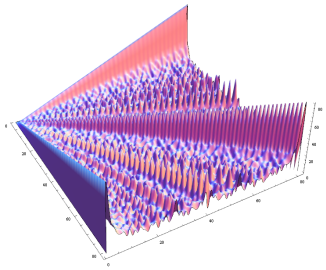
AULA 4

Hoje

- mais análise de algoritmos: algoritmo de Euclides
- mais recursão: curvas de Hilbert

Algoritmo de Euclides



Fonte: http://math.stackexchange.com/

PF 2 (Exercícios) S 5.1

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html

http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0122-2014/aulas/mdc/

Algoritmo de Euclides

O máximo divisor comum pode ser determinado através de um algoritmo de 2300 anos (cerca de 300 A.C.), o **algoritmo de Euclides**.

Para calcular o $\texttt{mdc}(\texttt{m},\texttt{n})$ o algoritmo de Euclides usa a recorrência:

$$\texttt{mdc}(\texttt{m},0) = \texttt{m};$$
$$\texttt{mdc}(\texttt{m},\texttt{n}) = \texttt{mdc}(\texttt{n},\texttt{m}\%\texttt{n}), \text{ para } \texttt{n} > 0.$$

Assim, por exemplo,

$$\texttt{mdc}(12,18) = \texttt{mdc}(18,12) = \texttt{mdc}(12,6) = \texttt{mdc}(6,0) = 6.$$

Correção

A correção da recorrência proposta por Euclides é baseada no seguinte fato.

> Se m, n e d são números inteiros, $\texttt{m} \geq 0$, $\texttt{n}, \texttt{d} > 0$, então
>
> d divide m e n $\Leftrightarrow$ d divide n e $\texttt{m}\%\texttt{n}$.

Euclides recursivo

```
int euclidesR(int m, int n)
{
  if (n == 0) return m;
  return euclidesR(n, m % n);
}
```

Euclides iterativo

```
/* Pre-condicao:  a funcao supoe n > 0 */
int euclidesI(int m, int n) {
  int r;
  do
  {
      r = m % n;
      m = n;
      n = r;
  }
  while (r != 0);
  return m;
}
```

