099219222184272550254256887671790494601653466804988627232791786085784383827967976681454100953883786360950680064225125205117392984896084128488626945604241965285022210661186306700

Algoritmo de Horner

Para calcular o valor de hash de um string usamos o algoritmo de Horner:

```
private long hash(String key, int m) {
   long h = 0;
   for (int j = 0; j < m; j++)
       h = (h * R + key.charAt(j)) % Q;
   return h;
}
```

Exemplo



Computing the hash value for the pattern with Horner's method

Ideia chave: hash de substrings consecutivos

Seja $t_i = txt[i]$ e $x_i =$ o inteiro $t_i t_{i-1} \ldots t_{i+m-1}$

Assim,

$$x_{i-1} = t_{i-1}R^{m-1} + t_i R^{m-2} + \cdots + t_{i+m-2}$$
$$x_i = + t_i R^{m-1} + \cdots + t_{i+m-2}R + t_{i+m-1}$$

Logo, $x_i = (x_{i-1} - t_{i-1}R^{m-1})R + t_{i+m-1}$

Portanto, o valor $hash(x_i) = x_i \% Q$ pode ser obtido a partir do valor de $hash(x_{i-1}) = x_{i-1} \% Q$ em tempo constante.

$$hash(x_i) = ((hash(x_i) - t_{i-1}R^{m-1})R + t_{i+m-1}) \% Q$$

Exemplo

i	...	2	3	4	5	6	7	...	
current value	1	4	1	5	9	2	6	5	*text*
new value		4	1	5	9	2	6	5	

	4	1	5	9	2	*current value*
–	4	0	0	0	0	
		1	5	9	2	*subtract leading digit*
			*	1	0	*multiply by radix*
	1	5	9	2	0	
				+	6	*add new trailing digit*
	1	5	9	2	6	*new value*

Key computation in Rabin-Karp substring search

Implementação

Escolha `Q` igual a um primo grande para evitar a chance de colisão.

Evite *overflow* e números negativos:

- use um tipo-de-dados capaz de armazenar $\texttt{Q}^2$;
- na prática, escolha `Q` que caibe em um `int` ($2^{31} - 1$ é primo);
- faça as contas com `long`;
- tome o resto da divisão por `Q` depois de cada operação;
- some `Q` aos resultados intermediários quando necessário.

Exemplo: Q=997

$$\begin{aligned}(10000 + 535) \times 1000 &= (30 + 535) \times 3 \\ &= 565 \times 3 \\ &= 1695 \\ &= 698\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}508 - 3 \times 10000 &= 508 - 3 \times (30) \\ &= 508 + 3 \times (-30) \\ &= 508 + 3 \times (997 - 30) \\ &= 508 + 3 \times 967 \\ &= 508 + 907 \\ &= 418\end{aligned}$$

Classe RabinKarp: esqueleto

```
public class RabinKarp {
   private String pat;
   private long patHash; // hash do padrão
   private int m;
   private long Q;
   private int R = 256;
   private long RM;
   public RabinKarp(String pat) {...}
   private long hash(String key, int m) {}
   private int search(String txt) {...}
   public boolean check(String txt, int i)
}
```

RabinKarp: construtor

```
public RabinKarp(String pat) {
   this.pat= pat;
   m = pat.length();
   Q = longRandomPrime();
   RM = 1;
   // calcula R^(m-1)%Q
   for (int i = 1; i <= m-1; i++)
       RM = (R * RM) % Q;
   patHash = hash(pat, m);
}
```

RabinKarp: search()

