AULA 24

Problema das $\mathtt{n}$ rainhas

Fonte: `http://www.bhmpics.com/`

PF 12

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/enum.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle

Problema das $\mathtt{n}$ rainhas

Problema: Dado $\mathtt{n}$ determinar todas as maneiras de dispormos $\mathtt{n}$ rainhas em um tabuleiro "de xadrez" de dimensão $\mathtt{n} \times \mathtt{n}$ de maneira que duas a duas elas não se atacam.

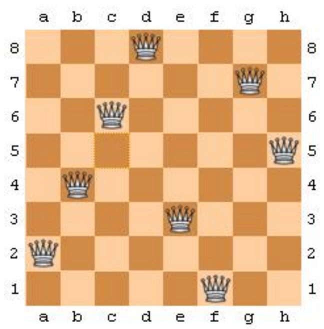
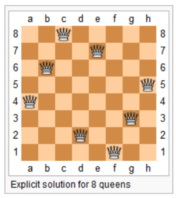
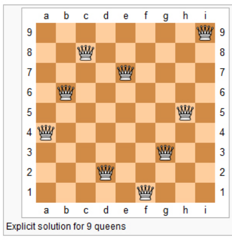


Imagem: http://software.intel.com/en-us/articles/multicore-enabling-the-n-queens-problem-using-cilk/

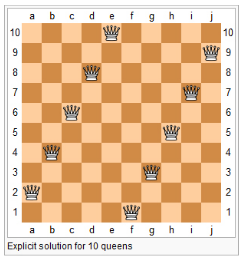
Soluções



Explicit solution for 8 queens



Explicit solution for 9 queens



Explicit solution for 10 queens

Imagem: http://www.levelxgames.com/2012/05/n-queens/

Problema das 8 rainhas

Existem $\binom{64}{8}$ maneiras diferentes de dispormos 8 peças em um tabuleiro de dimensão 8×8

$$\binom{64}{8} = 4426165368 \approx 4{,}4 \text{ bilhões}$$

Suponha que conseguimos verificar se uma configuração é válida em 10^{-3} segundos.
Para verificarmos todas as 44 bilhões gastaríamos

$$4400000 \text{ seg} \approx 73333 \text{ min} \approx 1222 \text{ horas} \approx 51 \text{ dias}.$$

Problema das 8 rainhas

Como cada linha pode conter apenas uma rainha, podemos supor que a rainha $\mathtt{i}$ será colocada na coluna $\mathtt{s}[\mathtt{i}]$ da linha $\mathtt{i}$.

Portanto as possíveis soluções para o problema são todas as sequências

$$\mathtt{s}[1], \mathtt{s}[2], \ldots, \mathtt{s}[8]$$

sobre $1, 2, \ldots, 8$

Existem $8^8 = 16777216$ possibilidades. Para verificá-las gastaríamos

$$16777{,}216 \text{ seg} \approx 280 \text{ min} \approx 4{,}6 \text{ horas}$$

Problema das 8 rainhas

Existem outras restrições:

(i) para cada i, j, $k \neq j$, $s[k] \neq s[j]$ (=duas rainhas não ocupam a mesma coluna); e

(ii) duas rainhas não podem ocupar uma mesma diagonal.

Existem $8! = 40320$ configurações que satisfazem (i).

Essa configurações podem ser verificadas em

$$\approx 40 \text{ seg.}$$

Função nRainhas

A função nRainhas a seguir imprime todas as configurações de n rainhas em uma tabuleiro $n \times n$ que duas a duas ela não se atacam.

A função mantém no início da cada iteração a seguinte relação invariante

(i0) $s[1..i-1]$ é uma solução parcial do problema

Cada iteração procura estender essa solução colocando uma rainha na linha i

Função nRainhas

A função utiliza as funções auxiliares

```
/* Imprime tabuleiro com rainhas em
      s[1 . . i] */
void
mostreTabuleiro(int n, int i, int *s);

/* Supoe que s[1 . . i-1] e solucao parcial,
 * verifica se s[1 . . i] e solucao parcial
 */
int solucaoParcial(int i, int *s);
```

Função nRainhas

```
void nRainhas (int n) {
  int i; /* linha atual */
  int j; /* coluna candidata */
  int nJogadas = 0; /* num.  da jogada */
  int nSolucoes = 0; /* num.  de sol.  */
  int *s = mallocSafe((n+1)*sizeof(int));
  /* s[i] = coluna da linha i em que
   * esta a rainha i, para i= 1,...,n.
   * Posicao s[0] nao sera usada.
   */
```

