AULA 13

Busca em vetor ordenado

PF 7.1 a 7.8

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/bub

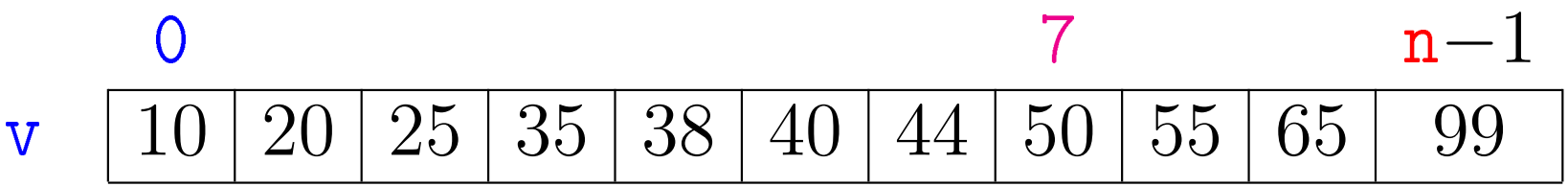
Busca em vetor ordenado

Um vetor $v[0\,..\,n-1]$ é **crescente** se

$$v[0] \le v[1] \le v[2] \cdots \le v[n-1].$$

Problema: Dado um número x e um vetor crescente $v[0\,..\,n-1]$ encontrar um índice m tal que $v[m]==x$.