euclidesR(317811,514229)

```
euclidesR(317811,514229)
  euclidesR(514229,317811)
    euclidesR(317811,196418)
      euclidesR(196418,121393)
        euclidesR(121393,75025)
          euclidesR(75025,46368)
            euclidesR(46368,28657)
              euclidesR(28657,17711)
                euclidesR(17711,10946)
                  euclidesR(10946,6765)
                    euclidesR(6765,4181)
                      euclidesR(4181,2584)
                        euclidesR(2584,1597)
                          euclidesR(1597,987)
                            euclidesR(987,610)
                              euclidesR(610,377)
                                euclidesR(377,233)
                                  euclidesR(233,144)
                                    euclidesR(144,89)
                                      euclidesR(89,55)
                                        euclidesR(55,34)
                                          euclidesR(34,21)
                                            euclidesR(21,13)
                                              euclidesR(13,8)
                                                euclidesR(8,5)
                                                  euclidesR(5,3)
                                                    euclidesR(3,2)
                                                      euclidesR(2,1)
                                                        euclidesR(1,0)
mdc(317811,514229) = 1.
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real  0m0.004s
user  0m0.004s
sys   0m0.000s

meu_prompt>time ./euclidesR 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real  0m0.002s
user  0m0.000s
sys   0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real  0m1.692s
user  0m1.684s
sys   0m0.000s

meu_prompt>time ./euclidesR 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real  0m0.002s
user  0m0.000s
sys   0m0.000s
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função euclidesR é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Suponha que euclidesR faz k chamadas recursivas e que no início da 1a. chamada ao algoritmo tem-se que $0 < n \leq m$.

Sejam

$$(m, n) = (m_0, n_0), (m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k) = (mdc(m, n), 0),$$

os valores dos parâmetros no início de cada uma das chamadas da função.

Número de chamadas recursivas

Por exemplo, para $m = 514229$ e $n = 317811$ tem-se

$$\begin{aligned}(m_0, n_0) &= (514229, 317811),\\ (m_1, n_1) &= (317811, 196418),\\ (m_2, n_2) &= (196418, 121393),\\ \ldots &= \ldots\\ (m_{27}, n_{27}) &= (1, 0).\end{aligned}$$

