

Melhores momentos

AULA 1

Recursão

A resolução recursiva de um problema tem tipicamente a seguinte estrutura:

se a instância em questão é “pequena”
 resolva-a diretamente (use força bruta
 se necessário);

senão

reduza-a a uma instância “menor” do
 mesmo problema,
 aplique o método à instância menor e
 volte à instância original.

Fatorial recursivo

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{quando } n = 0, \\ n \times (n - 1)!, & \text{quando } n > 0. \end{cases}$$

```
long
fatorial(long n)
{
    if (n == 0) return 1;
    return n * fatorial(n-1);
}
```

Diagramas de execução

fatorial(3)

n

3

fatorial(2)

n

2

fatorial(1)

n

1

fatorial(1)

n

0

return 1

return n * fatorial(0) = 1 * 1

return n * fatorial(1) = 2 * 1 = 2

return n * fatorial(2) = 3 * 2 = 6

Fatorial iterativo

```
long
fatorial(long n)
{
    int i, ifat;

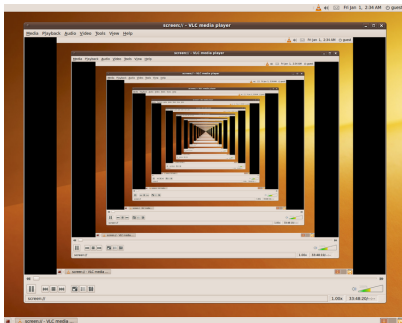
    ifat = 1;
    for (i = 1; /*1*/ i <= n; i++)
        ifat *= i;

    return ifat;
}
```

Em /*1*/ vale que `ifat == (i-1)!`

AULA 2

Mais recursão



Fonte: <http://commons.wikimedia.org/>

PF 2.1, 2.2, 2.3 S 5.1

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

Problema do máximo

PF 2.2 e 2.3

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

Problema do máximo

Problema: encontrar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0 \dots n-1]$.

Entra:

	0			4						$n-1$	
v	10	44	10	35	99	40	20	65	55	50	38

Sai: máximo == 99

Máximo recursivo

```
int maximoR(int n, int v[])
{
1  if (n == 1)
2      return v[0];
3  else
4      {
5          int x;
6          x = maximoR(n-1, v);
7          if (x > v[n-1])
8              return x;
9          else
10             return v[n-1];
11     }
12 }
```

...alternativamente ...

```
int maximoR(int n, int v[])
{
0  int x;
1  if (n == 1) return v[0];
2  x = maximoR(n-1, v);
3  if (x > v[n-1]) return x;
4  return v[n-1];
}
```

Outro máximo recursivo

```
int maximo(int n, int v[]) {  
1  return maxR(0, n, v);  
}  
  
int maxR(int i, int n, int v[])  
{  
1  if (i == n-1) return v[i];  
3  else {  
4      int x;  
5      x = maximo(i+1, n, v);  
6      if (x > v[i]) return x;  
7      else return v[i];  
    }  
}
```

...alternativamente ...

```
int maximo(int n, int v[]) {  
1  return maxR(0, n, v);  
}  
  
int maxR(int i, int n, int v[])  
{  
0  int x;  
1  if (i == n-1) return v[i];  
2  x = maximoR(i+1, n, v);  
3  if (x > v[i]) return x;  
4  return v[i];  
}
```


Binomial recursivo

Regra de Pascal

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{quando } n = 0 \text{ e } k > 0, \\ 1, & \text{quando } n \geq 0 \text{ e } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{quando } n, k > 0. \end{cases}$$

Binomial

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n											

Binomial recursivo

```
long
binomialRO(int n, int k)
{
1  if (n == 0 && k > 0) return 0;
2  if (n >= 0 && k == 0) return 1;
3  return binomialRO(n-1, k) +
4         binomialRO(n-1, k-1);
}
```