Função nRainhas

```
/* linha inicial e coluna inicial */
i = j = 1;
/* Encontra todas as solucoes.  */
while (i > 0) {
  /* s[1 . . i-1] e' solucao parcial */
  int achouPos = FALSE;
  while (j <= n && achouPos == FALSE) {
     s[i] = j;
     nJogadas += 1;
     if (solucaoParcial(i,s) == TRUE)
        achouPos = TRUE;
     else j += 1;
  }
```

Função nRainhas

```
  if (j <= n) {/* AVANCA */
     i += 1;
     j = 1;
     if (i == n+1) {
        /* uma solucao foi encontrada */
        nSolucoes++;
        mostreTabuleiro(n,s);
        j = s[--i] + 1; /* volta */
     }
  } else { /* BACKTRACKING */
     j = s[--i]+1;
  }
}
```

Função nRainhas

```
  printf(stdout,"\n no.  jogadas = %d"
     "\n no.  solucoes = %d.\n\n",
     nJogadas, nSolucoes);
  free(s);
}
```

Rainhas em uma mesma diagonal

Se duas rainhas estão nas posições [i][j] e [p][q] então elas estão em uma mesma diagonal se

$$i + j == p + q \text{ ou } i - j == p - q \,.$$

Isto implica que duas rainhas estão em uma mesma diagonal se e somente se

$$i - p == q - j \text{ ou } i - p == j - q \,.$$

ou seja

$$|i - p| == |q - j|.$$

solucaoParcial

A função solucaoParcial recebe um vetor s[1 . . i] e supondo que s[1 . . i-1] é uma solução parcial decide se s[1 . . i] é uma solução parcial.

Para isto a função apenas verifica se a rainha colocada na posição [i][s[i]] está sendo ataca por alguma das rainhas colocadas nas posições

$$[1][s[1]], [2][s[2]], \ldots, [i-1][s[i-1]] \,.$$

solucaoParcial

```
int solucaoParcial(int i, int *s){
  int j = s[i];
  int k;
  for (k = 1; k < i; k++){
     int p = k;
     int q = s[k];
     if (q == j
        || i+j == p+q
        || i-j == p-q)
        return FALSE;
  }
  return TRUE;
}
```

Alguns números

nrainhas

n	jogadas	soluções	tempo
4	60	2	0.000s
8	15072	92	0.000s
10	348150	724	0.012s
12	10103868	14200	0.500s
14	377901398	365596	21.349s
15	2532748320	2279184	3m21s
16	?	14772512	18m48s

Backtracking

Backtracking (=tentativa e erro =busca exaustiva) é um método para encontrar uma ou todas as soluções de um problema.

A obtenção de uma solução pode ser vista como uma sequência de passos/decisões.

A cada momento temos uma solução parcial do problema. Assim, estamos em algum ponto de um caminho a procura de uma solução.

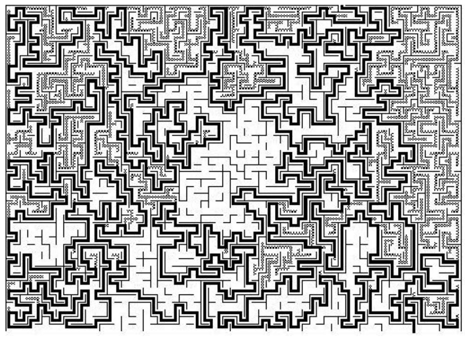
Backtracking

Cada iteração consiste em tentar estender essa solução parcial, ou seja, dar mais um passo que nos aproxime de uma solução.

Se não é possível estender a solução parcial, dar esse passo, **voltamos** no caminho e tomamos outra direção/decisão.

Backtracking

Para descrever *backtracking* frequentemente é usada a metáfora "procura pela saída de um labirinto".



Backtracking

A solução que vimos para o Problema das `n` rainhas é um exemplo clássico do emprego de *backtracking*.

No início de cada iteração da função `nRainhas` temos que `s[1 . . i-1]` é uma solução parcial:

> $[1][s[1]], \ldots, [i-1][s[i-1]]$ são posições de rainhas que duas a duas elas não se atacam.

