AULA 25

Arvores binárias

Fonte: https://www.tumblr.com/

PF 14

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/bint.html

Mais tabela de símbolos

Uma **tabela de símbolos** (= *symbol table* = *dictionary*) é um conjunto de objetos (itens), cada um dotado de uma chave (= *key*) e de um valor (= *value*).

As chaves podem ser números inteiros ou *strings* ou outro tipo de dados.

Uma tabela de símbolos está sujeito a dois tipos de operações:

- inserção: consiste em introduzir um objeto na tabela;
- busca: consiste em encontrar um elemento que tenha uma dada chave.

Problema

Problema: Organizar uma tabela de símbolos de maneira que as operações de inserção e busca sejam *razoavelmente eficientes*.

Em geral, uma organização que permite inserções rápidas impede buscas rápidas e vice-versa.

Já vimos como organizar tabelas de símbols através de vetores, lista encadeadas e hash.

Hoje: mais uma maneira de organizar uma tabela de símbolos.

Árvore binárias

Uma **árvore binária** (= *binary tree*) é um conjunto de nós/células que satisfaz certas condições.

Cada nó tera três campos:

```
typedef struct celula Celula;
struct celula {
   int conteudo; /* tipo devia ser Item*/
   Celula *esq;
   Celula *dir;
};
typedef Celula No;
No x, y;
```

Pais e filhos

Os campos `esq` e `dir` dão estrutura à árvore.

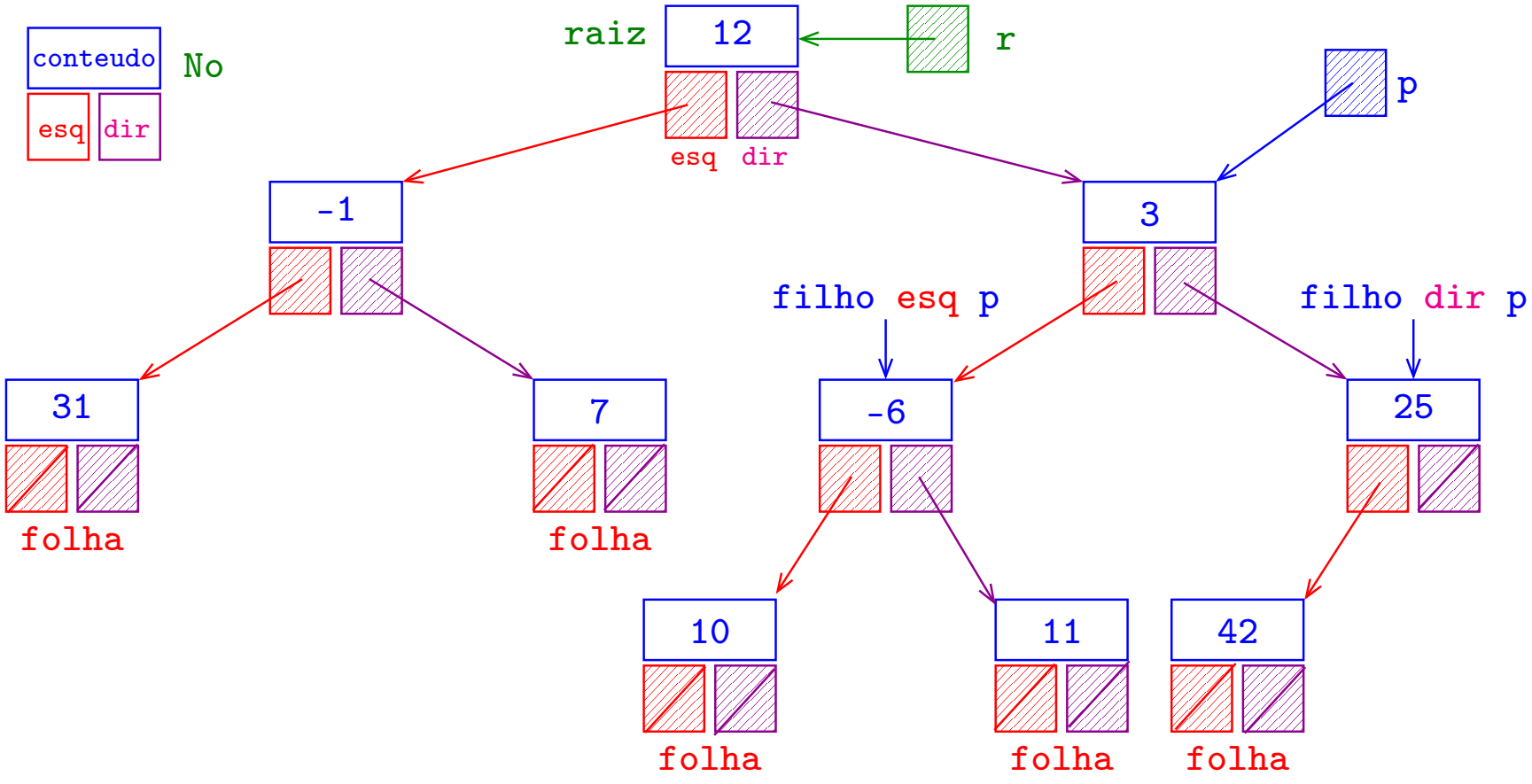
Se `x.esq == y`, `y` é o **filho esquerdo** de `x`.

