

# AULA 4

# Mais recursão ainda

PF 2.1, 2.2, 2.3 S 5.1

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

# Máximo divisor comum

PF 2.3 S 5.1

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

<http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0122-2012/aulas/mdc/>

# Divisibilidade

Suponha que  $a$ ,  $b$  e  $d$  são números inteiros.

Dizemos que  $d$  **divide**  $a$  se  $a = kd$  para algum número inteiro  $k$ .

$d \mid a$  é uma abreviatura de “ $d$  divide  $a$ ”

Se  $d$  divide  $a$ , então dizemos que  $a$  é um **múltiplo** de  $d$ .

Se  $d$  divide  $a$  e  $d > 0$ , então dizemos que  $d$  é um **divisor** de  $a$

# Divisibilidade

Se  $d$  divide  $a$  e  $d$  divide  $b$ , então  $d$  é um **divisor comum** de  $a$  e  $b$ .

Exemplos:

os divisores de  $30$  são:  $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$  e  $30$

os divisores de  $24$  são:  $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$  e  $24$

os divisores comuns de  $30$  e  $24$  são:  $1, 2, 3$  e  $6$

## Máximo divisor comum

O **máximo divisor comum** de dois números inteiros  $a$  e  $b$ , onde pelo menos um é não nulo, é o maior divisor comum de  $a$  e  $b$ .

O máximo divisor comum de  $a$  e  $b$  é denotado por  $\text{mdc}(a, b)$ .

Exemplo:

máximo divisor comum de  $30$  e  $24$  é  $6$

máximo divisor comum de  $514229$  e  $317811$  é  $1$

máximo divisor comum de  $3267$  e  $2893$  é  $11$

# Máximo divisor comum

**Problema:** Dados dois números inteiros não-negativos  $a$  e  $b$ , determinar  $\text{mdc}(a, b)$ .

Exemplo:

máximo divisor comum de 30 e 24 é 6

máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1

máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

## Café com leite

Recebe números inteiros não-negativos  $a$  e  $b$  e devolve  $\text{mdc}(m, n)$ . Supõe  $m, n > 0$ .

```
#define min(m,n) ((m) < (n) ? (m) : (n))
int mdc(int m, int n)
{
    int d = min(m,n);

    while (/*1*/ m%d != 0 || n%d != 0)
        /*2*/
        d--;

    /*3*/
    return d;
}
```



# Invariantes e correção

Passamos agora a verificar a correção do algoritmo.

Correção da função = a função funciona = a função faz o que promete.

A correção de **algoritmos iterativos** é comumente baseada na demonstração da validade de **invariantes**.

Estes **invariantes** são afirmações ou **relações** envolvendo os objetos mantidos pelo algoritmo.

## Invariantes e correção

Eis **relações invariantes** para a função **mdc**.

Em **/\*1\*/** vale que

$$(i0) \quad 1 \leq d \leq \min(m, n), \text{ e}$$

$$(i1) \quad m \% t \neq 0 \text{ ou } n \% t \neq 0 \text{ para todo } t > d,$$

e em **/\*2\*/** vale que

$$(i2) \quad m \% d \neq 0 \text{ ou } n \% d \neq 0.$$

## Invariantes e correção

É evidente que em /\*3\*/, antes da função retornar  $d$ , vale que

$$m \% d = 0 \text{ e } n \% d = 0.$$

Como (i1) vale em /\*1\*/, então (i1) também vale em /\*3\*/. Assim, nenhum número inteiro maior que o valor  $d$  retornado divide  $m$  e  $n$ . Portanto, o valor retornado é de fato o  $\text{mdc}(m, n)$ .

Invariantes são assim mesmo. A validade de alguns torna a correção do algoritmo (muitas vezes) evidente. Os invariantes secundários servem para confirmar a validade dos principais.

# Invariantes e correção

**Relações invariantes**, além de serem uma ferramenta útil para demonstrar a correção de algoritmos iterativos, elas nos **ajudam a compreender o funcionamento do algoritmo**. De certa forma, eles "espelham" a maneira que entendemos o algoritmo.