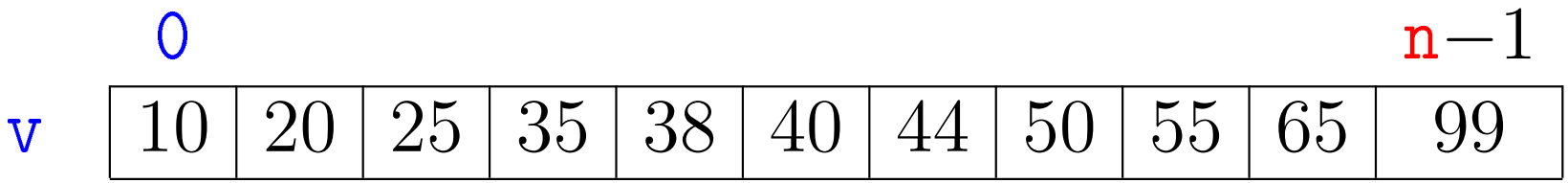
Entra: `x == 50`



Sai: `m == 7`

Busca em vetor ordenado

Entra: `x == 57`



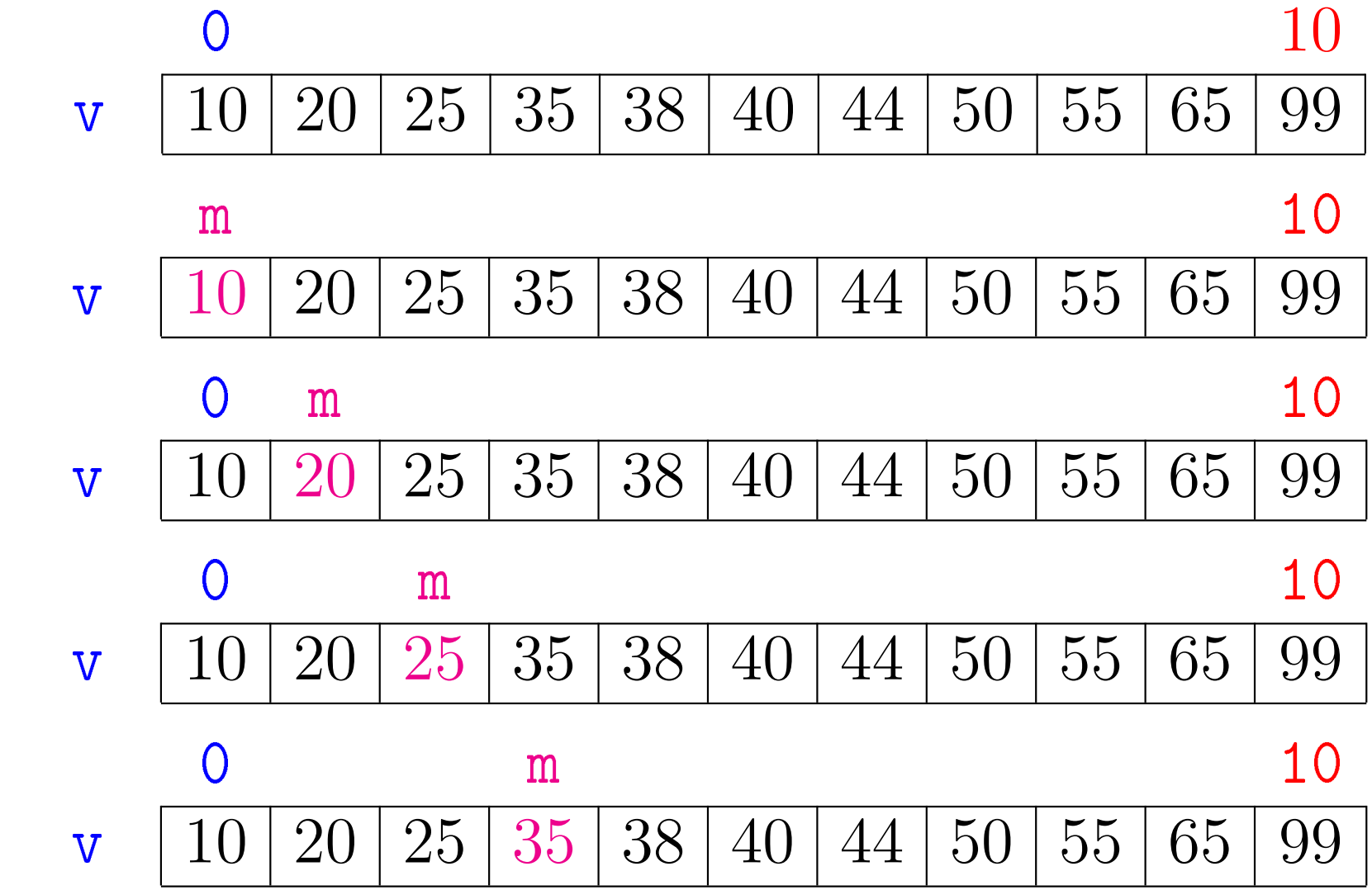
Sai: `m == -1` (`x` não está em `v`)

Busca sequencial

```
int buscaSequencial(int x, int n, int v[])
 {
1   int m = 0;
2   while (/*1*/ m < n && v[m] < x) ++m;
3   if (m < n && v[m] == x)
4       return m;
5   return -1;
 }
```