Se `x.dir == y`, `y` é o **filho direito** de `x`.

Assim, `x` é o **pai** de `y` se `x.esq == y` ou `x.dir == y`.

Um **folha** é um nó sem filhos.
Ou seja, se `x.esq == NULL` e `x.dir == NULL` então `x` é um folha

Ilustração de uma árvore binária



Árvores e subárvores

Suponha que `r` e `p` são (endereços de/ponteiros para) nós.
`p` é **descendente** de `r` se `p` pode ser alcançada pela iteração dos comandos

```
p = p->esq;        p = p->dir;
```

em qualquer ordem.

Um nó `r` juntamente com todos os seus descendentes é uma **árvore binária** e `r` é dito a **raiz** (=*root*) da árvore.

Para qualquer nó `p`, `p->esq` é a raiz da subárvore esquerda de `p` e `p->dir` é a raiz da subárvore direita de `p`.

Endereço de uma árvore

O endereço de uma árvore binária é o endereço de sua raiz.

```
typedef No *Arvore;
Arvore r;
```

Um objeto `r` é uma árvore binária se

- `r == NULL` ou
- `r->esq` e `r->dir` são árvores binárias.

Maneiras de varrer uma árvore

Existem várias maneiras de percorrermos uma árvore binária. Talvez as mais tradicionais sejam:

- *inorder traversal*: esquerda-raiz-direita (e-r-d);
- *preorder traversal*: raiz-esquerda-direita (r-e-d);
- *posorder traversal*: esquerda-direita-raiz (e-d-r);