Número de chamadas recursivas

Estimaremos o valor de k em função de $n = \min(m, n)$.

Note que $m_{i+1} = n_i$ e $n_{i+1} = m_i \% n_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Note ainda que para inteiros a e b, $0 < b \leq a$ vale que

$$a \% b < \frac{a}{2} \quad \text{(verifique!)}.$$

Número de chamadas recursivas

Desta forma tem-se que

$$\begin{array}{lllllllll}
n_2 & = & m_1 \% n_1 & = & n_0 \% n_1 & < & n_0/2 & = & n/2 & = & n/2^1 \\
n_4 & = & m_3 \% n_3 & = & n_2 \% n_3 & < & n_2/2 & < & n/4 & = & n/2^2 \\
n_6 & = & m_5 \% n_5 & = & n_4 \% n_5 & < & n_4/2 & < & n/8 & = & n/2^3 \\
n_8 & = & m_7 \% n_7 & = & n_6 \% n_7 & < & n_6/2 & < & n/16 & = & n/2^4 \\
n_{10} & = & m_9 \% n_9 & = & n_8 \% n_9 & < & n_8/2 & < & n/32 & = & n/2^5
\end{array}$$

$\ldots$

$\ldots$

$\ldots$

Percebe-se que depois de cada 2 chamadas recursivas o valor do segundo parâmetro é reduzido a menos da sua metade.

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que

$$2^t \leq n < 2^{t+1}$$

Da primeira desigualdade temos que

$$t \leq \lg n,$$

onde $\lg n$ denota o logaritmo de n na base 2.
Da desigualde estrita, concluímos que

$$k \leq 2(t+1) - 1 = 2t + 1$$

Logo, o número k de chamadas recursivas é não superior a

$$2t + 1 \leq 2 \lg n + 1.$$

Número de chamadas recursivas

Para o exemplo acima, onde m=514229 e n=317811, temos que

$$2 \lg n + 1 = 2 \lg(317811) + 1 < 2 \times 18{,}3 + 1 < 37{,}56$$

e o número de chamadas recursivas feitas por `euclidesR`(514229,317811) foram 27.

Consumo de tempo

Resumindo, a quantidade de tempo consumida pelo algoritmo de Euclides é, no pior caso, proporcional a $\lg n$.

Este desempenho é significativamente melhor que o desempenho do algoritmo *café com leite*, já que a função $f(n) = \lg n$ cresce muito mais lentamente que a função $g(n) = n$.

Consumo de tempo

n	(int) $\lg n$
4	2
5	2
6	2
10	3
64	6
100	6
128	7
1000	9
1024	10
1000000	19
1000000000	29

Conclusões

Suponha que $m > n$.

O número de chamadas recursivas da função `euclidesR` é $\leq 2(\lg n) - 1$.

No pior caso, o consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional a $\lg n$.

Conclusões

Suponha que $m > n$.

O consumo de tempo da função `euclidesR` é $O(\lg n)$.

Para que o consumo de tempo da função `euclidesR` dobre é necessário que o valor de `n` seja elevado ao quadrado.

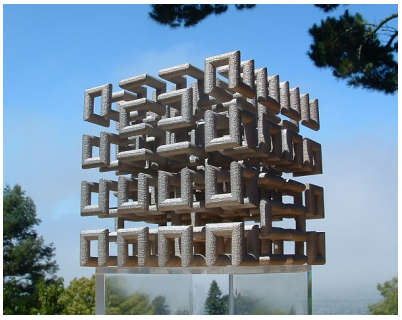
Euclides e Fibonacci

Demonstre por indução em `k` que:

Se $m > n \geq 0$ e se a chamada `euclidesR(m,n)` faz $k \geq 1$ chamadas recursivas, então

$m \geq$ `fibonacci`$(k+2)$ e $n \geq$ `fibonacci`$(k+1)$.

Curvas de Hilbert



Fonte: `http://momath.org/home/math-monday-03-22-10`

Niklaus Wirth, *Algorithms and Data Structures*
Prentice Hall, 1986.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_curve`

Curvas de Hilbert

As curvas a seguir seguem um certo padrão regular e podem ser desenhadas na tela sobre o controle de um programa.

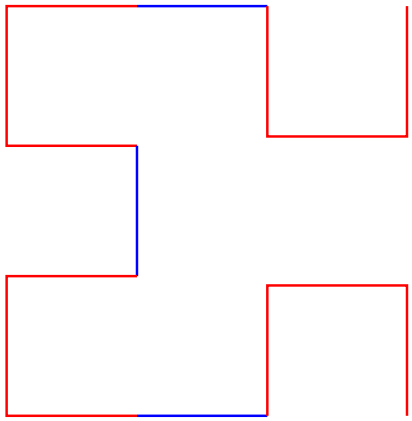
O objetivo é descobrir o esquema de recursão para construir tais curvas.

Estes padrões serão chamados de $H_0, H_1, H_2 \ldots$.

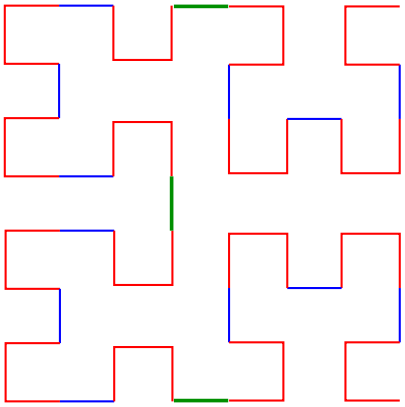
Cada H_i denomina a **curva de Hilbert** de ordem `i`, em homenagem a seu inventor, o matemático *David Hilbert*.

H_1

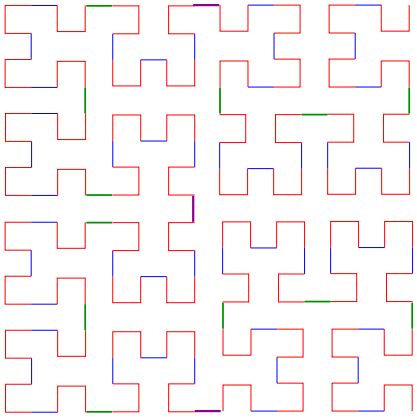
H_2



H_3



H_4



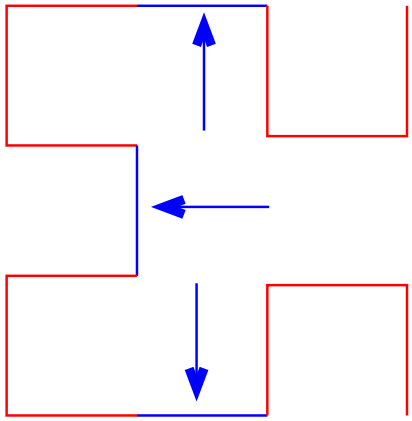
Padrão

As figuras mostram que H_{i+1} é obtida pela composição de 4 instâncias de H_i de metade do tamanho e com a rotação apropriada, ligadas entre si por meio de 3 linhas de conexão.

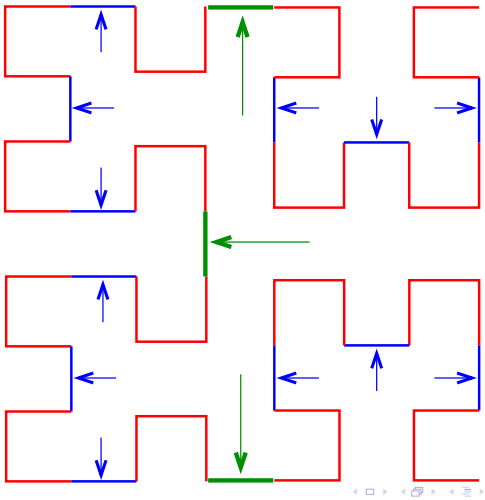
Por exemplo:

- H_1 é formada por 4 H_0 (vazio) conectados por 3 linhas.
- H_2 é formada por 4 H_1 conectados por 3 linhas
- H_3 é formada por 4 H_2 conectados por 3 linhas

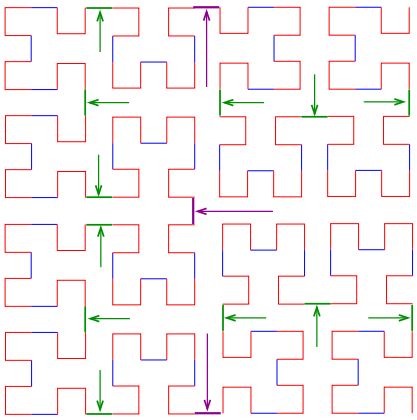
H_2



H_3



H_4



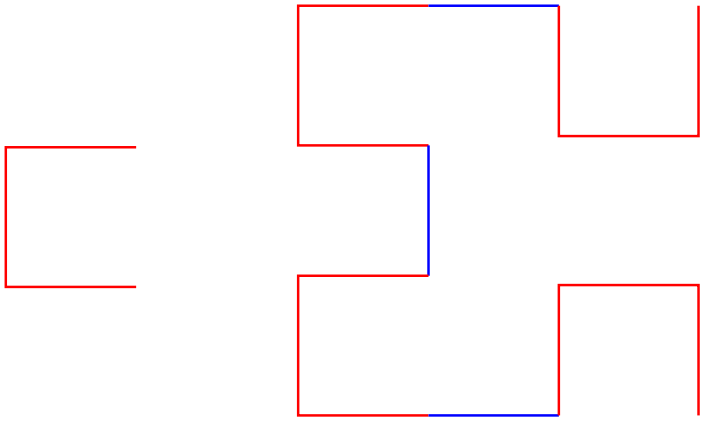
Partes da curva

Para ilustrar, denotaremos as quatro possíveis instâncias por A, B, C e D:

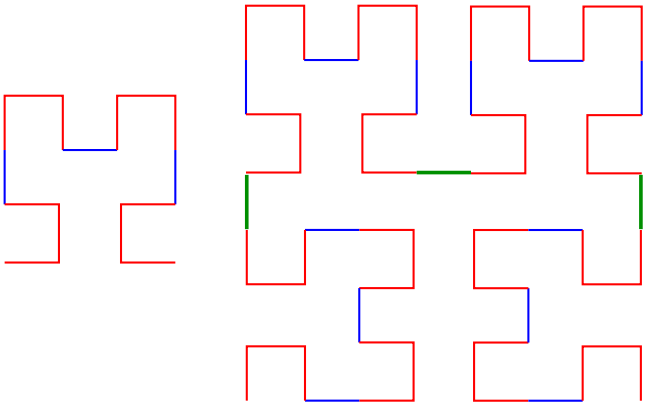
- A será o padrão que tem a "abertura" para direita;
- B será o padrão que tem a "abertura" para baixo;
- C será o padrão que tem a "abertura" para esquerda; e
- D será o padrão que tem a "abertura" para cima.

Representaremos a chamada da função que desenha as interconexões por meio da setas $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$.

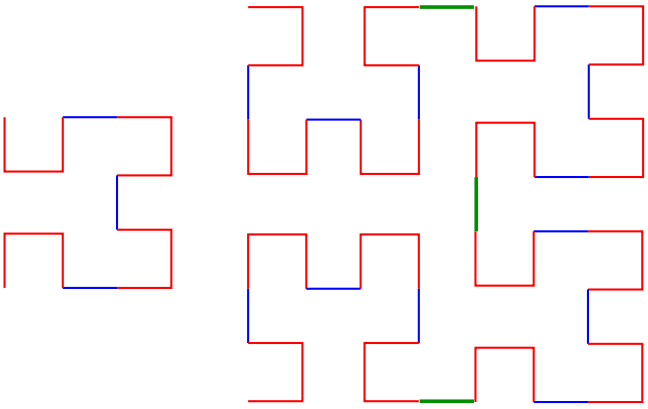
A_1 e A_2



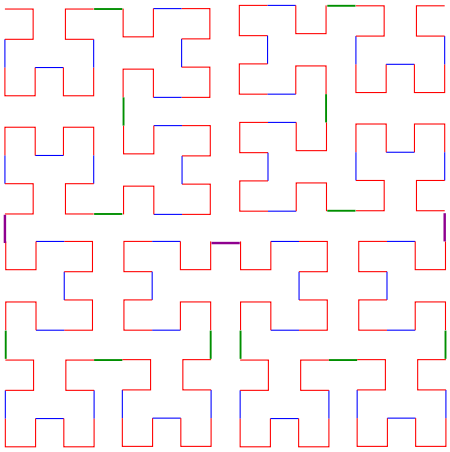
B_2 e B_3



C_2 e C_3



D_4



Esquema recursivo

Assim, surge o seguinte esquema recursivo:

$$
\begin{array}{lllllllll}
A_k: & D_{k-1} & \leftarrow & A_{k-1} & \downarrow & A_{k-1} & \rightarrow & B_{k-1} \\
B_k: & C_{k-1} & \uparrow & B_{k-1} & \rightarrow & B_{k-1} & \downarrow & C_{k-1} \\
C_k: & B_{k-1} & \rightarrow & C_{k-1} & \uparrow & C_{k-1} & \leftarrow & D_{k-1} \\
D_k: & A_{k-1} & \downarrow & D_{k-1} & \leftarrow & D_{k-1} & \uparrow & C_{k-1}
\end{array}
$$

Para desenhar os segmentos utilizaremos a chamada de uma função

