AULA 11

Análise de algoritmo

Programming Pearls: Algorithm Design Techniques,
Jon Bentley, Addison-Wesley, 1986

Segmento de soma máxima

Um **segmento** de um vetor v[0 . . n−1] é qualquer subvetor da forma v[e . . d].

Problema: Dado um vetor v[0 . . n−1] de números inteiros, determinar um segmento v[e . . d] de soma máxima.

Entra:

	0									n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Segmento de soma máxima

Sai:

	0		2				6			n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

v[e . . d] = v[2 . . 6] é segmento de soma máxima.

v[2 . . 6] tem soma **187**.

Segmento de soma máxima

Problema (versão simplificada): Determinar a soma máxima de um segmento de um dado vetor v[0 . . n−1].

Entra:

	0									n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Sai:

	0		2				6			n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

A soma máxima é **187**.

Algoritmo café-com-leite

```
void segMax3(int v[],int n,int *e,int *d,
                                  int *smax){
  int i, j, k, s;
  *smax = 0; *e = *d = -1;
  for (i = 0; /*1*/ i < n; i++)
     for (j = i; j < n; j++) {
         s = 0;
         for (k = i; /*2*/ k <= j; k++)
            s += v[k];
         if (s > *smax){
            *smax = s; *e = i; *d = j;
         }
     }
}
```

Correção de algoritmos

Estrutura "típica" de demonstrações da correção de algoritmos iterativos através de suas **relações invariantes** consiste em:

1. verificar que a relação vale no início da primeira iteração;
2. demonstrar que se a relação vale no início da iteração, então ela vale no final da iteração (com os papéis de alguns atores possivelmente trocados);
3. concluir que, se relação vale no início da última iteração, então a a relação junto com a condição de parada implicam na correção do algoritmo.

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em `/*1*/` vale que: $v[*e..*d]$ é um segmento de soma máxima com $*e < i$. ♡

	$*e$		i				$*d$			$n-1$
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Correção

Mais relações **invariantes**:

(i1) em `/*1*/` vale que:

$$*smax = v[*e] + v[*e{+}1] + v[*e{+}2] + \cdots + v[*d];$$

(i2) em `/*2*/` vale que:

$$s = v[i] + v[i{+}1] + v[i{+}2] + \cdots + v[k{-}1].$$

Consumo de tempo segMax3

Se a execução de cada linha de código consome 1 **unidade** de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1	$=$	1	$= 1$
2	$=$	$n+1$	$\leq n$
3	$=$	$(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$	$\leq n^2$
4	$=$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$\leq n^2$
5	$=$	$(2+\cdots+(n+1))+(2+\cdots+n)+\cdots+2$	$\leq n^3$
6	$=$	$(1+\cdots+n)+(1+\cdots+(n-1))+\cdots+1$	$\leq n^3$
7	$=$	$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$	$\leq n^2$
8	$\leq$	$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$	$\leq n^2$
total	$\leq$	$2n^3+4n^2+n+1$	$\sim n^3$

Conclusão

> O consumo de tempo do algoritmo `segMax3` é proporcional a n^3.

