AULA 19

Problema das n rainhas

PF 12
http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/enum.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle

Problema das n rainhas

Problema: Dado n determinar todas as maneiras de dispormos n rainhas em um tabuleiro "de xadrez" de dimensão $n \times n$ de maneira que duas a duas elas não se atacam.

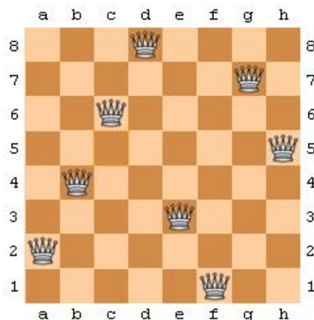


Imagem: http://software.intel.com/en-us/articles/multicore-enabling-the-n-queens-problem-using-cilk/

Soluções

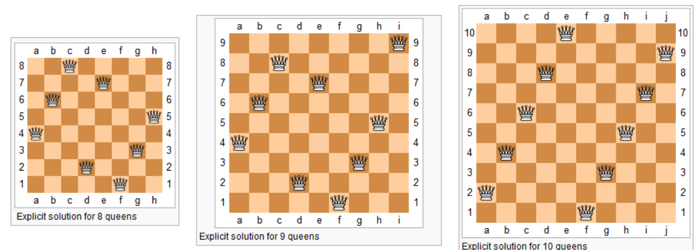


Imagem: http://www.levelxgames.com/2012/05/n-queens/

Problema das 8 rainhas

Existem $\binom{64}{8}$ maneiras diferentes de dispormos 8 peças em um tabuleiro de dimensão 8×8

$$\binom{64}{8} \approx 44 \text{ bilhões}$$

Suponha que conseguimos verificar se uma configuração é válida em 10^{-3} segundos.
Para verificarmos todas as 44 bilhões seria

$$44000000 \text{ seg} \approx 733333 \text{ min} \approx 12222 \text{ horas} \approx 509 \text{ dias.}$$

Problema das 8 rainhas

Como cada linha pode conter apenas uma rainha, podemos supor que a rainha i será colocada na coluna s[i] da linha i.

Portanto as possíveis soluções para o problema são todas as sequências

$$s[1], s[2], \ldots, s[8]$$

sobre $1, 2, \ldots, 8$

Existem $8^8 = 16777216$ possibilidades. Para verificá-las gastaríamos

$$16777{,}216 \text{ seg} \approx 280 \text{ min} \approx 4{,}6 \text{ horas}$$

Problema das 8 rainhas

Existem outras restrições:

(i) para cada i, j, $k \neq j$, $s[k] \neq s[j]$ (=duas rainhas não ocupam a mesma coluna); e

(ii) duas rainhas não podem ocupar uma mesma diagonal.

Existem $8! = 40320$ configurações que satisfazem (i).

Essa configurações podem ser verificadas em

$$\approx 40 \text{ seg.}$$

Função nRainhas

A função nRainhas a seguir imprime todas as configurações de n rainhas em uma tabuleiro $n \times n$ que duas a duas ela não se atacam.

A mantém no início da cada iteração a seguinte relação invariante

(i0) $s[1 \mathinner{..} i-2]$ é uma solução parcial do problema

Cada iteração procura estender essa solução colocando uma rainha na linha i

Função nRainhas

A função utiliza as funções auxiliares

```
/* Imprime o tabuleiro com as rainhas em s[1..i] */
void
mostreTabuleiro(int n, int i, int *s);

/* Supondo que s[1..i-1] e' solucao parcial,
 * verifica se s[1..i] e' solucao parcial
 */
int solucaoParcial(int i, int *s);
```

Função nRainhas

```
void nRainhas (int n) {
  int testouTudo = FALSE;
  int i; /* linha atual */
  int j; /* coluna candidata */
  int nJogadas = 0; /* num.  da jogada */
  int nSolucoes = 0; /* num.  de sol.  */
  int*s = mallocSafe((n+1)*sizeof(int));
  /* s[i] = coluna em que esta a rainha i
   * da linha i, para i= 1,...,n.
   * Posicao s[0] nao sera usada.
   */
```

Função nRainhas

```
/* linha inicial e coluna inicial */
i = j = 1;
/* Encontra todas as solucoes.  */
while (testouTudo == FALSE) {
  /* s[1..i-2] e' solucao parcial */
  /* (i,j) e' onde pretendemos colocar
      uma rainha */

  /* CASO 1:  nLin == 0 */
  if (i == 0) {
      testouTudo = TRUE;
  }
```

Função nRainhas

```
  /* CASO 2:  j == n+1 OU
      s[1..i-1]) nao e' solucao parcial */
  else if (j == n+1 ||
          solucaoParcial(i-1,s)==FALSE){
      /* BACKTRACKING */
      /* voltamos para a linha anterior e
      * tentamos a proxima coluna
      */
      j = s[--i]+1; /* stackPop() */
  }
```

Função nRainhas

```
/* Caso 3:  i == n+1 */
else if (i == n+1) {
    /* uma solucao foi encontrada */
    nSolucoes++;
    mostreTabuleiro(n,i-1,s);
    /* retira do tabuleiro a ultima
    * rainha colocada e volta
    */
    j = s[--i]+1; /* stackPop() */
}
```