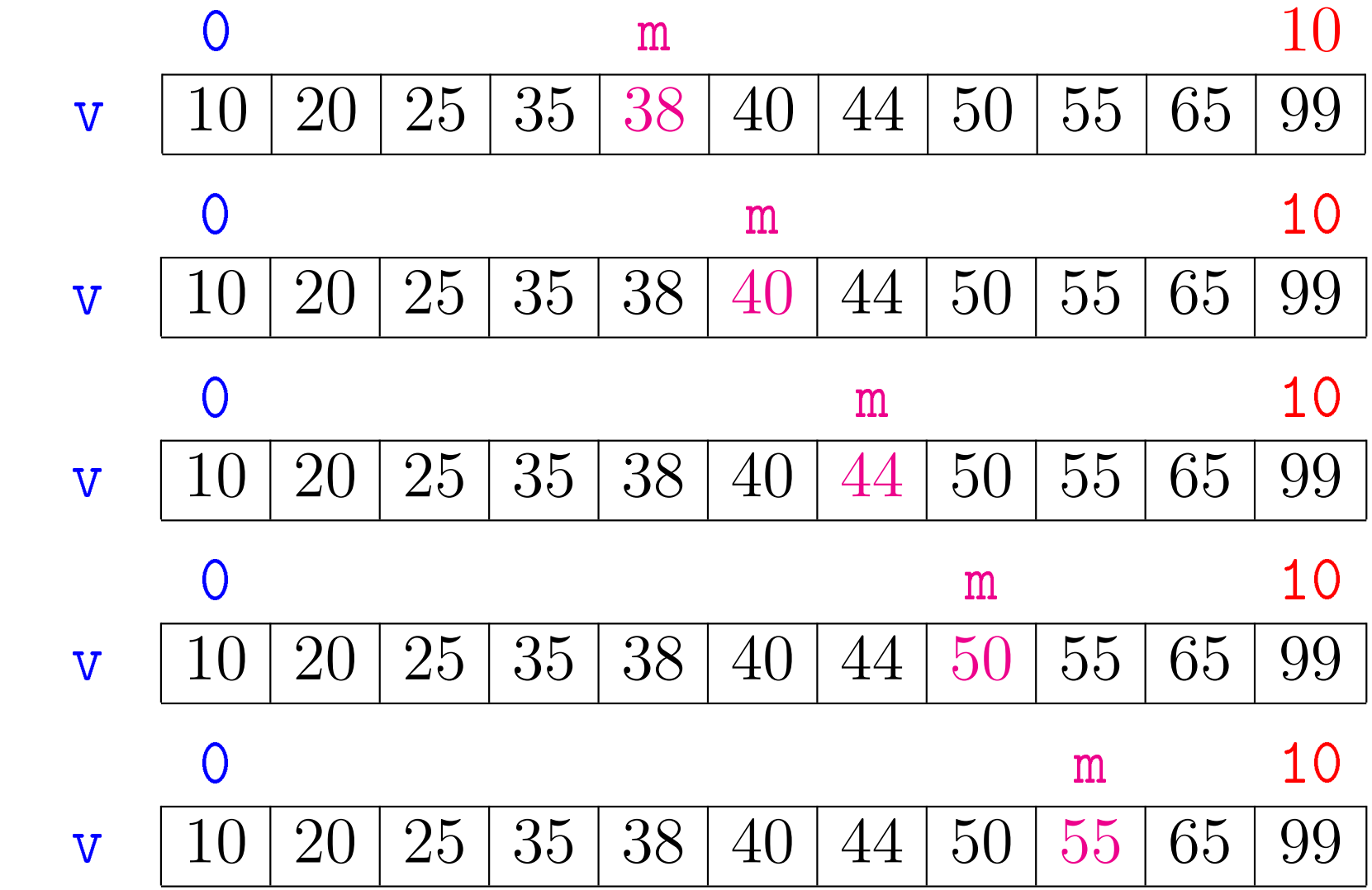
Exemplo

`x == 55`


0
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0 m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0 m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0 m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99

Exemplo

`x == 55`

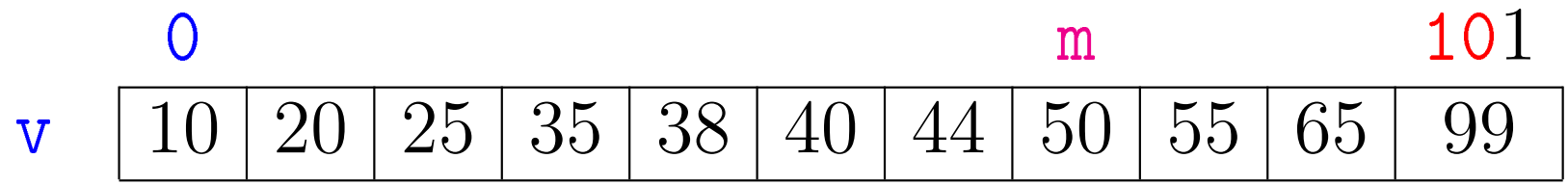

0
m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0
m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0
m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0
m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0
m
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $v[m-1] < x$. ♡

`x == 55`



A relação (i0) vale no começo da primeira iteração se supusermos que $v[-1] = -\infty$.

No início da última iteração $m \geq n$ ou $v[m] \geq x$.

Portanto, se a função devolve -1, então x não está em $v[0\,..\,n-1]$

Consumo de tempo buscaSequencial

Se a execução de cada linha de código consome 1 **unidade** de tempo o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha	
1	$= 1$	$= 1$
2	$\leq n + 1$	$\approx n$
3	$= 1$	$= 1$
4	≤ 1	≤ 1
5	≤ 1	≤ 1
total	$\leq n + 3$	$= O(n)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `buscaSequencial` no pior caso é proporcional a `n`.