Árvore de estados

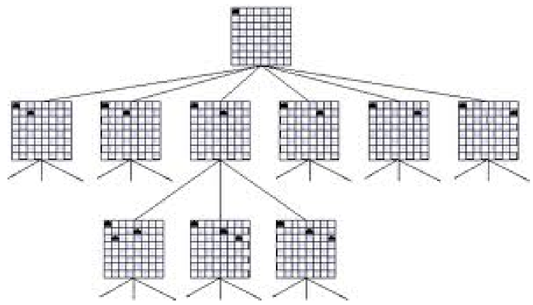


Imagem: http://cs.smith.edu/ thiebaut/transputer/chapter9/chap9-4.html

Árvore de estados

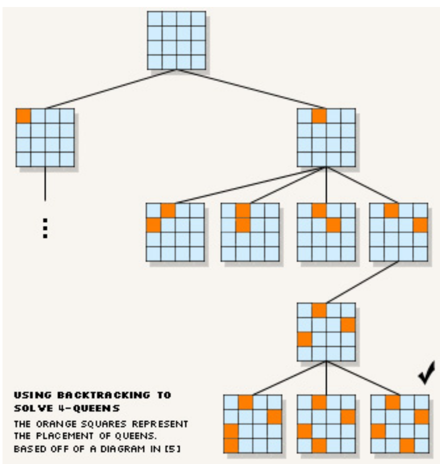


Imagem: http://4c.ucc.ie/web/outreach/tutorial.html

Função `nRainhas` (outra versão)

A função `nRainhas` a seguir imprime todas as configurações de `n` rainhas em uma tabuleiro `n` $\times$ `n` que duas a duas ela não se atacam.

A mantém no início da cada iteração a seguinte relação invariante

(i0) $s[1\,..\,i{-}2]$ é uma solução parcial do problema

Cada iteração procura estender essa solução colocando uma rainha na linha `i`

Função nRainhas (outra versão)

A função utiliza as funções auxiliares

```
/* Imprime tabuleiro com rainhas em
      s[1 . . i] */
void
mostreTabuleiro(int n, int i, int *s);

/* Supoe que s[1 . . i-1] e solucao parcial,
 * verifica se s[1 . . i] e solucao parcial
 */
int solucaoParcial(int i, int *s);
```

Função nRainhas (outra versão)

```
void nRainhas (int n) {
  int testouTudo = FALSE;
  int i; /* linha atual */
  int j; /* coluna candidata */
  int nJogadas = 0; /* num.  da jogada */
  int nSolucoes = 0; /* num.  de sol.  */
  int *s = mallocSafe((n+1)*sizeof(int));
  /* s[i] = coluna em que esta a rainha i
   * da linha i, para i= 1,...,n.
   * Posicao s[0] nao sera usada.
   */
```

Função nRainhas (outra versão)

```
/* linha inicial e coluna inicial */
i = j = 1;
/* Encontra todas as solucoes.  */
while (testouTudo == FALSE) {
  /* s[1 . . i-2] eh solucao parcial */
  /* [i][j] e' onde pretendemos colocar
     uma rainha */

  /* CASO 1:  nLin == 0 */
  if (i == 0) {
     testouTudo = TRUE;
  }
```

Função nRainhas (outra versão)

```
  /* CASO 2:  j == n+1 OU
     s[1..i-1]) nao e' solucao parcial */
  else if (j == n+1 ||
         solucaoParcial(i-1,s)==FALSE){
     /* BACKTRACKING */
     /* voltamos para a linha anterior e
     * tentamos a proxima coluna
     */
     j = s[--i]+1; /* stackPop() */
  }
```

Função nRainhas (outra versão)

```
  /* Caso 3:  i == n+1 */
  else if (i == n+1) {
     /* uma solucao foi encontrada */
     nSolucoes++;
     mostreTabuleiro(n,i-1,s);
     /* retira do tabuleiro a ultima
     * rainha colocada e volta
     */
     j = s[--i]+1; /* stackPop() */
  }
```

Função nRainhas (outra versão)

```
  /* CASO 4:  j <= n &&
        s[1..i-1] e solucao parcial */
  else {
     /* AVANCA */
     s[i++] = j; /* stackPush() */
     j = 1;
     nJogadas++;
  }
}
```

Função nRainhas (outra versão)

```
  printf(stdout,"\n no.  jogadas = %d"
      "\n no.  solucoes = %d.\n\n",
      nJogadas, nSolucoes);
  free(s);
}
```

Problema do passeio do cavalo

Fonte: `http://toonclips.com/design/5892`

"*Creating a program to find a knight's tour is a common problem given to computer science students*"

PF 12

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/enum.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Knight's_tour

Problema do passeio do cavalo

Problema: Suponha dado um tabuleiro de xadrez `n`-por-`n`. Determinar se é possivel que um cavalo do jogo de xadrez parta da posição `(1,1)` e complete um passeio por todas as n^2 posições.