`binomialR0(3,2)`

`binomialR0(3,2)`

`binomialR0(2,2)`

`binomialR0(1,2)`

`binomialR0(0,2)`

`binomialR0(0,1)`

`binomialR0(1,1)`

`binomialR0(0,1)`

`binomialR0(0,0)`

`binomialR0(2,1)`

`binomialR0(1,1)`

`binomialR0(0,1)`

`binomialR0(0,0)`

`binomialR0(1,0)`

`binom(3,2)=3.`

Binomial iterativo

```
long binomialI(int n, int k)
{
    int i, j, bin[MAX][MAX];

    for (j = 1; j <= k; j++) bin[0][j] = 0;
    for (i = 0; i <= n; i++) bin[i][0] = 1;

    for (i = 1; i <= n; i++)
        for (j = 1; j <= k; j++)
            bin[i][j] = bin[i-1][j] +
                bin[i-1][j-1];

    return bin[n][k];
}
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 2  
binom(30,2)=435  
real          0m0.002s  
user          0m0.000s  
sys           0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./binomialR0 30 2  
binom(30,2)=435  
real          0m0.002s  
user          0m0.000s  
sys           0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 20
binom(30,20)=30045015
real                0m0.002s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./binomialR0 30 20
binom(30,20)=30045015
real                0m17.886s
user                0m17.881s
sys                 0m0.000s
```

Resolve subproblemas muitas vezes

binomialR0(3,2)

binomialR0(2,2)

binomialR0(1,2)

binomialR0(0,2)

binomialR0(0,1)

binomialR0(1,1)

binomialR0(0,1)

binomialR0(0,0)

binomialR0(2,1)

binomialR0(1,1)

binomialR0(0,1)

binomialR0(0,0)

binomialR0(1,0)

binom(3,2)=3.

Resolve subproblemas muitas vezes

```
binomialR0(5,4)
  binomialR0(4,4)
    binomialR0(3,4)
      binomialR0(2,4)
        binomialR0(1,4)
          binomialR0(0,4)
        binomialR0(0,3)
      binomialR0(1,3)
        binomialR0(0,3)
      binomialR0(0,2)
    binomialR0(2,3)
      binomialR0(1,3)
        binomialR0(0,3)
      binomialR0(0,2)
    binomialR0(1,2)
      binomialR0(0,2)
      binomialR0(0,1)
    binomialR0(3,3)
      binomialR0(2,3)
        binomialR0(1,3)
          binomialR0(0,3)
        binomialR0(0,2)
      binomialR0(1,2)
        binomialR0(0,2)
        binomialR0(0,1)
      binomialR0(0,3)
    binomialR0(0,3)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(2,2)
  binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(2,2)
  binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(4,3)
  binomialR0(3,3)
  binomialR0(2,3)
  binomialR0(1,3)
  binomialR0(0,3)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(3,2)
  binomialR0(2,2)
  binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(2,2)
  binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binomialR0(1,2)
  binomialR0(0,2)
  binomialR0(0,1)
binom(5,4)=5.
```

Mais eficiente ...

Regra de Pascal

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{quando } n < k, \\ 1, & \text{quando } n = k \text{ ou } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{quando } n, k > 0. \end{cases}$$

Mais eficiente ...

```
long
binomialR1(int n, int k)
{
1  if (n < k) return 0;
2  if (n == k || k == 0) return 1;
3  return binomialR1(n-1, k)
4         + binomialR1(n-1, k-1);
}
```

E agora? Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 20
binom(30,20)=30045015
real                0m0.002s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./binomialR1 30 20
binom(30,20)=30045015
real                0m0.547s
user                0m0.544s
sys                 0m0.000s
```

E agora? Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 40 30
binom(40,30)=847660528
real                0m0.002s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./binomialR1 40 30
binom(40,30)=847660528
real                0m14.001s
user                0m13.997s
sys                 0m0.000s
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(3,2)
  binomialR1(2,2)
    binomialR1(2,1)
      binomialR1(1,1)
        binomialR1(1,0)
binom(3,2)=3.
```

Resolve subproblemas muitas vezes?

```
binomialR1(5,4)
  binomialR1(4,4)
    binomialR1(4,3)
      binomialR1(3,3)
        binomialR1(3,2)
          binomialR1(2,2)
            binomialR1(2,1)
              binomialR1(1,1)
                binomialR1(1,0)
binom(5,4)=5.
```