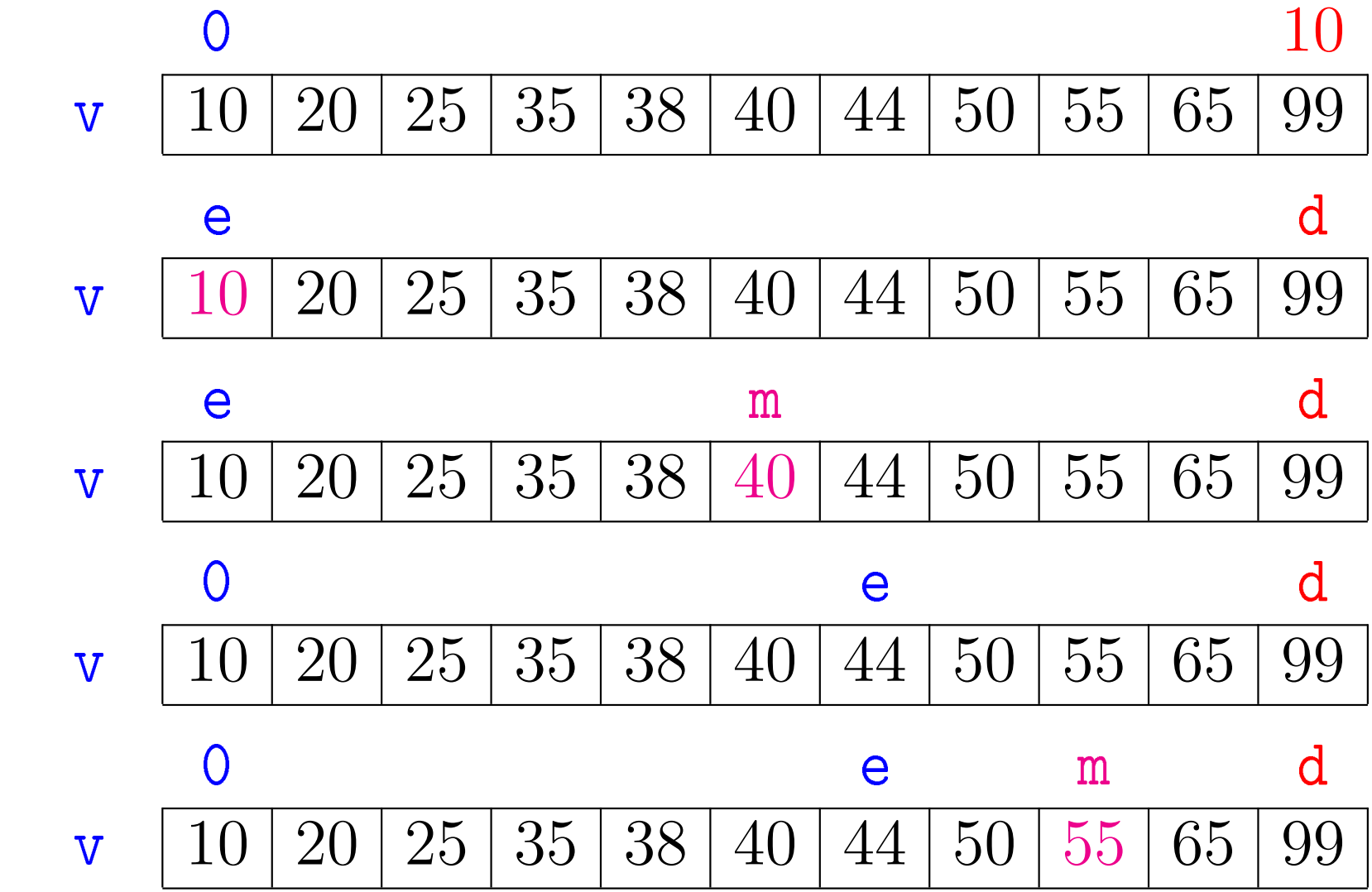
O consumo de tempo do algoritmo `buscaSequencial` é $O(n)$.