## Consumo de tempo

Quantas iterações do `while` faz a função `mdc`?

Em outras palavras, quantas vezes o comando "`d--`" é executado?

A resposta é  $\min(m, n) - 1$  ... no **pior caso**.

Aqui, estamos supondo que  $m \geq 0$  e  $n \geq 0$ .

Por exemplo, para a chamada `mdc(317811, 514229)` a função executará  $317811 - 1$  iterações, pois `mdc(317811, 514229) = 1`, ou seja,  $317811$  e  $514229$  são **relativamente primos**.

## Consumo de tempo

Neste caso, costuma-se dizer que o **consumo de tempo** do algoritmo, no pior caso, é *proporcional a*  $\min(m, n)$ , ou ainda, que o consumo de tempo do algoritmo é da *ordem de*  $\min(m, n)$ .

A abreviatura de “*ordem blá*” é  $O(\text{blá})$ .

Isto significa que se o **valor de**  $\min(m, n)$  **dobra** então o **tempo gasto** pela função **pode dobrar**.

## Conclusões

No pior caso, o consumo de tempo da função `mdc` é proporcional a  $\min(m, n)$ .

O consumo de tempo da função `mdc` é  $O(\min(m, n))$ .

Se o valor de  $\min(m, n)$  dobra, o consumo de tempo pode dobrar.

# Algoritmo de Euclides

O máximo divisor comum pode ser determinado através de um algoritmo de 2300 anos (cerca de 300 A.C.), o **algoritmo de Euclides**.

Para calcular o  $\text{mdc}(m, n)$  o algoritmo de Euclides usa a recorrência:

$$\text{mdc}(m, 0) = m;$$

$$\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(n, m \% n), \text{ para } n > 0.$$

Assim, por exemplo,

$$\text{mdc}(12, 18) = \text{mdc}(18, 12) = \text{mdc}(12, 6) = \text{mdc}(6, 0) = 6.$$



# Correção

A correção da recorrência proposta por Euclides é baseada no seguinte fato.

Se  $m$ ,  $n$  e  $d$  são números inteiros,  $m \geq 0$ ,  
 $n, d > 0$ , então

$d$  divide  $m$  e  $n \iff d$  divide  $n$  e  $m \% n$ .

## Euclides recursivo

```
int euclidesr(int m, int n)
{
    if (n==0) return m;
    return euclidesr(n, m % n);
}
```

## Euclides iterativo

```
int euclidesi(int m, int n) {
    int r;

    do
        {
            r = m % n;
            m = n;
            n = r;
        }
    while (r != 0);

    return m;
}
```

# euclidesr(317811,514229)

```
mdc(317811,514229)
  mdc(514229,317811)
    mdc(317811,196418)
      mdc(196418,121393)
        mdc(121393,75025)
          mdc(75025,46368)
            mdc(46368,28657)
              mdc(28657,17711)
                mdc(17711,10946)
                  mdc(10946,6765)
                    mdc(6765,4181)
                      mdc(4181,2584)
                        mdc(2584,1597)
                          mdc(1597,987)
                            mdc(987,610)
                              mdc(610,377)
                                mdc(377,233)
                                  mdc(233,144)
                                    mdc(144,89)
                                      mdc(89,55)
                                        mdc(55,34)
                                          mdc(34,21)
                                            mdc(21,13)
                                              mdc(13,8)
                                                mdc(8,5)
                                                  mdc(5,3)
                                                    mdc(3,2)
                                                      mdc(2,1)
                                                        mdc(1,0)

mdc(317811,514229) = 1.
```

## Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real  0m0.004s
user  0m0.004s
sys   0m0.000s
```

```
meu_prompt>time ./euclidesr 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real  0m0.002s
user  0m0.000s
sys   0m0.000s
```

## Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real    0m11.366s
user    0m11.361s
sys     0m0.000s
```

```
meu_prompt>time ./euclidesr 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real    0m0.002s
user    0m0.000s
sys     0m0.000s
```

## Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `euclidesr` é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Suponha que `euclidesr` faz  $k$  chamadas recursivas e que no início da 1a. chamada ao algoritmo tem-se que  $0 < n \leq m$ .