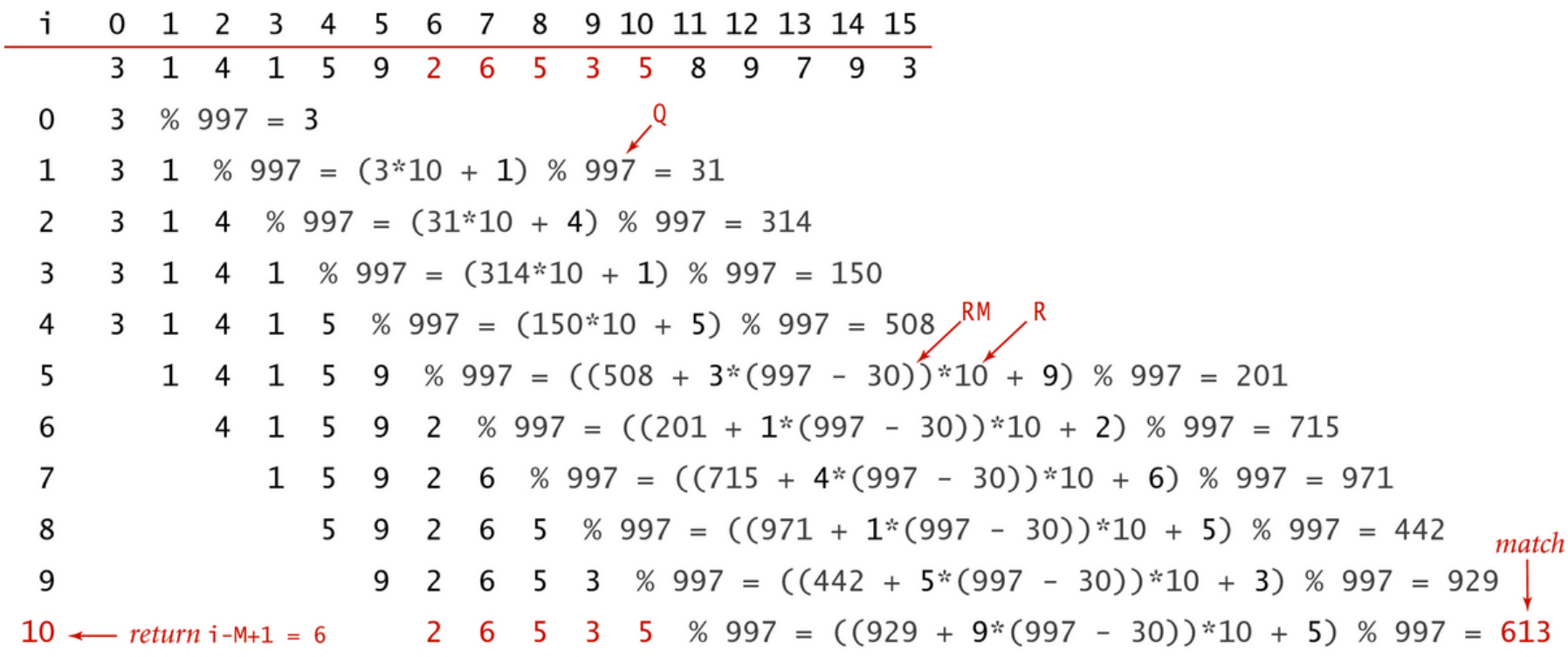
```
private int search(String txt) {
   int n = txt.length();
   long txtHash = hash(txt, m);
   if (patHash == txtHash
           && check(txt, 0)) return 0;
   for (int i= 1; i <= n- m; i++) {
       txtHash = (txtHash + Q -
              RM*txt.charAt(i-1) % Q) % Q;
       txtHash = (txtHash * R +
              txt.charAt(i+m-1)) % Q;
       if (patHash == txtHash
           && check(txt, i)) return i;
   }
   return n; } // não achou
```

RabinKarp: check()

```
// versão Las Vegas
private boolean check(String txt, int i){
   for (int j = 0; j < m; j++)
       if (pat.charAt(j)!=txt.charAt(i+j))
           return false;
       return true;
}

// versão Monte Carlo
private boolean check(String txt, int i){
   return true
}
```

Exemplo



Rabin-Karp substring search example

Monte Carlo *versus* Las Vegas

A versão Monte Carlo consome tempo linear, mas pode dar uma resposta errada, com baixíssima probabilidade.

A versão Las Vegas sempre dá a resposta certa, mas pode consumir tempo não linear, com baixíssima probabilidade.

Qual algoritmo é melhor

Força bruta é bom se o padrão e o texto não tiverem muitas auto-repetições.

`KMP` é rápido e tem a vantagem de nunca retroceder sobre o texto, o que é importante se o texto for dado como um fluxo contínuo (*streaming*).

`BoyerMoore` é provavelmente o mais rápido na prática.

`RabinKarp` é rápido mas pode dar resultados errados, com baixíssima probabilidade.

Implementações

Veja as implementações de busca de substrings:

- `glibc`: Implementation of strstr in glibc
- `cpython`: The stringlib Library
- Boyer-Moore-Horspool algorithm

Próximo passo

Que acontece se o padrão não é apenas uma string mas um conjunto de strings descrito por uma **expressão regular** como `A*|(A*BA*BA*)*` ou `((A*B|AC)D)`, por exemplo?

Essa generalização do problema de busca é muito importante. A solução envolve o conceito de autômato de estados não determinístico.