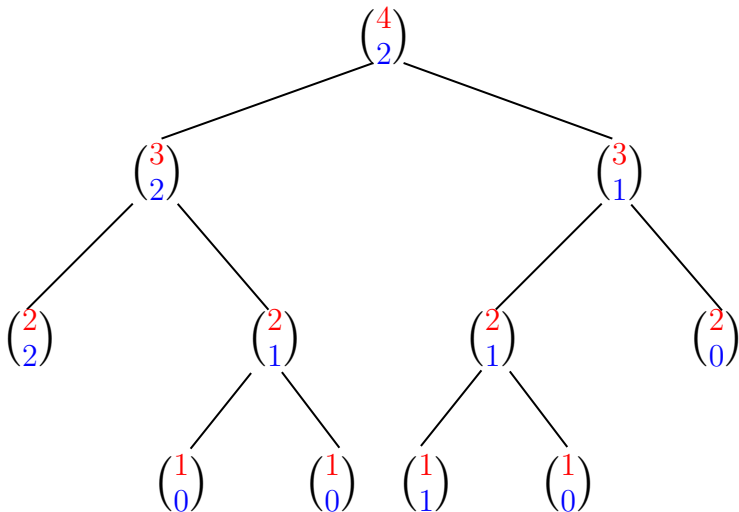
Resolve subproblemas muitas vezes?

binomialR1(6,4)	binomialR1(2,1)
binomialR1(5,4)	binomialR1(1,1)
binomialR1(4,4)	binomialR1(1,0)
binomialR1(4,3)	binomialR1(4,2)
binomialR1(3,3)	binomialR1(3,2)
binomialR1(3,2)	binomialR1(2,2)
binomialR1(2,2)	binomialR1(2,1)
binomialR1(2,1)	binomialR1(1,1)
binomialR1(1,1)	binomialR1(1,0)
binomialR1(1,0)	binomialR1(3,1)
binomialR1(5,3)	binomialR1(2,1)
binomialR1(4,3)	binomialR1(1,1)
binomialR1(3,3)	binomialR1(1,0)
binomialR1(3,2)	binomialR1(2,0)
binomialR1(2,2)	binom(6,4)=15.

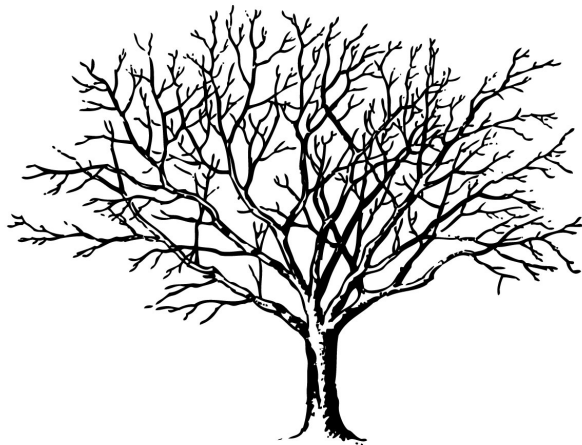
Sim!

Árvore da recursão

`binomialR1` resolve subproblemas muitas vezes.



Árvore



Fonte: <http://tfhoa.com/treework>

Desempenho de binomialR1

Quantas chamadas recursivas faz a função binomialR1?

É o dobro do número de adições.

Vamos calcular o número de adições feitas pela chamada binomialR1(n, k).

Seja $T(n, k)$ o número de adições feitas pela chamada binomialR1(n, k).

Número de adições

```
long
binomialR1(int n, int k)
{
1  if (n < k) return 0;
2  if (n == k || k == 0) return 1;
3  return binomialR1(n-1, k)
4         + binomialR1(n-1, k-1);
}
```

Número de adições

linha	número de adições
1	= 0
2	= 0
3	= $T(n-1, k)$
4	= $T(n-1, k-1) + 1$

$$T(n, k) = T(n-1, k) + T(n-1, k-1) + 1$$

Relação de recorrência!

Relação de recorrência

$$T(n, k) = \begin{cases} 0, & n < k, \\ 0, & n = k \text{ ou } k = 0, \\ T(n-1, k) + T(n-1, k-1) + 1, & n, k > 0. \end{cases}$$

Quanto vale $T(n, k)$?

