Melhores momentos

AULA 21

Resumo

função	consumo de tempo	observação
bubble	$O(n^2)$	todos os casos
insercao	$O(n^2)$ $O(n)$	pior caso melhor caso
insercaoBinaria	$O(n^2)$ $O(n \lg n)$	pior caso melhor caso
selecao	$O(n^2)$	todos os casos
mergeSort	$O(n \lg n)$	todos os casos
quickSort	$O(n^2)$ $O(n \lg n)$	pior caso melhor caso
heapSort	$O(n \lg n)$	todos os casos

Divisão e conquista

Algoritmos por divisão-e-conquista têm três passos em cada nível da recursão:

Dividir: o problema é dividido em subproblemas de tamanho menor;

Conquistar: os subproblemas são resolvidos recursivamente e subproblemas "pequenos" são resolvidos diretamente;

Combinar: as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução do problema original.

Exemplo: ordenação por intercalação (`mergeSort`).

AULA 22

Busca de palavras (string matching)

PF 13

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/strma.html

Busca de palavras em um texto

Dizemos que um vetor $\mathtt{p}[1\,..\,\mathtt{m}]$ **ocorre em** um vetor $\mathtt{t}[1\,..\,\mathtt{n}]$ se

$$\mathtt{p}[1\,..\,\mathtt{m}] = \mathtt{t}[\mathtt{s}+1\,..\,\mathtt{s}+\mathtt{m}]$$

para algum $\mathtt{s}$ em $[0\,..\,\mathtt{n}-\mathtt{m}]$.

Exemplo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	x	c	b	a	b	b	c	b	a	x

	1	2	3	4
p	b	c	b	a

$\mathtt{p}[1\,..\,4]$ ocorre em $\mathtt{t}[1\,..\,10]$ com deslocamento 5.

Busca de palavras em um texto

Problema: Dados $p[1 \mathinner{.\,.} m]$ e $t[1 \mathinner{.\,.} n]$, encontrar o número de ocorrências de p em t.

Exemplo: Para $n = 10$, $m = 4$, e

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	b	b	a	b	a	b	a	c	b	a

	1	2	3	4
p	b	a	b	a

p ocorre 2 vezes em t.

Algoritmo trivial

p = a b a b b a b a b b a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t

1 a b a b b a b a b b a

Algoritmo trivial

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											

Algoritmo trivial

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										

Algoritmo trivial

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
4				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										

Algoritmo trivial

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
4				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
5					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
6						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
7							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
8								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
9									a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a					
10										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
11											a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a			
12												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		
13													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Algoritmo trivial

Devolve o número de ocorrências de p em t.

```
int trivial (unsigned char p[], int m,
             unsigned char t[], int n) {
   int r, k, ocorrs = 0;
   for (k = 1; k <= n-m+1; k++) {
      r = 0;
      while (r < m && p[1+r] == t[k+r])
         r += 1;
      if (r == m) ocorrs += 1;
   }
   return ocorrs;
}
```

Algoritmo trivial

Relação invariante: no início da linha 3 vale que

(i0) $p[1\,..\,1{+}r{-}1] = t[k\,..\,k{+}r{-}1]$

Consumo de tempo

Consumo de tempo da função `trivial`, versão direita para a esquerda.

linha	todas as execuções da linha
1	$= n - m + 2$
2	$= n - m + 1$
3	$\leq (n - m + 1)(m + 1)$
4	$\leq (n - m + 1)m$
5	$= n - m + 1$
6	$= 1$
total	$< 3\,(n - m + 2) + 2\,(n - m + 1)(m + 1)$ $= \mathrm{O}((n - m + 1)m)$

Pior caso

$p =$ a a a a a a a a a a a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	t
1	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a													
2		a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a												
3			a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a											
4				a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a										
5					a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a									
6						a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a								
7							a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a							
8								a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a						
9									a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a					
10										a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a				
11											a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a			
12												a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a		
13													a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	

Melhor caso

$p =$ b a a a a a a a a a a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	t
1	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a													
2		b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a												
3			b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a											
4				b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a										
5					b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a									
6						b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a								
7							b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a							
8								b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a						
9									b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a					
10										b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a				
11											b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a			
12												b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a		
13													b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	

Conclusões

O consumo de tempo da função `trivial` no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo da função `trivial` no melhor caso é $O(n - m + 1)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a mn.

