

AULA 22

Intercalação

PF 9

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/mrgsrt.html>

Intercalação

Problema: Dados $v[p..q-1]$ e $v[q..r-1]$ crescentes, rearranjar $v[p..r-1]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

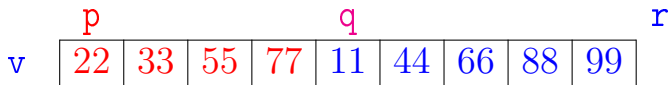
Entra:

	p			q					r
v	22	33	55	77	11	44	66	88	99

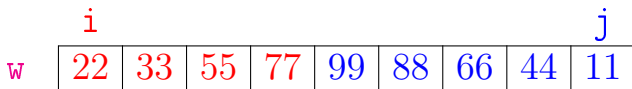
Sai:

	p			q					r
v	11	22	33	44	55	66	77	88	99

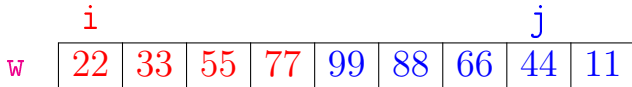
Intercalação



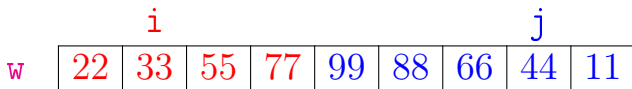
Intercalação



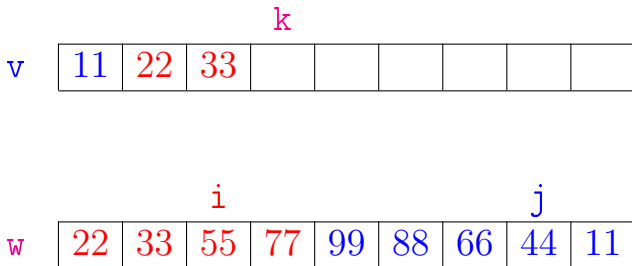
Intercalação



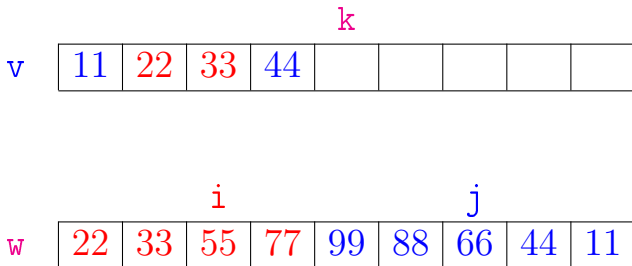
Intercalação



Intercalação



Intercalação



Intercalação

v

11	22	33	44	55				
----	----	----	----	----	--	--	--	--

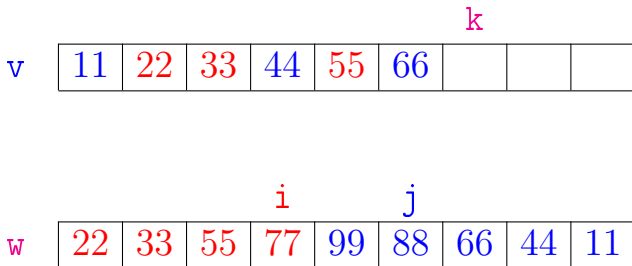
k

w

22	33	55	77	99	88	66	44	11
----	----	----	----	----	----	----	----	----

i j

Intercalação



Intercalação

v

11	22	33	44	55	66	77		
----	----	----	----	----	----	----	--	--

k

w

22	33	55	77	99	88	66	44	11
----	----	----	----	----	----	----	----	----

i j

Intercalação

v

11	22	33	44	55	66	77	88	
----	----	----	----	----	----	----	----	--

k

w

22	33	55	77	99	88	66	44	11
----	----	----	----	----	----	----	----	----

ij

Intercalação

v

11	22	33	44	55	66	77	88	99
----	----	----	----	----	----	----	----	----

k

w

22	33	55	77	99	88	66	44	11
----	----	----	----	----	----	----	----	----

j i

Intercalação

```
void intercala(int p,int q,int r,int v[]){
    int i, j, k, *w;
    w = mallocSafe((r-p)*sizeof(int));
1   for (i = 0, k = p; k < q; i++, k++)
2       w[i] = v[k];
3   for (j = r-p-1; k < r; j--, k++)
4       w[j] = v[k];
5   i = 0; j = r-p-1;
6   for (k = p; k < r; k++)
7       if (w[i] <= w[j])
8           v[k] = w[i++];
9       else v[k] = w[j--];
    free (w);
}
```

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha	execuções da linha
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?
6	?
7-9	?
total	?