esquerda-raiz-direita

Visitamos

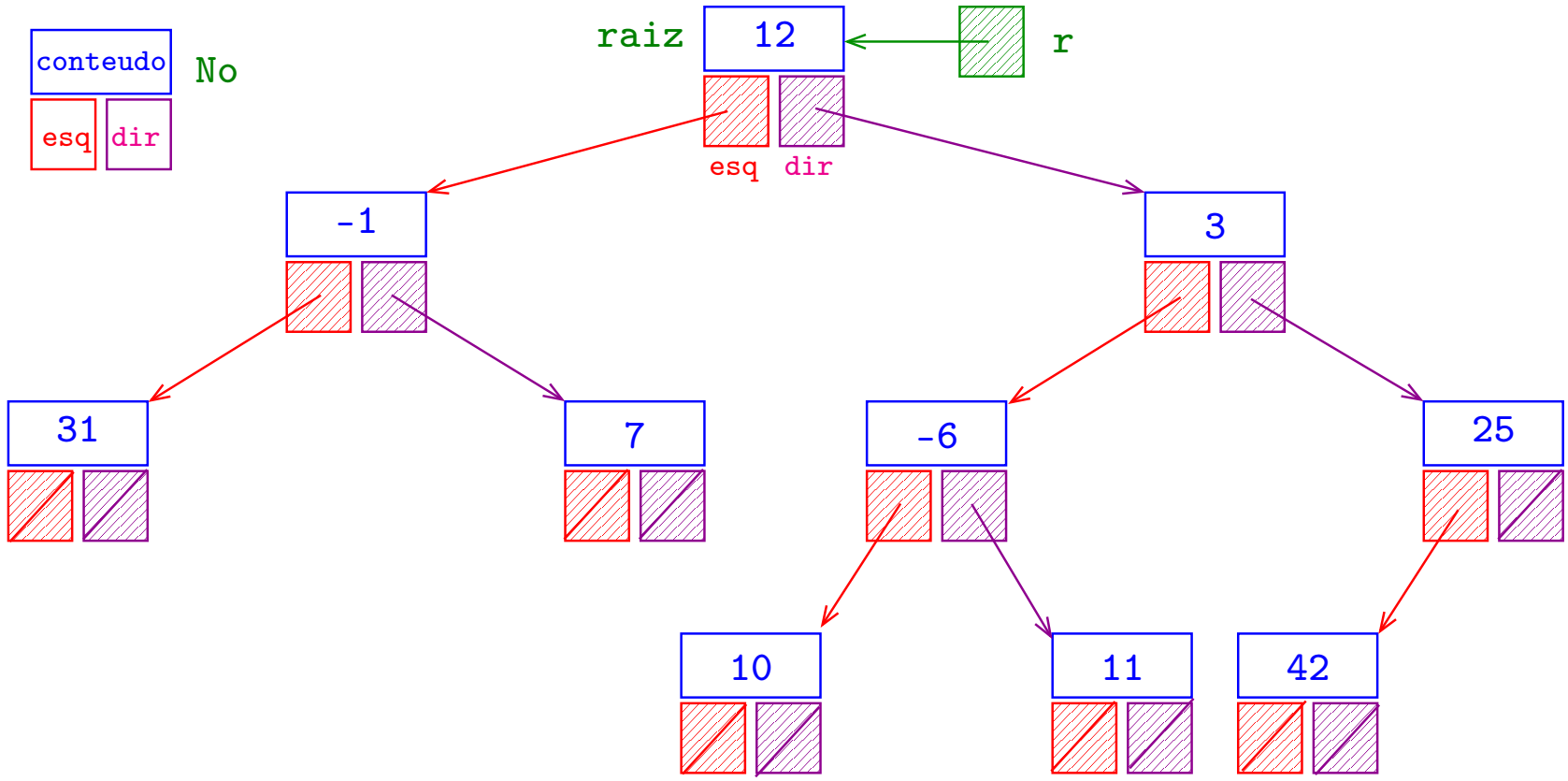
1. a subárvore esquerda da raiz, em ordem e-r-d;
2. depois a raiz;
3. a subárvore direita da raiz, em ordem e-r-d;

```
void inOrdem(Arvore r) {
   if (r != NULL) {
       inOrdem(r->esq);
       printf("%d\n", r->conteudo);
       inOrdem(r->dir);
   }
}
```

esquerda-raiz-direita versão iterativa

```
void inOrdem(Arvore r) {
   stackInit();
   while (r != NULL || !stackEmpty()) {
       if (r != NULL) {
           stackPush(r);
           r = r->esq;
       }
       else {
           r = stackPop();
           printf("%d\n", r->conteudo);
           r = r->dir;
       }
   }
}
```