Algoritmo trivial: direita para esquerda

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												

Algoritmo trivial: direita para esquerda

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											

Algoritmo trivial: direita para esquerda

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											

Algoritmo trivial: direita para esquerda

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
4				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										

Algoritmo trivial: direita para esquerda

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
4				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
5					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									

Algoritmo trivial: direita para esquerda

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
4				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
5					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
6						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							

Algoritmo trivial: direita para esquerda

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
4				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
5					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
6						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
7							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							

Algoritmo trivial: direita para esquerda

p = a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2		a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
3			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
4				a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
5					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
6						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
7							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
8								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
9									a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a					
10										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
11											a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a			
12												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		
13													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Algoritmo trivial: direita para esquerda

Devolve o número de ocorrências de p em t.

```
int trivial (unsigned char p[], int m,
             unsigned char t[], int n) {
   int r, k, ocorrs = 0;
   for (k = m; k <= n; k++) {
      r = 0;
      while (r < m && p[m-r] == t[k-r])
         r += 1;
      if (r == m) ocorrs += 1;
   }
   return ocorrs;
}
```

Algoritmo trivial: direita para esquerda

Relação invariante: no início da linha 3 vale que

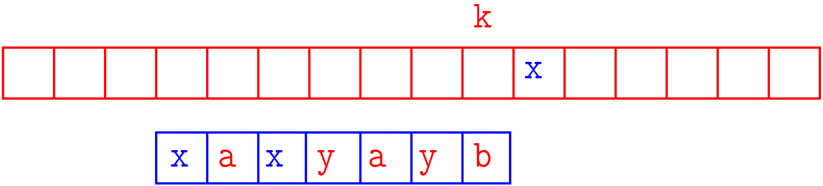
(i0) $p[m-r+1\,..\,m] = t[k-r+1\,..\,k]$

Algoritmo trivial: direita para esquerda

```
int trivial (unsigned char p[], int m,
             unsigned char t[], int n) {
    int r, k, ocorrs;
    ocorrs = 0; k = m;
    while (k <= n) {
        r = 0;
        while (r < m && p[m-r] == t[k-r])
            r += 1;
        if (r == m) ocorrs += 1;
        k += 1;
    }
    return ocorrs;
}
```

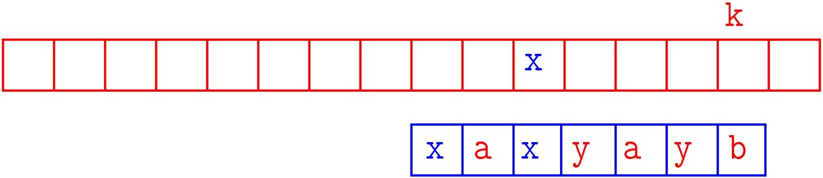
Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

O primeiro algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Boyer-Moore

$p =$ a n d a n d o

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t

1 a n d a n d o

Boyer-Moore

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			

Boyer-Moore

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2									a	n	d	a	n	d	o																		
3												a	n	d	a	n	d	o															

Boyer-Moore

$p = \text{a n d a n d o}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2									a	n	d	a	n	d	o																		
3												a	n	d	a	n	d	o															
4																				a	n	d	a	n	d	o							

Boyer-Moore

p = a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2									a	n	d	a	n	d	o																		
3												a	n	d	a	n	d	o															
4																				a	n	d	a	n	d	o							
5																					a	n	d	a	n	d	o						

Boyer-Moore

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2									a	n	d	a	n	d	o																		
3												a	n	d	a	n	d	o															
4																				a	n	d	a	n	d	o							
5																					a	n	d	a	n	d	o						
6																													a	n	d	a	...