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome

1 unidade de tempo o consumo total é ($n := r - p$):

linha	execuções da linha
1	$= q - p = n - r + q$
2	$= q - p - 1 = n - r + q - 1$
3	$= r - q = n - q + p$
4	$= r - q - 1 = n - q + p - 1$
5	$= 1$
6	$= r - p + 1 = n + 1$
7-9	$= 2(r - p) = 2n$
total	$= 7n - 2(r - p) = 5n$

Conclusão

A função `intercala` consome $5n$ unidades de tempo.

O algoritmo `intercala` consome $O(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo `intercala` consome tempo $O(n)$.

Ordenação: algoritmo Mergesort

PF 9

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/mrgsrt.html>

Ordenação

$v[0 \dots n-1]$ é **crecente** se $v[0] \leq \dots \leq v[n-1]$.

Problema: Rearranjar um vetor $v[0 \dots n-1]$ de modo que ele fique **crecente**.

Entra:

0										$n-1$
33	55	33	44	33	22	11	99	22	55	77

Sai:

0										$n-1$
11	22	22	33	33	33	44	55	55	77	99

Função mergeSort

Rearranja $v[p..r-1]$ em ordem crescente.

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1  if (p < r-1) {  
2      int q = (p + r)/2;  
3      mergeSort(p, q, v);  
4      mergeSort(q, r, v);  
5      intercala(p, q, r, v);  
    }  
}
```

	p			q				r	
v	55	33	66	44	99	11	77	22	88

função mergeSort

Rearranja $v[p..r-1]$ em ordem crescente.

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1   if (p < r-1) {  
2       int q = (p + r)/2;  
3       mergeSort(p, q, v);  
-----  
4       mergeSort(q, r, v);  
5       intercala(p, q, r, v);  
    }  
}
```

	p			q					r
v	33	44	55	66	99	11	77	22	88

função mergeSort

Rearranja $v[p..r-1]$ em ordem crescente.

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1   if (p < r-1) {  
2       int q = (p + r)/2;  
3       mergeSort(p, q, v);  
4       mergeSort(q, r, v);  
5       intercala(p, q, r, v);  
   }  
}
```

	p			q					r
v	33	44	55	66	11	22	77	88	99

função mergeSort

Rearranja $v[p..r-1]$ em ordem crescente.

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1  if (p < r-1) {  
2      int q = (p + r)/2;  
3      mergeSort(p, q, v);  
4      mergeSort(q, r, v);  
5      intercala(p, q, r, v);  
    }  
}
```

	p				q				r
v	11	22	33	44	55	66	77	88	99

função mergeSort

Rearranja $v[p..r-1]$ em ordem crescente.