Busca binária

```
int buscaBinaria(int x, int n, int v[]) {
    int e, m, d;
1   e = 0; d = n-1;
2   while (/*1*/ e <= d) {
3       m = (e + d)/2;
4       if (v[m] == x) return m;
5       if (v[m] < x) e = m + 1;
6       else d = m - 1;
    }
7   return -1;
 }
```

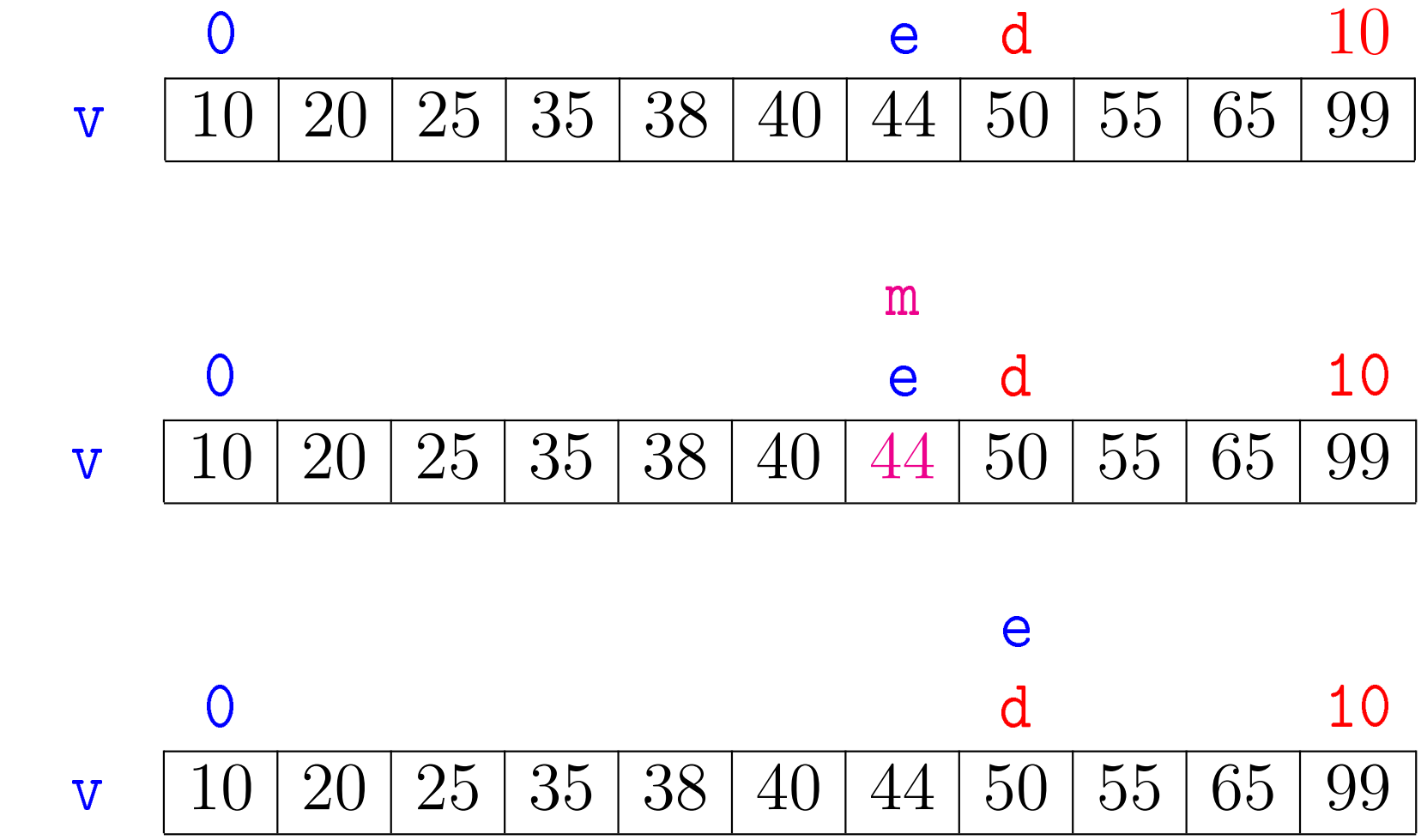
Exemplo

`x == 48`


0
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
e
d
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
e
m
d
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0
e
d
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
0
e
m
d
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99