Ilustração de percursos em árvores binárias

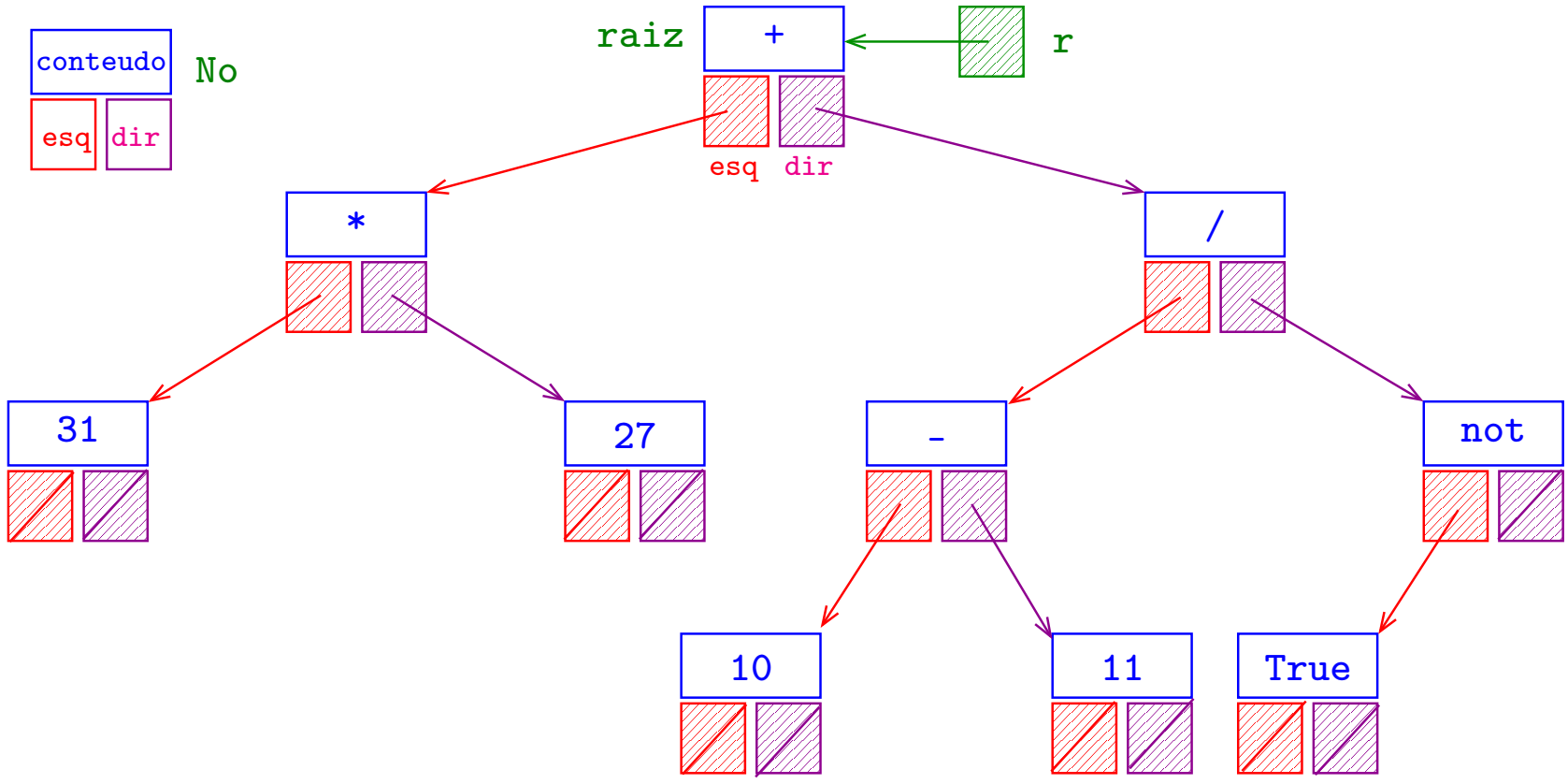


in-ordem (e-r-d): 31 -1 7 12 10 -6 11 3 42 25

pré-ordem (r-e-d): 12 -1 31 7 3 -6 10 11 25 42

pós-ordem (e-d-r): 31 7 -1 10 11 -6 42 25 3 12

Ilustração de percursos em árvores binárias



in-ordem (e-r-d): `31 * 27 + 10 - 11 / True not`

pré-ordem (r-e-d): `+ * 31 27 / - 10 11 not True`

pós-ordem (e-d-r): `31 27 * 10 11 - True not / +`

Primeiro nó esquerda-raiz-direita

Recebe a raiz r de uma árvore binária não vazia e retorna o primeiro nó na ordem e-r-d

```
No *primeiro(Arvore r)
{
   while (r->esq != NULL)
       r = r->esq;
   return r;
}
```

Altura

A **altura** de p é o número de passos do mais longo caminho que leva de p até uma folha.

A altura de uma árvore é a altura da sua raiz.
Altura de árvore vazia é -1.

```
#define MAX(a,b) ((a) > (b)?  (a):  (b))
int altura(Arvore r) {
   if (r == NULL) return-1;
   else {
       int he = altura(r->esq);
       int hd = altura(r->dir);
       return MAX(he,hd) + 1;
   }
{
```

Árvores balanceadas

A altura de uma árvore com n nós é um número entre $\lg(n)$ e n.

Uma árvore binária é **balanceada** (ou **equilibrada**) se, em cada um de seus nós, as subárvores esquerda e direita tiverem *aproximadamente* a mesma altura.

Árvores balanceadas têm altura *próxima* de $\lg(n)$.