Boyer-Moore

$p = a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b\ a$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													

Boyer-Moore

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											

Boyer-Moore

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									

Boyer-Moore

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a												
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a										
3					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
4							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						

Boyer-Moore

$p = a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b\ a$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
4							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
5								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						

Boyer-Moore

$p = a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b\ a$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
4							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
5								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
6										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				

Boyer-Moore

$p = a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b\ a$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
4							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
5								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
6										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
7												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		

Boyer-Moore

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2			a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a											
3					a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a									
4							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
5								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
6										a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a				
7												a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a		
8													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

Ideia ("*bad-character heuristic*"): calcular um deslocamento de modo que t[k+1] fique emparelhado com a última ocorrência do caractere t[k+1] em p.

Suponha que o conjunto a que pertencem todos os elementos de p e de t é conhecido de antemão. Este conjunto é o **alfabeto** do problema.

Suponha que o alfabeto é o conjunto de todos os 256 caracteres.

Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

Para implementar essa ideia fazemos um pré-processamento de p, determinando para cada símbolo x do alfabeto a posição de sua última ocorrência em p.

	1	2	3	4	5	6	7
p	a	n	d	a	n	d	o

	0	...	'a'	'b'	'c'	'd'	...	...	'n'	'o'	'p'	...	255
ult	0	...	4	0	0	6	...	...	5	7	0	...	...

Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

Recebe vetores $p[1 \mathrel{..} m]$ e $t[1 \mathrel{..} n]$ de caracteres, com $m \geq 1$ e $n \geq 0$, e devolve o número de ocorrências de p em t.

```
int BoyerMoore (unsigned char p[], int m,
                unsigned char t[], int n) {
    int ult[256];
    int i, r, k, ocorrs;

    /* pre-processamento da palavra p */
    for (i=0; i < 256; i++) ult[i] = 0;
    for (i=1; i <= m; i++) ult[p[i]] = i;
```

Primeiro algoritmo de Boyer-Moore

```
  /* busca da palavra p no texto t */
   ocorrs = 0; k = m;
   while (k <= n) {
       r = 0;
       while (r < m && p[m-r] == t[k-r])
           r += 1;
       if (r == m) ocorrs += 1;
       if (k == n) k += 1;
       else k += m - ult[t[k+1]] + 1;
   }
   return ocorrs;
 }
```

Pior caso

$p =$ a a a a a a a a a a a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	t
1	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a													
2		a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a												
3			a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a											
4				a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a										
5					a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a									
6						a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a								
7							a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a							
8								a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a						
9									a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a					
10										a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a				
11											a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a			
12												a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a		
13													a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	

Melhor caso

$p = \text{a a a a b}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	t

1 a a a a b

Melhor caso

$p = \text{a a a a b}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	t
1	a	a	a	a	b																		
2							a	a	a	a	b												

Melhor caso

p = a a a a b

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	t
1	a	a	a	a	b																		
2							a	a	a	a	b												
3													a	a	a	a	b						

Melhor caso

$p = \mathtt{a\ a\ a\ a\ b}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	c	?	?	?	?	a	t
1	a	a	a	a	b																			
2							a	a	a	a	b													
3													a	a	a	a	b							
4																			a	a	a	a	b	

Conclusões

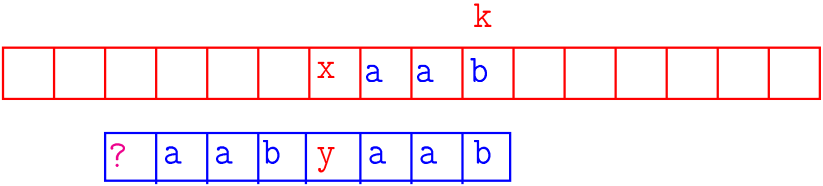
O consumo de tempo da função BoyerMoore no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo da função BoyerMoore no melhor caso é $O(n/m)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a mn e no melhor caso o algoritmo é **sublinear**.