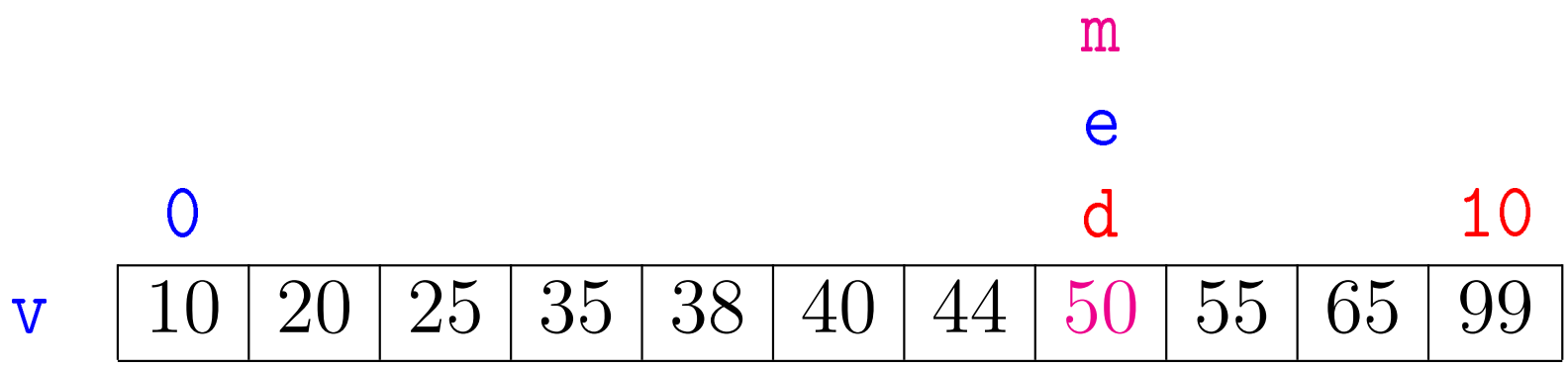
Exemplo

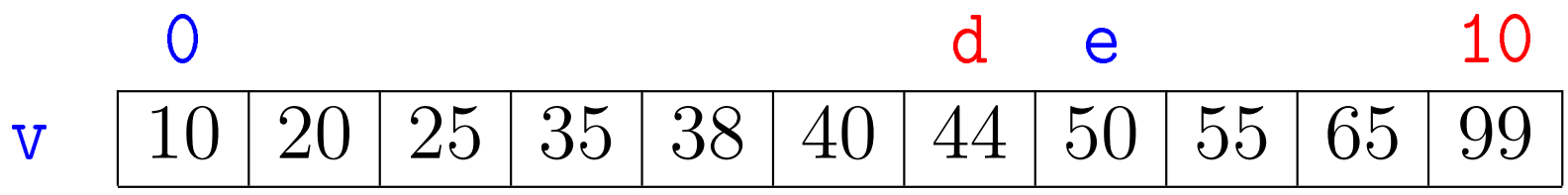
`x == 48`


0
e
d
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
m
0
e
d
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99
e
0
d
10
v
10 20 25 35 38 40 44 50 55 65 99