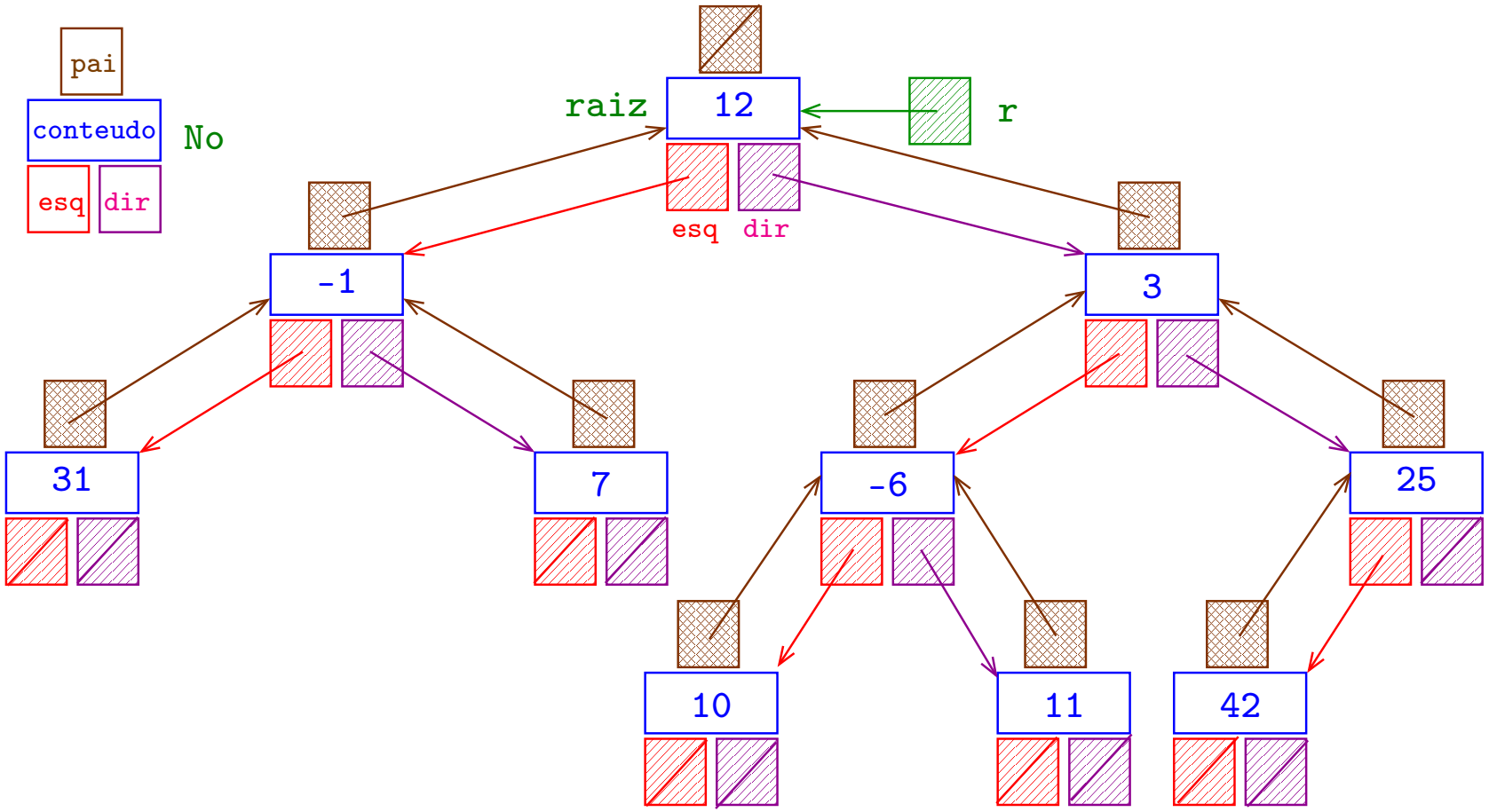
O consumo de tempo dos algoritmos que manipulam árvores binárias dependem frequentemente da altura da árvore.

Nós com campo pai

Em algumas aplicações é conveniente ter acesso imediato ao pai de qualquer nó.

```
typedef struct celula Celula;
struct celula {
   int conteudo; /* tipo devia ser Item*/
   Celula *pai;
   Celula *esq;
   Celula *dir;
};
typedef Celula No;
typedef No *Arvore;
```