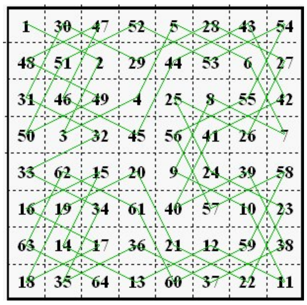


Imagem: http://www.magic-squares.net/knighttours.htm/

Soluções

```
   +----+----+----+----+----+
1  |  1 | 10 | 19 |  4 | 25 |
   +----+----+----+----+----+
2  | 18 |  5 |  2 |  9 | 14 |
   +----+----+----+----+----+
3  | 11 | 20 | 15 | 24 |  3 |
   +----+----+----+----+----+
4  |  6 | 17 | 22 | 13 |  8 |
   +----+----+----+----+----+
5  | 21 | 12 |  7 | 16 | 23 |
   +----+----+----+----+----+
      1    2    3    4    5
```

Soluções

```
   +----+----+----+----+----+----+
1  |  1 | 14 | 11 | 28 |  7 |  4 |
   +----+----+----+----+----+----+
2  | 12 | 27 |  2 |  5 | 10 | 29 |
   +----+----+----+----+----+----+
3  | 15 | 20 | 13 |  8 |  3 |  6 |
   +----+----+----+----+----+----+
4  | 26 | 33 | 24 | 19 | 30 |  9 |
   +----+----+----+----+----+----+
5  | 21 | 16 | 35 | 32 | 23 | 18 |
   +----+----+----+----+----+----+
6  | 34 | 25 | 22 | 17 | 36 | 31 |
   +----+----+----+----+----+----+
      1    2    3    4    5    6
```

Soluções

```
   +----+----+----+----+----+----+----+
1  |  1 | 18 | 27 |  6 | 11 | 16 | 13 |
   +----+----+----+----+----+----+----+
2  | 28 |  7 |  2 | 17 | 14 |  5 | 10 |
   +----+----+----+----+----+----+----+
3  | 19 | 26 | 29 |  8 |  3 | 12 | 15 |
   +----+----+----+----+----+----+----+
4  | 40 | 45 | 20 | 25 | 30 |  9 |  4 |
   +----+----+----+----+----+----+----+
5  | 37 | 34 | 39 | 44 | 21 | 24 | 31 |
   +----+----+----+----+----+----+----+
6  | 46 | 41 | 36 | 33 | 48 | 43 | 22 |
   +----+----+----+----+----+----+----+
7  | 35 | 38 | 47 | 42 | 23 | 32 | 49 |
   +----+----+----+----+----+----+----+
      1    2    3    4    5    6    7
```

Movimentos do cavalo

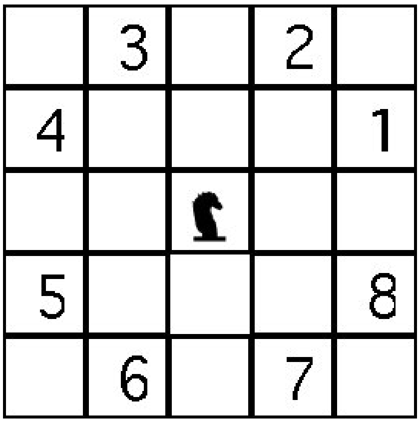


Imagem: http://www.mactech.com/articles/mactech/Vol.14/14.11/TheKnightsTour/index.html

Problema do passeio do cavalo

Cada movimento possível é de um dos tipos 1,...,8 mostrados. De uma maneira grosseira existem 8^{63} sequência de movimentos em um tabuleiro 8×8.

$$8^{63} \approx 7.9 \times 10^{56}$$

Supondo que conseguimos verificar cada sequência em 10^{-6} segundos, o tempo para verificar todas as sequências seria

7.9×10^{50} seg $\approx 1.310^{49}$ min $\approx 2.1 \times 10^{47}$ horas $\approx$

Deixa para lá ...

Algoritmo passeioCavalo

A função `passeioCavalo` a seguir imprime, caso exista, uma possível solução para o problema do passeio do cavalo em uma tabuleiro $n \times n$.