Exemplo

`x == 48`


m
e
0
d
10
v
10
20
25
35
38
40
44
50
55
65
99

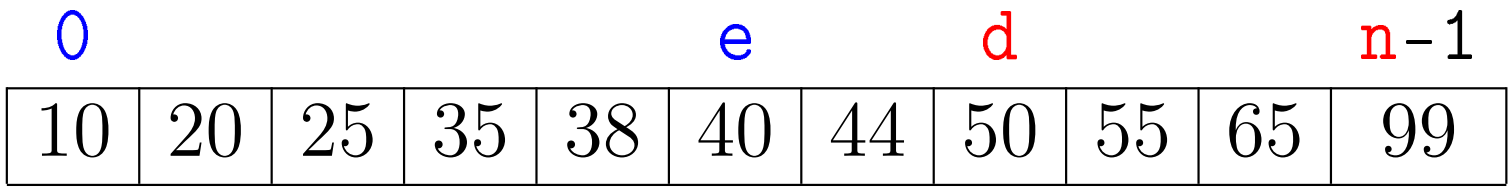

0
d
e
10
v
10
20
25
35
38
40
44
50
55
65
99

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $\texttt{v}[\texttt{e}-1] < \texttt{x} < \texttt{v}[\texttt{d}+1]$. ♡

`x == 48`



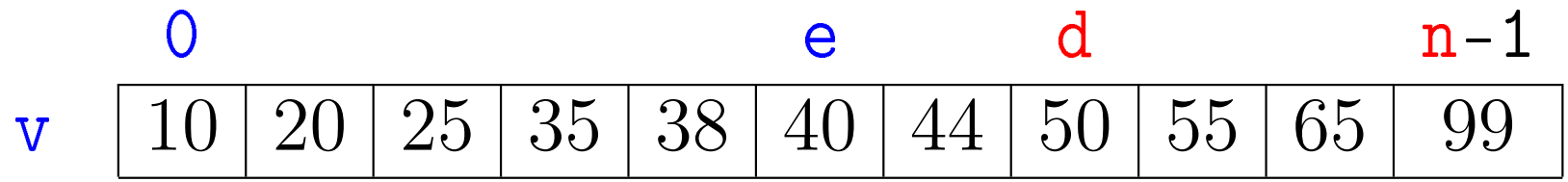
A relação (i0) vale no começo da primeira iteração se supusermos que $\texttt{v}[-1] = -\infty$ e $\texttt{v}[\texttt{n}] = +\infty$.

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em `/*1*/` vale que: $\texttt{v}[\texttt{e}-1] < \texttt{x} < \texttt{v}[\texttt{d}+1]$. ♡

`x == 48`



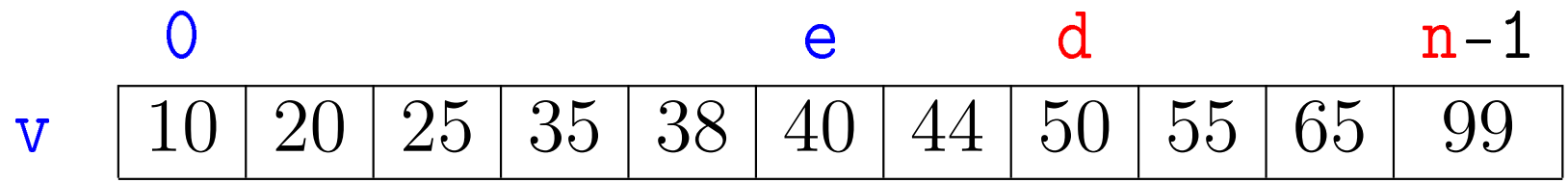
No início da última iteração quando $\texttt{e} > \texttt{d}$ nenhum elemento é "$> \texttt{v}[\texttt{e}-1]$" e "$< \texttt{v}[\texttt{d}+1]$", pois o vetor é crescente (!). Logo, `x` não está em $\texttt{v}[0\,..\,\texttt{n}-1]$ e função devolve `-1`

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $\mathtt{v}[\mathtt{e}-1] < \mathtt{x} < \mathtt{v}[\mathtt{d}+1]$. ♡

x == 48



O valor de $\mathtt{d} - \mathtt{e}$ diminui a cada iteração. Portanto, se a função não encontra m tal que v[m]==x, então a função para quando $\mathtt{d} - \mathtt{e} < 0$.

Consumo de tempo buscaBinaria

O consumo de tempo da função `buscaBinaria` é proporcional ao número `k` de iterações do `while`.

No início da 1a. iteração tem-se que
$\mathtt{d} - \mathtt{e} = \mathtt{n} - 1 \approx \mathtt{n}$.