Ilustração de nós com campo pai



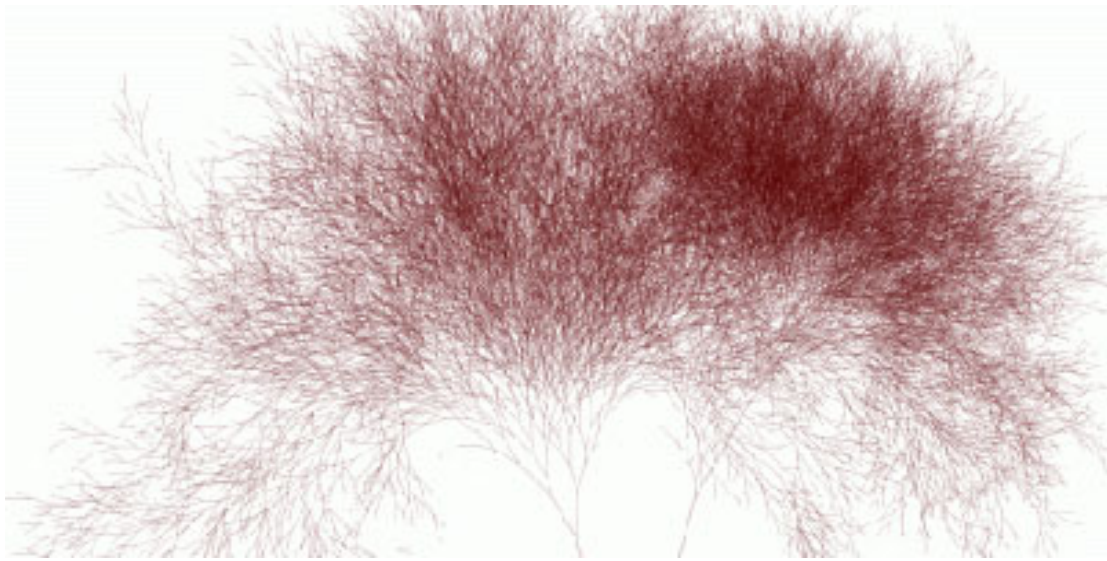
Sucessor e predecessor

Recebe o endereço p de um nó de uma árvore binária não vazia e retorna o seu **sucessor** na ordem e-r-d.

```
No *sucessor(No *p) {
   if (p->dir != NULL) {
       No *q= p->dir;
       while (q->esq != NULL) q = q->esq;
       return q;
   }
   while (p->pai!=NULL && p->pai->dir==p)
       p = p->pai;
   return p->pai;
}
```

Exercício: função que retorna o **predecessor**.

Árvores binárias de busca



Fonte: http://infosthetics.com/archives/

PF 15

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/binst.html

Árvore binárias de busca

Considere uma árvore binária cujos nós têm um campo chave (como int ou String, por exemplo).

```
typedef struct celula Celula;
struct celula {
   int conteudo; /* tipo devia ser Item*/
   int chave; /* tipo devia ser Chave*/
   Celula *esq;
   Celula *dir;
};
typedef Celula No;
typedef No *Arvore;
No x, *p, *q, *r, *t;
```

Árvore binárias de busca

Uma árvore binária deste tipo é de **busca** (em relação ao campo `chave`) se para cada nó `x` `x.chave` é