Sejam

$$(m, n) = (m_0, n_0), (m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k) = (\text{mdc}(m, n), 0),$$

os valores dos parâmetros no início de cada uma das chamadas da função.

## Número de chamadas recursivas

Por exemplo, para  $m = 514229$  e  $n = 317811$  tem-se

$$(m_0, n_0) = (514229, 317811),$$

$$(m_1, n_1) = (317811, 196418),$$

$$(m_2, n_2) = (196418, 121393),$$

... = ...

$$(m_{27}, n_{27}) = (1, 0).$$



## Número de chamadas recursivas

Estimaremos o valor de  $k$  em função de  $n = \min(m, n)$ .

Note que  $m_{i+1} = n_i$  e  $n_{i+1} = m_i \% n_i$  para  $i=1, 2, \dots, k$ .

Note ainda que para inteiros  $a$  e  $b$ ,  $0 < b \leq a$  vale que

$$a \% b < \frac{a}{2} \quad (\text{verifique!}).$$

# Número de chamadas recursivas

Desta forma tem-se que

$$n_2 = m_1 \% n_1 = n_0 \% n_1 < n_0/2 = n/2 = n/2^1$$

$$n_4 = m_3 \% n_3 = n_2 \% n_3 < n_2/2 < n/4 = n/2^2$$

$$n_6 = m_5 \% n_5 = n_4 \% n_5 < n_4/2 < n/8 = n/2^3$$

$$n_8 = m_7 \% n_7 = n_6 \% n_7 < n_6/2 < n/16 = n/2^4$$

$$n_{10} = m_9 \% n_9 = n_8 \% n_9 < n_8/2 < n/32 = n/2^5$$

...

...

...

Percebe-se que depois de cada **2 chamadas recursivas** o valor do **segundo parâmetro** é reduzido a **menos da sua metade**.

## Número de chamadas recursivas

Seja  $t$  o número inteiro tal que

$$2^t \leq n < 2^{t+1}$$

Da primeira desigualdade temos que

$$t \leq \lg n,$$

onde  $\lg n$  denota o logaritmo de  $n$  na base 2.

Da desigualdade estrita, concluímos que

$$k \leq 2(t + 1) - 1 = 2t + 1$$

Logo, o número  $k$  de chamadas recursivas é não superior a

$$2t + 1 \leq 2 \lg n + 1.$$

## Número de chamadas recursivas

Para o exemplo acima, onde  $m=514229$  e  $n=317811$ , temos que

$$2 \lg n + 1 = 2 \lg(317811) + 1 < 2 \times 18,3 + 1 < 37,56$$

e o número de chamadas recursivas feitas por `euclidesr(514229,317811)` foram 27.

## Consumo de tempo

Resumindo, a quantidade de tempo consumida pelo algoritmo de Euclides é, no pior caso, **proporcional** a  $\lg n$ .

Este desempenho é **significativamente melhor** que o desempenho do algoritmo **Café com leite**, já que a função  $f(n) = \lg n$  cresce **muito mais lentamente** que a função  $g(n) = n$ .

## Consumo de tempo

$n$	$(\text{int}) \lg n$
4	2
5	2
6	2
10	3
64	6
100	6
128	7
1000	9
1024	10
1000000	19
1000000000	29

# Conclusões

Suponha que  $m > n$ .

O número de chamadas recursivas da função `euclidesr` é  $\leq 2(\lg n) - 1$ .

No pior caso, o consumo de tempo da função `euclidesr` é proporcional a  $\lg n$ .

## Conclusões

Suponha que  $m > n$ .

O consumo de tempo da função `euclidesr` é  $O(\lg n)$ .

Para que o consumo de tempo da função `euclidesr` dobre é necessário que o valor de `n` seja elevado ao quadrado.



# Euclides e Fibonacci

Demonstre por indução em  $k$  que:

Se  $m > n \geq 0$  e se a chamada `euclidesr(m,n)` faz  $k \geq 1$  chamadas recursivas, então

$$m \geq \text{fibonacci}(k + 2) \text{ e } n \geq \text{fibonacci}(k + 1).$$