A função mantém no início da cada iteração a seguinte relação invariante

(i0) $s[1\,..\,k-1]$ são os movimentos de uma solução parcial do problema

Cada iteração procura estender essa solução fazendo mais um movimento

Algoritmo passeioCavalo

A função utiliza a função auxiliar e a struct

```
/* Imprime o tabuleiro com as rainhas em
s[1 . . i] */
void mostreTabuleiro(int n, int **tab);

typedef struct {
  int i;
  int j;
} Movimento;
```

Algoritmo passeioCavalo

```
void passeioCavalo (int n) {
  int **tab;
  int i, j; /* posicao atual */
  int iProx,jProx; /* coluna candidata */
  int nMovimentos = 0; /* num.  de mov */
  int *s = malloc((n*n+1)*sizeof(int));
  /* s[t] = movimento no passo t*/
  int k; /* passo atual */
```

Algoritmo passeioCavalo

```
  Movimento movimento[NMOV+1] = {
          {0,0}, /* fica parado */
          {-1,+2}, /* movimento[1] */
          {-2,+1}, /* movimento[2] */
          {-2,-1},
          {-1,-2},
          {+1,-2},
          {+2,-1},
          {+2,+1},
          {+1,+2} /* movimento[8] */
  };
  int mov;
```

Algoritmo passeioCavalo

```
/* linha 0 e coluna 0 do tabuleiro nao
serao usadas */
tab = malloc((n+1)*sizeof(int*));
for (i = 1; i <= n; i++)
  tab[i] = calloc(n+1,sizeof(int));
i = j = 1; /* posicao inicial */
k = 1; /* passo inicial */
mov = 1; /* movimento inicial */
tab[i][j] = 1; /* tabuleiro inicial */
iProx = jProx = 0; /* compilador feliz */
```

Algoritmo passeioCavalo

```
while (0 < k && k < n*n) {
  int achouMov = FALSE;
  nMovimentos++;
  while(mov <= NMOV && !achouMov){
     iProx = i + movimento[mov].i;
     jProx = j + movimento[mov].j;
     if (  (0 < iProx && iProx <= n)
        && (0 < jProx && jProx <= n)
        && tab[iProx][jProx] == 0)
        achouMov = TRUE;
     else
        mov++;
  }
```

Algoritmo passeioCavalo

```
  if (mov <= NMOV) { /* AVANCA */
     i = iProx;
     j = jProx;
     s[k] = mov;
     tab[i][j] = ++k;
     mov = 1;
  } else { /* BACKTRACKING */
     tab[i][j] = 0;
     mov = s[--k];
     i -= movimento[mov].i;
     j -= movimento[mov].j;
     mov++;
  }
}
```

Algoritmo passeioCavalo

```
  if (k == n*n) {
     /* uma solucao foi encontrada */
     mostreTabuleiro(n,tab);
  } else printf("\n NAO TEM SOLUCAO\n");
  /* libera memoria alocada */
  free(s);
  for (i = 1; i <= n; i++)
     free(tab[i]);
  free(tab);
  printf("Num.  mov.=%d\n", nMovimentos);
}
```

Mais *backtracking*

O esquema a seguir tenta descrever o método *backtracking*.

Suponha que a solução de um problema pode ser vista como uma sequência de decisões

$$x[1], x[2], \ldots, x[n]$$

Por exemplo, cada $x[k]$ pode ser a posição de uma rainha ou para qual posição mover o cavalo.

A relação invariante chave do método é algo como

> *no início de cada iteração x[1 . . k-1] é uma "solução parcial" (que pode ou não ser parte de uma solução)*

Mais *backtracking*

```
k ← 1
enquanto k > 1 faça
  procure valor para x[k] que ainda não
  foi testado e tal que x[1 . . k] é
  solução parcial
  se encontrou candidato para x[k] então
     k ← k + 1 (avança)
     se k = n + 1 então
        encontramos uma solução
        devolva x[1 . . n]
        k ← k − 1 (continua)
  senão k ← k − 1 (volta)
```

Enumeração de subsequências

PF 12

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/enum.html

Enumeração de subsequências

Problema: Enumerar todas as subsequências de 1, 2, . . . , n, ou seja, fazer uma lista em que cada subsequência aparece uma e uma só vez.

Exemplo: para n= 3 as subsequências são

```
1
1 2
1 2 3
1 3
2
2 3
3
```

Enumeração de subsequências

Exemplo: para n= 4 as subsequências são

```
1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 4
1 3
1 3 4
1 4
2
2 3
2 3 4
2 4
3
3 4
4
```

subseqLex

A função subseqLex recebe n e imprime todas as subsequências não vazias de 1 . . n.

```
void subseqLex (int n) {
  int *s, k;
  s = mallocSafe((n+1) * sizeof(int));
  s[0] = 0;
  k = 0;
```

subseqLex

```
  while(1) {
     if (s[k] < n) {
        s[k+1] = s[k] + 1;
        k += 1;
     } else {
        s[k-1] += 1;
        k -= 1;
     }
     if (k == 0) break;
     imprima(s, k);
  }
  free(s);
}
```