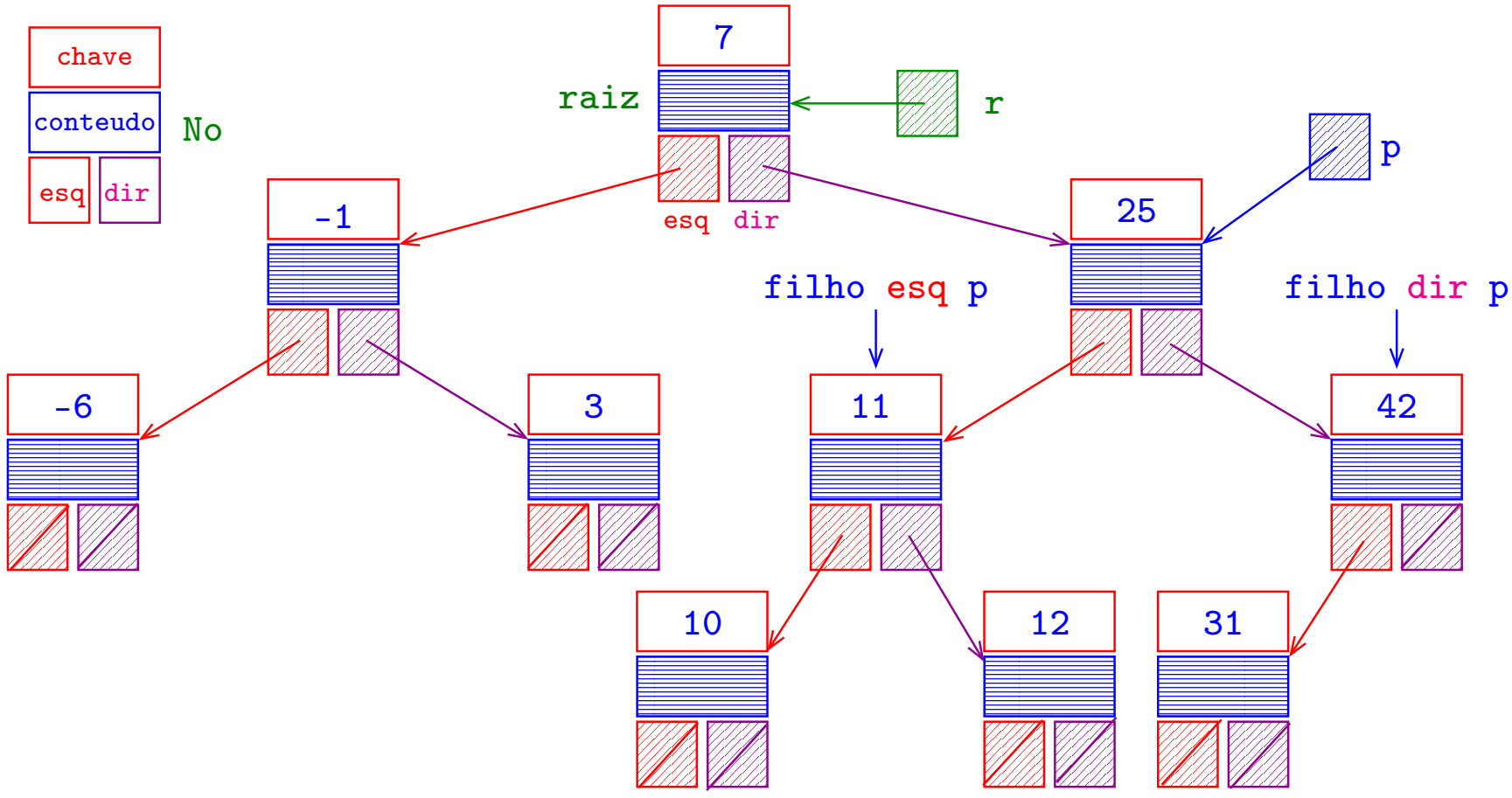
1. maior ou igual à chave de qualquer nó na subárvore esquerda de `x` e
2. menor ou igual à chave de qualquer nó na subárvore direita de `x`.

Assim, se `p` é um nó qualquer então vale que

```
q->chave <= p->chave e
p->chave <= t->chave
```

para todo nó `q` na subárvore esquerda de `p` e todo nó `t` na subárvore direita de `p`.

Ilustração de uma árvore binária de busca



in-ordem (e-r-d): -6 -1 3 7 10 11 12 25 31 42

Busca

Recebe um inteiro `k` e uma árvore de busca `r`e retorna um nó cuja chave é `k`; se tal nó não existe, retorna `NULL`.

```
No *busca(Arvore r, int k) {
   if (r == NULL || r->chave == k)
       return r;
   if (r->chave > k)
       return busca(r->esq, k);
   return busca(r->dir, k);
}
```

Busca versão iterativa

Recebe um inteiro `k` e uma árvore de busca `r` e retorna um nó cuja chave é `k`; se tal nó não existe, retorna `NULL`.

```
No *busca(Arvore r, int k) {
   while (r != NULL && r->chave != k)
       if (r->chave > k)
           r = r->esq;
       else
           r = r->dir;
   return r;
}
```

Inserção

Recebe uma árvore de busca `r` e um nó `novo`. Insere o nó no lugar correto da árvore de modo que a árvore continue sendo de busca e retorna o endereço da nova árvore.

```
No *
new(int chave,int conteudo,No *esq,No*dir)
{
   No *novo = mallocSafe(sizeof *novo);
   novo->chave= chave;
   novo->conteudo = conteudo;
   novo->esq = esq;
   novo->dir = dir;
   return novo;
}
```

Inserção

```
Arvore *insere(Arvore r, No *novo) {
   No *f, /* filho de p */
   No *p; /* pai de f */
   if (r == NULL) return novo;
   f = r;
   while (f != NULL) {
       p = f;
       if (f->chave > novo->chave)
           f = f->esq;
       else
           f = f->dir;
   }
```

Inserção

```
    /* novo sera uma folha
       novo sera filho de p */
    if (p->chave > novo->chave)
        p->esq = novo;
    else
        p->dir = novo;
    return r;
}
```

Remoção

Recebe uma árvore de busca não vazia `r`. Remove a sua raiz e rearranja a árvore de modo que continue sendo de busca e retorna o endereço da nova árvore.