Número $T(n, k)$ de adições

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
3	0	2	2	0	0	0	0	0	0	...	
4	0	3	5	3	0	0	0	0	0	...	
5	0	4	9	9	4	0	0	0	0	...	
6	0	5	14	19	14	5	0	0	0	...	
7	0	6	20	34	34	20	6	0	0	...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$\cdot \cdot \cdot$	
n											

Binomial

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n											

Número de adições

O número $T(n, k)$ de adições feitas pela chamada `binomialR1(n, k)` é

$$\binom{n}{k} - 1.$$

O **consumo de tempo** da função é proporcional ao número de iterações e portanto é “*proporcional*” a $\binom{n}{k}$.

Quando o valor de k é aproximadamente $n/2$

$$\binom{n}{k} \geq 2^{\frac{n}{2}}$$

e o consumo de tempo é dito “*exponencial*”.

Conclusões

Devemos **evitar** resolver o **mesmo subproblema** várias vezes.

O número de chamadas recursivas feitas por `binomialR1(n,k)` é

$$2 \times \binom{n}{k} - 2.$$

Binomial mais eficiente ainda ...

Supondo $n \geq k \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \times \frac{n}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \times \frac{n}{k} \\ &= \binom{n-1}{k-1} \times \frac{n}{k}.\end{aligned}$$

Binomial mais eficiente ainda ...

Logo, supondo $n \geq k \geq 1$, podemos escrever

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} n, & \text{quando } k = 1, \\ \binom{n-1}{k-1} \times \frac{n}{k}, & \text{quando } k > 1. \end{cases}$$

```
long
binomialR2(int n, int k)
{
1  if (k == 1) return n;
2  return binomialR2(n-1, k-1) * n / k;
}
```

A função `binomialR2` faz *recursão de cauda* (*Tail recursion*).

binomialR2(20,10)

binomialR2(20,10)

binomialR2(19,9)

binomialR2(18,8)

binomialR2(17,7)

binomialR2(16,6)

binomialR2(15,5)

binomialR2(14,4)

binomialR2(13,3)

binomialR2(12,2)

binomialR2(11,1)

binom(20,10)=184756.

E agora, qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 2  
binom(30,2)=435  
real          0m0.002s  
user          0m0.000s  
sys           0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./binomialR2 30 2  
binom(30,2)=435  
real          0m0.002s  
user          0m0.000s  
sys           0m0.000s
```

E agora, qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./binomialI 30 20
binom(30,20)=30045015
real                0m0.002s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./binomialR2 30 20
binom(30,20)=30045015
real                0m0.002s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

Conclusão

O número de chamadas recursivas feitas por `binomialR2(n,k)` é $k - 1$.

Apêndice: Números de Fibonacci



Fonte: <http://www.geek.com/geek-cetera/>

PF 2.3 S 5.2

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Algoritmo recursivo para F_n :

```
long fibonacciR(int n)
{
    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return 1;
    return fibonacciR(n-1) +
           fibonacciR(n-2);
}
```

fibonacciR(4)

```
fibonacciR(4)
  fibonacciR(3)
    fibonacciR(2)
      fibonacciR(1)
        fibonacciR(0)
      fibonacciR(1)
    fibonacciR(2)
      fibonacciR(1)
        fibonacciR(0)
  fibonacci(4) = 3.
```

Fibonacci iterativo

```
long fibonacciI(int n) {  
    long anterior = 0, atual = 1, proximo;  
    int i;  
    if (n == 0) return 0;  
    if (n == 1) return 1;  
    for (i = 1; i < n; i++)  
        {  
            proximo = atual + anterior;  
            anterior = atual;  
            atual = proximo;  
        }  
    return atual;  
}
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./fibonacciI 10
fibonacci(10)=55
real                0m0.003s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./fibonacciR 10
fibonacci(10)=55
real                0m0.003s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./fibonacciI 20
fibonacci(20) = 6765
real                0m0.003s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./fibonacciR 20
fibonacci(20) = 6765
real                0m0.003s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./fibonacciI 30
fibonacci(30) = 832040
real                0m0.003s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./fibonacciR 30
fibonacci(30) = 832040
real                0m0.049s
user                0m0.044s
sys                 0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./fibonacciI 40
fibonacci(40) = 102334155
real                0m0.003s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./fibonacciR 40
fibonacci(40) = 102334155
real                0m4.761s
user                0m4.756s
sys                 0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt> time ./fibonacciI 45
fibonacci(45) = 1134903170
real                0m0.003s
user                0m0.000s
sys                 0m0.000s
```