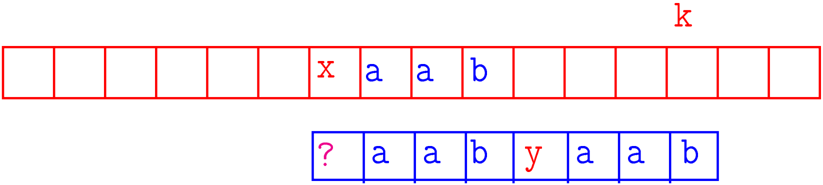
Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Segundo algoritmo de Boyer-Moore

O segundo algoritmo de R.S. Boyer e J.S. Moore (1977) é baseado na seguinte heurística.



Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										

Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			

Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		

Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	

Boyer-Moore 2

p = a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																

Boyer-Moore 2

p = a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																
6												a	n	d	a	n	d	o															

Boyer-Moore 2

p = a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																
6												a	n	d	a	n	d	o															
7													a	n	d	a	n	d	o														

Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																
6												a	n	d	a	n	d	o															
7													a	n	d	a	n	d	o														
8														a	n	d	a	n	d	o													

Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																
6												a	n	d	a	n	d	o															
7													a	n	d	a	n	d	o														
8														a	n	d	a	n	d	o													
9															a	n	d	a	n	d	o												

Boyer-Moore 2

p = a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																
6												a	n	d	a	n	d	o															
7													a	n	d	a	n	d	o														
8														a	n	d	a	n	d	o													
9															a	n	d	a	n	d	o												
10																a	n	d	a	n	d	o											

Boyer-Moore 2

p = a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																
6												a	n	d	a	n	d	o															
7													a	n	d	a	n	d	o														
8														a	n	d	a	n	d	o													
9															a	n	d	a	n	d	o												
10																a	n	d	a	n	d	o											
11																	a	n	d	a	n	d	o										

Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	a	s		a	n	d	o	r	i	n	h	a	s		a	n	d	a	m		a	n	d	a	n	d	o		a	l	t	o	t
1	a	n	d	a	n	d	o																										
2								a	n	d	a	n	d	o																			
3									a	n	d	a	n	d	o																		
4										a	n	d	a	n	d	o																	
5											a	n	d	a	n	d	o																
6												a	n	d	a	n	d	o															
7													a	n	d	a	n	d	o														
8														a	n	d	a	n	d	o													
9															a	n	d	a	n	d	o												
10																a	n	d	a	n	d	o											
11																	a	n	d	a	n	d	o										
15																					a	n	d	a	n	d	o						

Boyer-Moore 2

$p =$ a n d a n d o

```
     1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
     a  s     a  n  d  o  r  i  n  h  a  s     a  n  d  a  m     a  n  d  a  n  d  o     a  l  t  o  t
 1   a  n  d  a  n  d  o
 2                        a  n  d  a  n  d  o
 3                           a  n  d  a  n  d  o
 4                              a  n  d  a  n  d  o
 5                                 a  n  d  a  n  d  o
 6                                    a  n  d  a  n  d  o
 7                                       a  n  d  a  n  d  o
 8                                          a  n  d  a  n  d  o
 9                                             a  n  d  a  n  d  o
10                                                a  n  d  a  n  d  o
11                                                   a  n  d  a  n  d  o
15                                                               a  n  d  a  n  d  o
16                                                                                    a  n  d  a  . . .
```

Boyer-Moore 2

$p = a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b\ a$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													

Boyer-Moore 2

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								

Boyer-Moore 2

$p = a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b\ a$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
3							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							

Boyer-Moore 2

$p = \text{a b a b b a b a b b a}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
3							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
4								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						

Boyer-Moore 2

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
3							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
4								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
5													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	

Boyer-Moore 2

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
3							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
4								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
5													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	
6																		a	b	a	b	b	a	...

Boyer-Moore 2

$p =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	t
1	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a													
2						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a								
3							a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a							
4								a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a						
5													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	
6																		a	b	a	b	b	a	...