Remoção

```
Arvore *removeRaiz(Arvore r) {
   No *p, *q;
   if (r->esq == NULL) {
       q = r->dir; free(r); return q;
   }
   /* encontre na subarvore r->esq o nó q
      com maior valor */
   p = r; q = r->esq;
   while (q->dir != NULL) {
       p = q;
       q = q->dir;
   }
```

Remoção

```
    /* q é o nó anterior a r na ordem e-r-d
       p é o pai de q*/
    if (p != r) {
        p->dir = q->esq;
        q->esq = r->esq;
    }
    q->dir = r->dir; free(r); return q;
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo das funções `busca`, `insere` e `removeRaiz` é, no pior caso, proporcional à altura da árvore.

Conclusão: interessa trabalhar com árvores balanceadas: árvores AVL, árvores rubro-negras, árvores ...

Comentários finais

Fonte: http://www.quickmeme.com/

MAC0122 – Edição 2014

Livros

Nossa referência básica **foi** o livro

PF = Paulo Feofiloff,
Algoritmos em linguagem C,

Este livro é baseado no material do sítio

Projeto de Algoritmos em C.

Outro livro **foi**

S = Robert Sedgewick,
Algorithms in C, vol. 1

MAC0122

MAC0122 **foi** uma disciplina introdutória em:

Projeto de algoritmos:

- recursão: torres de Hanoi,..., EP2, EP5...
- divisão-e-conquista: Mergesort, Quicksort, EP5
- pré-processamento: Heapsort, Boyer-Moore
- heurísticas: Boyer-Moore, EP5
- algoritmos de enumeração: EP1, `nrainhas`
- algoritmos de busca: busca binária, busca em listas (EP2,EP3,EP4,EP5), hashing (EP5), busca em árvores, busca em largura (`distancias`), busca em profundidade (EP2)
- programação dinâmica ("recursão com tabela"): números binomiais, ...

MAC0122

MAC0122 **foi** uma disciplina introdutória em:

Correção de algoritmos:

- relações invariantes: vários problemas nas aulas

MAC0122

MAC0122 **foi** uma disciplina introdutória em:

Eficiência de algoritmos:

- consumo de tempo: vários problemas nas aulas
- notação assintótica O: vários problemas nas aulas
- análise experimental: vários problemas nas aulas
- consumo de espaço: Mergesort usa espaço extra $\mathrm{O}(\mathtt{n})$, Quicksort usa espaço extra $\mathrm{O}(\lg \mathtt{n})$

MAC0122

MAC0122 **foi** uma disciplina introdutória em:

Estruturas de dados:

- listas lineares encadeadas, listas encadeadas ciculares, listas com e sem cabeça: EP2, EP3, EP4 e EP5
- filas: distâncias, EP2, EP3
- pilhas: EP2, EP3, EP4
- heaps
- tabelas de símbolos: lista ligadas (EP3), hash (EP5), árvores

MAC0122

MAC0122 **combinou** conceitos e recursos de programação:

- recursão: EP2, EP5
- strings: todos os EPs?
- endereços e ponteiros: EP2, EP3, EP4 e EP5
- registros e structs: EP2, EP3, EP4, e EP5
- alocação dinâmica de memória: EP2, EP3, EP4, e EP5
- interfaces: (EP1), EP2, EP3, EP4, e EP5

que nasceram de aplicações cotidianas em ciência da computação: `bsearch` (`stdlib`), `qsort` (`stdlib`), `strstr` (`string`), `hsearch` (`search`), `lsearch` (`search`), `tsearch` (`search`),...

Principais tópicos

Alguns dos tópicos de MAC0122 foram:

- recursão;
- busca em um vetor; busca (binária) em vetor ordenado;
- listas encadeadas;
- listas lineares: filas e pilhas;
- algoritmos de enumeração; divisão e conquista;
- busca de palavras em um texto;
- algoritmos de ordenação: bubblesort, heapsort, mergesort,. . . ;

Tudo isso regado a muita análise de eficiência de algoritmos e invariantes.

Pausa para nossos comerciais

- EP5: 6/DEZ
- Prova 3: terça-feira, 25/OUT
- Prova Sub: terça-feira, 2/DEZ

Fonte: http://dawallpaperz.blogspot.com.br/