```
linha(x,y,direcao,comprimento)
```

que "move um pincel" da posição (x,y) em uma dada direcao por um certo comprimento.

```
typedef enum {DIREITA, ESQUERDA, CIMA, BAIXO} Direcao;
void linha(int *x, int *y,Direcao direcao,
      int comprimento) {
  switch (direcao) {
  case DIREITA  :  *x = *x + comprimento;
     break;
  case ESQUERDA :  *x = *x - comprimento;
     break;
  case CIMA     :  *y = *y + comprimento;
     break;
  case BAIXO    :  *y = *y - comprimento;
     break;
  }
  desenheLinha(*x, *y);
}
```

A_k

```
void
a(int k, int *x, int *y, int comprimento)
{
  if (k > 0) {
     d(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, ESQUERDA, comprimento);
     a(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, BAIXO, comprimento);
     a(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, DIREITA, comprimento);
     b(k-1, x, y, comprimento);
  }
}
```

B_k

```
void
b(int k, int *x, int *y, int comprimento)
{
  if (k > 0) {
     c(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, CIMA, comprimento);
     b(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, DIREITA, comprimento);
     b(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, BAIXO, comprimento);
     a(k-1, x, y, comprimento);
  }
}
```

C_k

```
void
c(int k, int *x, int *y, int comprimento)
{
  if (k > 0) {
     b(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, DIREITA, comprimento);
     c(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, CIMA, comprimento);
     c(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, ESQUERDA, comprimento);
     d(k-1, x, y, comprimento);
  }
}
```

D_k

```
void
d(int k, int *x, int *y, int comprimento)
{
  if (k > 0) {
     a(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, BAIXO, comprimento);
     d(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, ESQUERDA, comprimento);
     d(k-1, x, y, comprimento);
     linha(x, y, CIMA, comprimento);
     c(k-1, x, y, comprimento);
  }
}
```