Segundo algoritmo de Boyer-Moore

Ideia (*good-suffix heuristic*): para cada índice h calcular o maior i em $1 \,.\,.\, m\text{-}1$ tal que

- $p[1 \,.\,.\, j]$ é um sufixo de $p[i \,.\,.\, m]$ ou
- $p[i \,.\,.\, m]$ é um sufixo de $p[1 \,.\,.\, j]$.

Para implementar essa ideia basta um fazermos um pré-processamento que **só depende** de p.

Segundo algoritmo de Boyer-Moore

Para implementar essa ideia fazemos um pré-processamento de p, determinando para cada símbolo índice i o índice alcance[i] de um "sufixo bom".

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
alcance	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	8

Segundo algoritmo de Boyer-Moore

Para implementar essa ideia fazemos um pré-processamento de `p`, determinando para cada símbolo índice `h` o índice `alcance[h]` de um "sufixo bom".

	1	2	3	4	5	6
`p`	c	a	a	b	a	a

	1	2	3	4	5	6
`alcance`	0	0	0	0	3	5

Segundo algoritmo de Boyer-Moore

Recebe vetores p[1 . . m] e t[1 . . n] de caracteres, com m $\geq$ 1 e n $\geq$ 0, e devolve o número de ocorrências de p em t.

```
int BoyerMoore2 (unsigned char p[], int m,
                 unsigned char t[], int n) {
   int *alcance;
   int i, r, k, ocorrs;
   /* pre-processamento da palavra p */
    alcance = preProcessamento(p, m);
    /* em branco */
```

Segundo algoritmo de Boyer-Moore

```
   /* busca da palavra p no texto t */
   ocorrs = 0; k = m;
   while (k <= n) {
       r = 0;
       while (r < m && p[m-r] == t[k-r])
           r += 1;
       if (r == m) ocorrs += 1;
       if (r == 0) k += 1;
       else k += m - alcance[m-r+1];
   }
   free(alcance);
   return ocorrs;
}
```

Pré-processamento

```
int *
preProcessamento(unsigned char p[], int m)
{
    int i, r, j, *alcance;
    alcance = malloc((m+1)*sizeof(int));
    for (i = m; i >= 1; i--) {
        j = m-1; r = 0
        while (m-r >= i && j-r >= 1)
            if (p[m-r] == p[j-r]) r += 1;
            else j -= 1, r = 0;
        alcance[i] = j;
    }
    return alcance;
}
```

Pior caso

$p =$ a a a a a a a a a a a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	t
1	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a													
2		a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a												
3			a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a											
4				a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a										
5					a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a									
6						a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a								
7							a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a							
8								a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a						
9									a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a					
10										a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a				
11											a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a			
12												a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a		
13													a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	

Melhor caso

$p = \text{a a a a b}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	t
a	a	a	a	b																			

1

Melhor caso

$p = \text{a a a a b}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	t
1	a	a	a	a	b																			
2						a	a	a	a	b														

Melhor caso

$p = \text{a a a a b}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	t
1	a	a	a	a	b																			
2						a	a	a	a	b														
3											a	a	a	a	b									

Melhor caso

$p = \mathrm{a\ a\ a\ a\ b}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	t
1	a	a	a	a	b																			
2						a	a	a	a	b														
3											a	a	a	a	b									
4																a	a	a	a	b				

Melhor caso

$p = \text{a a a a b}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	c	b	?	?	?	t
1	a	a	a	a	b																			
2						a	a	a	a	b														
3											a	a	a	a	b									
4																a	a	a	a	b				
5																					a	a	a	...

Conclusões

O consumo de tempo da função BoyerMoore2 no pior caso é $O((n - m + 1)m)$.

O consumo de tempo da função BoyerMoore2 no melhor caso é $O(n/m)$.

Isto significa que no pior caso o consumo de tempo é essencialmente proporcional a mn e no melhor caso o algoritmo é **sublinear**.

Terceiro algoritmo de Boyer-Moore

O algoritmo de Boyer-Moore propriamente dito é uma fusão dos dois anteriores:

> *a cada passo, o algoritmo escolhe o maior dos deslocamentos ditados pelas tabelas* `ult` e `alcance`.