Algoritmo arroz-com-feijão

```
void segMax2(int v[],int n,int *e,int *d,
                        int *smax){
  int i, j, s;
  *smax = 0; *e = *d = -1;
  for (i = 0; /*1*/ i < n; i++) {
        s = 0;
        for (j = i; j < n; j++){
            s += v[j];
            if (/*2*/ s > *smax){
               *smax = s; *e = i; *d = j;
            }
        }
     }
  }
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $v[*e\,..\,*d]$ é um segmento de soma máxima com $*e < i$. ♡

	*e						*d	i		n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Correção

Mais relações invariante:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$smax = v[*e] + v[*e+1] + v[*e+2] + \cdots + v[*d];$$

(i2) em /*2*/ vale que:

$$s = v[i] + v[i+1] + v[i+2] + \cdots + v[j].$$

Consumo de tempo segMax2

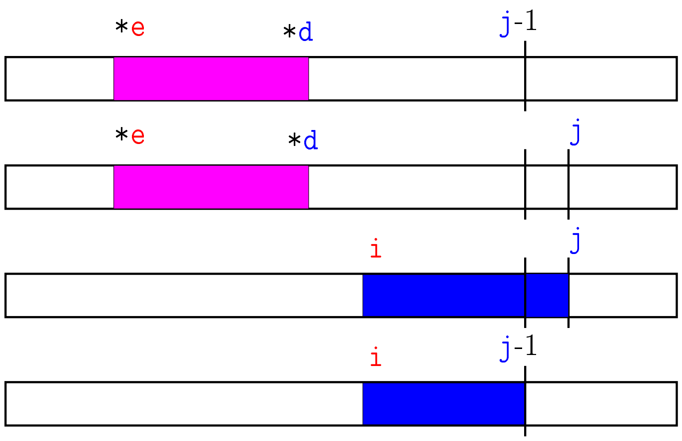
Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1	$=$	1	$= 1$
2	$=$	$n+1$	$\approx n$
3	$=$	n	$= n$
4	$=$	$(n+1)+n+\cdots+2$	$\leq n^2$
5	$=$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$\leq n^2$
6	$=$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$\leq n^2$
7	$\leq$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$\leq n^2$
total	$\leq$	$4n^2+2n+1$	$\sim n^2$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo segMax2 é proporcional a n^2.

Nova ideia (indutiva)



Implementação ingênua

Determina um segmento de soma máxima de $v[0\,..\,n-1]$.

```
void segMaxI(int v[],int n,int *e,int *d,
                    int *smax){
  int i, j, k, sk, s;
1 *smax = 0; *e = *d = -1;
```

Implementação ingênua

```
2 for(j = 0; /*1*/ j < n; j++) {
3    s = sk = 0; i = j + 1;
4    for(k = j; k >= 0; k--) {
5        sk += v[k];
6        if (sk > s){ s = sk; i = k; }
     }
7    if (/*2*/ s > *smax){
8        *smax = s; *e = i; *d = j;
     }
   }
}
```

Correção

Relação **invariante** chave:

(i0) em /*1*/ vale que: $v[*e \,..\, *d]$ é segmento de soma máxima com $*d \leq j - 1$. ♡

			*e	*d	j					n−1
v	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Mais uma relação **invariante**:

(i1) em /*1*/ vale que:

$$smax = v[*e] + v[*e{+}1] + v[*e{+}2] + \cdots + v[*d].$$

Mais relações invariantes

Em /*2*/ vale que:

(i2) $v[i \,..\, j]$ é segmento de soma máxima com término em j;

(i3) $s = v[i] + v[i{+}1] + v[i{+}2] + \cdots + v[j]$;

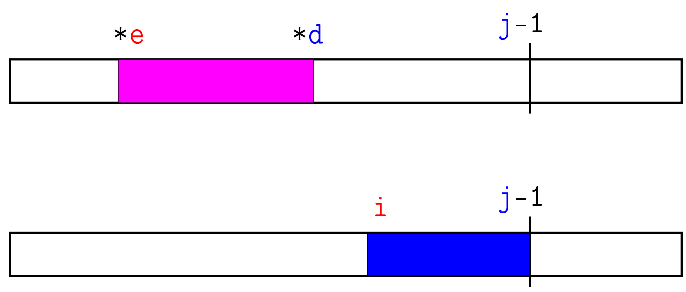
(i4) para $k = i, i+1, \ldots, j$, vale que

$$v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[j] \geq 0\,;$$

(i5) para $k = 0, 1, \ldots, i{-}1$, vale que

$$v[k] + v[k{+}1] + \cdots + v[i{-}1] < 0\,;$$

Invariantes (i0) e (i2)



Consumo de tempo segMaxI

linha		todas as execuções da linha	
1	$=$	1	$= 1$
2	$=$	$n + 1$	$\approx n$
3	$=$	n	$= n$
4	$=$	$2 + 3 + \ldots + (n + 1)$	$\leq n^2$
5	$=$	$1 + 2 + \ldots + n$	$\leq n^2$
6	$=$	$1 + 2 + \ldots + n$	$\leq n^2$
7	$=$	n	$= n$
8	$\leq$	n	$= n$
total	$\leq$	$3n^2 + 4n + 1$	$\sim n^2$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo segMaxI é proporcional a n^2.