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1   if (p < r-1) {  
2       int q = (p + r)/2;  
3       mergeSort(p, q, v);  
4       mergeSort(q, r, v);  
5       intercala(p, q, r, v);  
   }  
}
```

	p				q				r
v	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Mergesort

	p			q				r	
v	55	33	66	44	99	11	77	22	88

Mergesort

v

	p			q				r
55	33	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r			
55	33	66	44					

Mergesort

v

	p			q				r
55	33	66	44	99	11	77	22	88

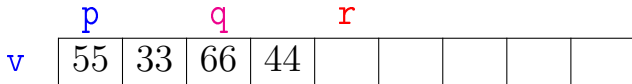
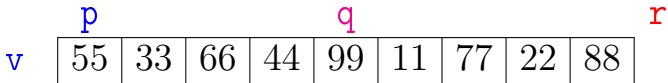
v

	p		q		r			
55	33	66	44					

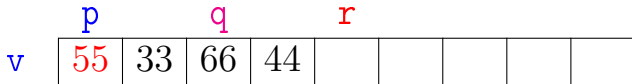
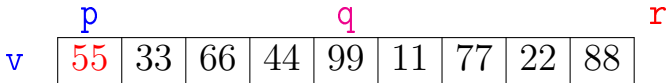
v

	p	q	r					
55	33							

Mergesort



Mergesort



Mergesort

v

	p			q				r
55	33	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r			
55	33	66	44					

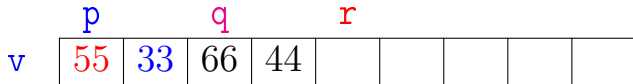
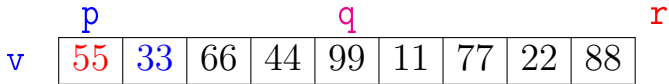
v

	p	q	r					
55	33							

v

	p	r						
55	33							

Mergesort



Mergesort

v

	p				q				r
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	66	44					

v

	p	q	r						
	33	55							

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	66	44					

v

		p		r					
		66	44						

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	66	44					

v

		p		r					
		66	44						

v

		p		r					
		66							

Mergesort

v

	p			q				r
33	55	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r			
33	55	66	44					

v

		p		r				
		66	44					

v

		p		r				
		66						

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	66	44					

v

		p		r					
		66	44						

v

			p	r					
			44						

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	66	44					

v

			p		r				
			66	44					

v

			p		r				
			44						

Mergesort

v

	p			q					r
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	66	44					

v

		p		r					
		66	44						

Mergesort

v

	p			q					r
	33	55	44	66	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	44	66					

v

			p		r				
			44	66					

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	55	44	66	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	55	44	66					

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

v

	p		q		r				
	33	44	55	66					

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	99	11	77	22	88

v

				p		q		r
				99	11	77	22	88

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	99	11	77	22	88

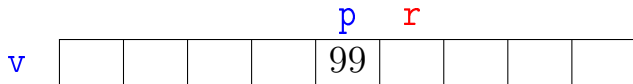
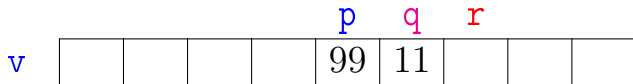
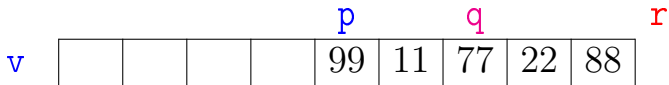
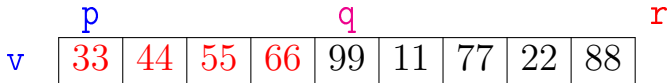
v

				p		q		r
				99	11	77	22	88

v

				p	q	r		
				99	11			

Mergesort



Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	99	11	77	22	88

v

				p		q		r
				99	11	77	22	88

v

				p	q	r		
				99	11			

v

				p	r			
				99				

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	99	11	77	22	88

v

				p		q		r
				99	11	77	22	88

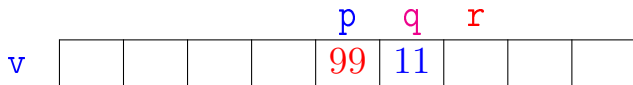
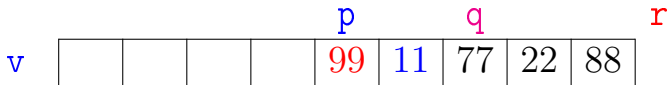
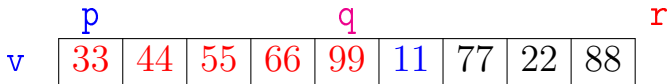
v

				p	q	r		
				99	11			

v

					p	r		
					11			

Mergesort



Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	99	11	77	22	88

v

				p		q		r
				99	11	77	22	88

v

				p	q	r		
				99	11			

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	11	99	77	22	88

v

				p		q		r
				11	99	77	22	88

v

				p	q	r		
				11	99			

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	11	99	77	22	88

v

				p		q		r
				11	99	77	22	88

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	44	55	66	11	99	77	22	88

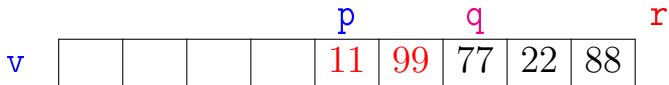
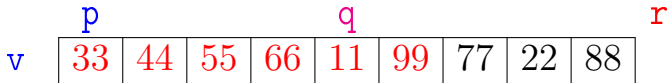
v

				p		q		r
				11	99	77	22	88

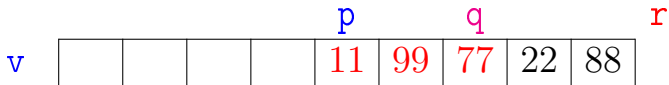
v

						p	q	r
						77	22	88

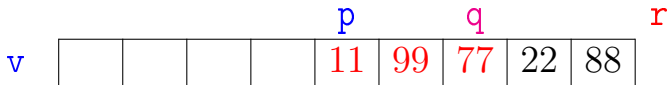
Mergesort



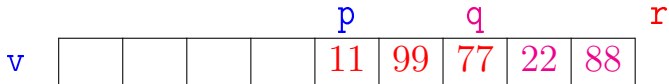
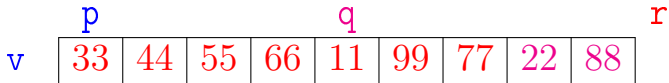
Mergesort



Mergesort



Mergesort



Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	11	99	77	22	88

v

				p		q		r
				11	99	77	22	88

v

						p	q	r
						77	22	88

v

							p	q	r
							22	88	

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	44	55	66	11	99	77	22	88

v

				p		q		r
				11	99	77	22	88

v

						p	q	r
						77	22	88

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	11	99	22	77	88

v

				p		q		r
				11	99	22	77	88

v

						p	q	r
						22	77	88

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	11	99	22	77	88

v

				p		q		r
				11	99	22	77	88

Mergesort

v

	p			q				r
33	44	55	66	11	22	77	88	99

v

				p		q		r
				11	22	77	88	99

Mergesort

v

	p			q				r	
	33	44	55	66	11	22	77	88	99

Mergesort



Mergesort

v

	p			q				r	
	11	22	33	44	55	66	77	88	99

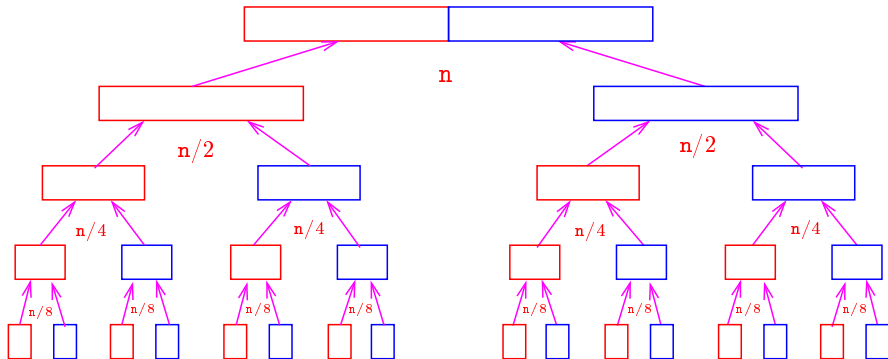
Correção

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1   if (p < r-1) {  
2       int q = (p + r)/2;  
3       mergeSort(p, q, v);  
4       mergeSort(q, r, v);  
5       intercala(p, q, r, v);  
    }  
}
```