```
meu_prompt> time ./fibonacciR 45
fibonacci(45) = 1134903170
real                0m52.809s
user                0m52.727s
sys                 0m0.000s
```

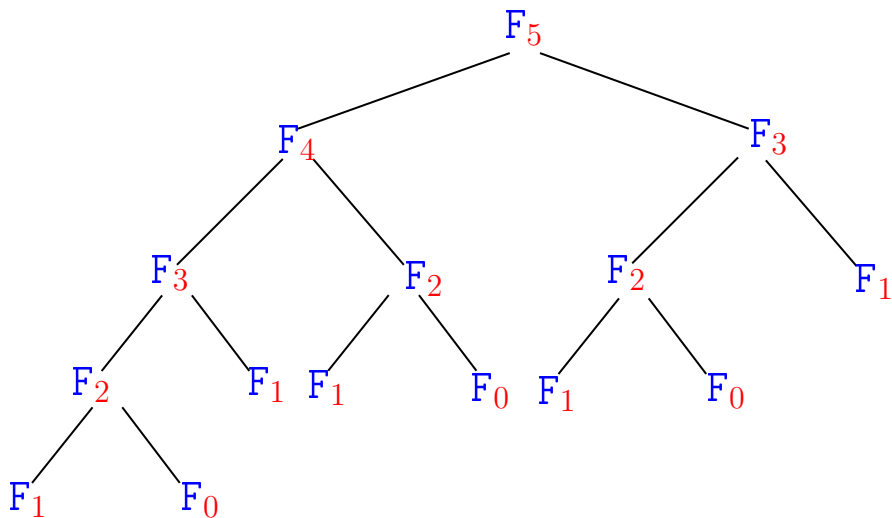

fibonacciR(5)

fibonacciR resolve subproblemas muitas vezes.

fibonacciR(5)	fibonacciR(1)
fibonacciR(4)	fibonacciR(0)
fibonacciR(3)	fibonacciR(3)
fibonacciR(2)	fibonacciR(2)
fibonacciR(1)	fibonacciR(1)
fibonacciR(0)	fibonacciR(0)
fibonacciR(1)	fibonacciR(1)
fibonacciR(2)	fibonacci(5) = 5.

Árvore da recursão

`fibonacciR` resolve subproblemas muitas vezes.



Consumo de tempo

$T(n)$:= número de somas feitas por `fibonacciR(n)`

```
long fibonacciR(int n)
{
1     if (n == 0) return 0;
2     if (n == 1) return 1;
3     return fibonacciR(n-1) +
4         fibonacciR(n-2);
}
```

Consumo de tempo

linha	número de somas
-------	-----------------

$$1 = 0$$

$$2 = 0$$

$$3 = T(n - 1)$$

$$4 = T(n - 2) + 1$$

$$T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + 1$$

Recorrência

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \dots$$

Uma estimativa para $T(n)$?

Recorrência

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \dots$$

Uma estimativa para $T(n)$?

Solução: $T(n) > (3/2)^n$ para $n \geq 6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_n	0	0	1	2	4	7	12	20	33	54
$(3/2)^n$	1	1.5	2.25	3.38	5.06	7.59	11.39	17.09	25.63	38.44

Recorrência

Prova: $T(6) = 12 > 11.40 > (3/2)^6$ e

$T(7) = 20 > 18 > (3/2)^7$.

Se $n \geq 8$, então

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + 1 \\&\stackrel{hi}{>} (3/2)^{n-1} + (3/2)^{n-2} + 1 \\&= (3/2 + 1)(3/2)^{n-2} + 1 \\&> (5/2)(3/2)^{n-2} \\&> (9/4)(3/2)^{n-2} \\&= (3/2)^2(3/2)^{n-2} \\&= (3/2)^n.\end{aligned}$$

Logo, $T(n) \geq (3/2)^n$.

Consumo de tempo é **exponencial**.

Conclusão

O consumo de tempo é da função `fibonacciI(n)` é proporcional a **n**.

O consumo de tempo da função `fibonacciR` é **exponencial**.

Exercícios

Prove que

$$T(n) = \frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} - 1 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

onde

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803 \quad \text{e} \quad \hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,61803.$$

Prove que $1 + \phi = \phi^2$.

Prove que $1 + \hat{\phi} = \hat{\phi}^2$.