Função nRainhas

```
/* CASO 4:  j <= n &&
        s[1..i-1] e solucao parcial */
else {
    /* AVANCA */
    s[i++] = j; /* stackPush() */
    j = 1;
    nJogadas++;
  }
}
```

Função nRainhas

```
printf(stdout,"\n no.  jogadas = %d"
    "\n no.  solucoes = %d.\n\n",
    nJogadas, nSolucoes);
free(s);
}
```

Rainhas em uma mesma diagonal

Se duas rainhas estão nas posições (i, j) e (p, q) então elas estão em uma mesma diagonal se

$$i + j == p + q \text{ ou } i - j == p - q\ .$$

Isto implica que duas rainhas estão em uma mesma diagonal se e somente se

$$i - p == q - j \text{ ou } i - p == j - q\ .$$

ou seja

$$|i - p| == |q - j|.$$

solucaoParcial

A função solucaoParcial recebe um vetor $s[1..i]$ e supondo que $s[1..i\text{-}1]$ é uma solução parcial decide se $s[1..i]$ é uma solução parcial.

Para isto a função apenas verifica se a rainha colocada na posição $(i, s[i])$ está sendo ataca por alguma das rainhas colocadas nas posições

$$(1, s[1]), (2, s[2]), \ldots, (i{-}1, s[i{-}1])\ .$$

solucaoParcial

```
int solucaoParcial(int i, int *s){
  int j = s[i];
  int k;
  for (k = 1; k < i; k++){
     int p = k;
     int q = s[k];
     if (q == j
        || p+q == i+j
        || p-q == i-j)
        return FALSE;
  }
  return TRUE;
}
```

Alguns números

nrainhas

n	jogadas	soluções	tempo
4	60	2	0.000s
8	15072	92	0.000s
10	348150	724	0.012s
12	10103868	14200	0.500s
14	377901398	365596	21.349s
15	2532748320	2279184	3m21s
16	?	14772512	18m48s

Backtracking

Backtracking (=tentativa e erro =busca exaustiva) é um método para encontrar uma ou todas as soluções de um problema.

A obtenção de uma solução pode ser vista como uma sequência de passos/decisões.

A cada momento temos uma solução parcial do problema. Assim, estamos em algum ponto de um caminho a procura de uma solução.

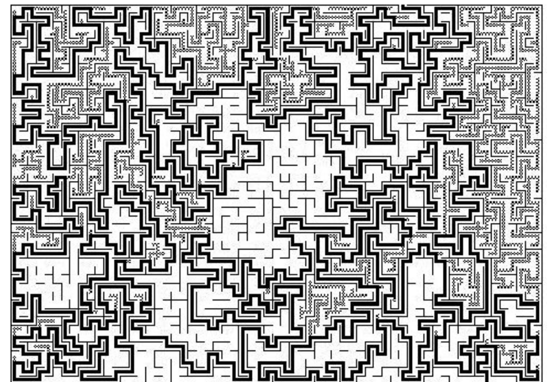
Backtracking

Cada iteração consiste em tentar estender essa solução parcial, ou seja, dar mais um passo que nos aproxime de uma solução.

Se não é possível estender a solução parcial, dar esse passo, **voltamos** no caminho e tomamos outra direção/decisão.

Backtracking

Para descrever *backtracking* frequentemente é usada a metáfora "procura pela saída de um labirinto".



Backtracking

A solução que vimos para o Problema das n rainhas é um exemplo clássico do emprego de *backtracking*.

No início de cada iteração da função nRainhastemos que s[1 . . i-2] é uma solução parcial:

$(1, s[1]), \ldots, (i-2, s[i-2])$ são posições de rainhas que duas a duas elas não se atacam.

Árvore de estados

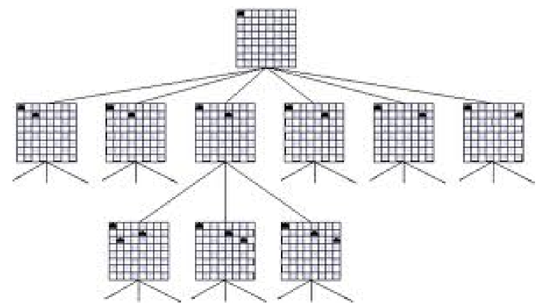


Imagem: http://cs.smith.edu/ thiebaut/transputer/chapter9/chap9-4.html

Árvore de estados

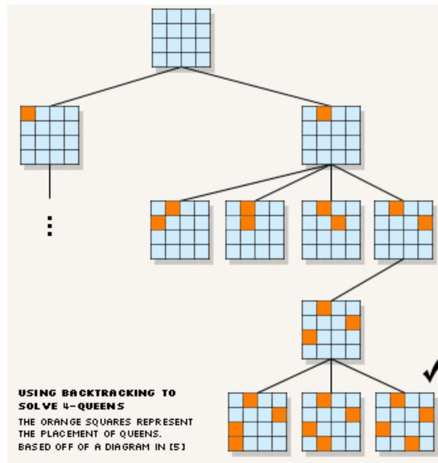


Imagem: http://4c.ucc.ie/web/outreach/tutorial.html