A função está **correta**?

A **correção** da função, que se apóia na correção do **intercala**, pode ser demonstrada por indução em $n := r - p$.

Consumo de tempo: versão MAC0122



Consumo de tempo: versão MAC0122

O consumo de tempo em cada nível da recursão é proporcional a n .

Há cerca de $\lg n$ níveis de recursão.

nível	consumo de tempo (proporcional a)
1	$\approx n$
2	$\approx n/2 + n/2$
3	$\approx n/4 + n/4 + n/4 + n/4 + n/4$
...	...
$\lg n$	$\approx 1 + 1 + 1 + 1 \cdots + 1 + 1 + 1 + 1$
Total	$\approx n \lg n = O(n \lg n)$

Consumo de tempo: versão MAC0338

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1   if (p < r-1) {  
2       int q = (p + r)/2;  
3       mergeSort(p, q, v);  
4       mergeSort(q, r, v);  
5       intercala(p, q, r, v);  
    }  
}
```

Consumo de tempo?

$T(n)$:= consumo de tempo quando $n = r - p$

Consumo de tempo: versão MAC0338

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1   if (p < r-1) {  
2       int q = (p + r)/2;  
3       mergeSort(p, q, v);  
4       mergeSort(q, r, v);  
5       intercala(p, q, r, v);  
    }  
}
```

linha	consumo na linha (proporcional a)
-------	-----------------------------------

1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

$T(n) = ?$

Consumo de tempo: versão MAC0338

```
void mergeSort (int p, int r, int v[]) {  
1   if (p < r-1) {  
2       int q = (p + r)/2;  
3       mergeSort(p, q, v);  
4       mergeSort(q, r, v);  
5       intercala(p, q, r, v);  
    }  
}
```

linha consumo na linha (proporcional a)

1	= 1
2	= 1
3	= $T(\lfloor n/2 \rfloor)$
4	= $T(\lceil n/2 \rceil)$
5	= n

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n + 2$$

Consumo de tempo: versão MAC0338

$T(n)$:= consumo de tempo quando $n = r - p$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Solução: $T(n)$ é $O(n \log n)$.

Demonstração: ...

Em MAC0338 vocês verão como estimar “a ordem” de recorrências.

Conclusão

O consumo de tempo da função `mergeSort` é proporcional a $n \lg n$.

O consumo de tempo da função `mergeSort` é $O(n \lg n)$.

Divisão e conquista

Algoritmos por **divisão-e-conquista** têm três passos em cada nível da recursão:

Dividir: o problema é dividido em subproblemas de tamanho menor;

Conquistar: os subproblemas são resolvidos **recursivamente** e subproblemas “pequenos” são resolvidos diretamente;

Combinar: as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução do problema original.

Exemplo: ordenação por intercalação (**mergeSort**).

mergeSort: versão iterativa

```
void mergeSort (int n, int v[]){
    int p, r;
    int b = 1;
    while (b < n) {
        p = 0;
        while (p + b < n) {
            r = p + 2*b;
            if (r > n) r = n;
            intercala(p, p+b, r, v);
            p = p + 2*b;
        }
        b = 2*b;
    }
}
```