Sejam

$$(\mathtt{e}_0, \mathtt{d}_0), (\mathtt{e}_1, \mathtt{d}_1), \ldots, (\mathtt{e}_k, \mathtt{d}_k),$$

os valores das variáveis `e` e `d` no início de cada uma das iterações.
Assim, $\mathtt{d}_{k-1} - \mathtt{e}_{k-1} \geq 0$ e $\mathtt{d}_k - \mathtt{e}_k < 0$

Número iterações

Estimaremos o valor de k em função de $d - e$.

Note que $d_{i+1} - e_{i+1} \leq (d_i - e_i)/2$ para $i=1,2,\ldots,k-1$.

Desta forma tem-se que

$$
\begin{array}{lcllcl}
d_0 - e_0 & = & n - 1 & < & n & \\
d_1 - e_1 & \leq & (d_0 - e_0)/2 & < & n/2 & \\
d_2 - e_2 & \leq & (d_1 - e_1)/2 & < & (n/2)/2 & = n/2^2 \\
d_3 - e_3 & \leq & (d_2 - e_2)/2 & < & (n/2^2)/2 & = n/2^3 \\
d_4 - e_4 & \leq & (d_3 - e_3)/2 & < & (n/2^3)/2 & = n/2^4 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Número iterações

Percebe-se que depois de cada iteração o valor de $\mathtt{d} - \mathtt{e}$ é reduzido pela metade.
Seja $\mathtt{t}$ o número inteiro tal que

$$2^{\mathtt{t}} \leq \mathtt{n} < 2^{\mathtt{t}+1}$$

Da primeira desigualdade temos que

$$\mathtt{t} \leq \lg \mathtt{n},$$

onde $\lg \mathtt{n}$ denota o logaritmo de $\mathtt{n}$ na base 2.

Número iterações

Da desigualde estrita, concluímos que

$$0 \leq (d_{k-1} - e_{k-1})/2^{k-1} < n/2^{k-1} < \underline{2^{t+1}}/2^{k-1}.$$

Assim, em particular temos que

$$1 \leq 2^{t+1}/2^{k-1}$$

ou, em outras palavras

$$k \leq t + 2.$$

Portanto , o número k de iterações é não superior a

$$t + 2 \leq \lg n + 2.$$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo `buscaSequencial` no pior caso é proporcional a $\lg n$.

O consumo de tempo do algoritmo `buscaSequencial` é $O(\lg n)$.

Número de iterações

buscaSequencial	buscaBinaria
n	$\lg n$
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
262144	18
1048576	20
⋮	⋮
4294967296	32

Versão recursiva da busca binária

Para formular uma versão recursiva é necessário generalizar um pouco o problema trocando $v[0..n-1]$ por $v[e..d]$.

```
int buscaBinaria(int x, int n, int v[])
 {
1   return buscaBinariaR(x,0,n-1,v);
 }
```

Versão recursiva da busca binária

Recebe um vetor crescente `v[e..d]` e devolve um índice `m` tal que `v[m] == 1`. Se tal `m` não existe, devolve `-1`.

```
int
buscaBinariaR(int x,int e,int d,int v[]) {
    int m;
1   if (d < e) return -1;
2   m = (e + d)/2;
3   if (v[m] == x) return m;
4   if (v[m] < x)
5       return buscaBinariaR(x,m+1,d,v);
6   return buscaBinariaR(x,e,d-1,v);
 }
```

Outra versão recursiva

Observações:

- As declarações `int v[]` e `int *v` no protótipos de funções são equivalentes. Abaixo escolhemos `int *v` apenas para deixar **mais explicito** que em ambos os casos o que está sendo passado como parâmetro é um **endereço**(!).
- As expressões "`&v[m+1]`" e "`v+m+1`" são equivalentes (=tem o memo valor =representam o mesmo endereço).
- Tem um problema ...

Outra versão recursiva

A função abaixo não resolve o problema...

Por quê? Como consertar?

```
int
buscaBinariaR(int x,int n, int *v) {
   int m;
   if (n == 0) return -1;
   m = n/2;
   if (v[m] == x) return m;
   if (v[m] < x)
       return buscaBinariaR(x,n-m-1,&v[m+1]);
   return buscaBinariaR(x,m,v);
 }
```