Melhores momentos

AULAS ANTERIORES

Classe O da solução de uma recorrência

Não faço questão de solução exata: basta solução aproximada (em notação O; melhor ainda Θ)

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 1 \\
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16, \ldots
\end{aligned}
$$

Solução exata: $G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$

Solução aproximada: $G(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$ ($G(n) = \Theta(n \lg n)$!)

Em geral, é mais fácil obter e provar solução aproximada que solução exata

Dica prática (sem prova)

A solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 2T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

e na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T''(4) &= 10 \\ T''(n) &= 2T''(n/2) + n \quad \text{para } n = 2^3, 2^4, 2^5, \ldots \end{aligned}$$

Recorrências com O do lado direito

A "recorrência"

$$T(n) = 2T(n/2) + \mathrm{O}(n)$$

representa todas as recorrências da forma $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ em que $f(n)$ é $\mathrm{O}(n)$.

Melhor: representa todas as recorrências do tipo

$$\begin{aligned} T'(n) &\leq a \quad \text{para } n = k, k+1, \ldots, 2k-1 \\ T'(n) &\leq 2T'(\lfloor n/2 \rfloor) + b\,n \quad \text{para } n \geq 2k \end{aligned}$$

quaisquer que sejam a, $b > 0$ e $k > 0$ (poderíamos tomar $n_0 = 1$; veja ex ??.I)

Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre (Master Theorem, CLRS, sec. 4.3, p.73):

Suponha

$$T(n) = a\,T\big(n/b\big) + f(n)$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$
se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ então $T(n) = \Theta(f(n))$

para qualquer $\epsilon > 0$.

Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Segmento de soma máxima

Um segmento de um vetor $A[1\,..\,n]$ é um qualquer subvetor da forma $A[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros, determinar um segmento $A[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:

	1									n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Sai:

	1		3				7			n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

$A[e\,..\,d] = A[3\,..\,7]$ é segmento de soma máxima.
$A[3\,..\,7]$ tem soma 187.

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-3 é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-2 é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-DC é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-1 é $\Theta(n)$.

Técnicas

- Evitar recomputações. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recomputá-los (SEG-MAX-2, SEG-MAX-1, programação dinâmica).
- Pré-processar os dados. O HEAPSORT pré-processa os dados armazenandos em uma entrutura de dados para realizar computações futuras mais eficientemente.
- Divisão-e-conquista. Os algoritmos Mergesort e SegMaxdc utilizam uma forma conhecidade dessa técnica.
- Algoritmos incrementais/varredura. Como estender a solução de um subproblema a uma solução do problema (SegMaxu).
- Delimitação inferior. Projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (SegMaxu).

Resultados experimentais

n	SEG-MAX-2		SEG-MAX-3	
	`clock`	`user time`	`clock`	`user time`
1000	0.01	0.01	2.91	2.92
2000	0.03	0.03	23.00	23.04
3000	0.08	0.08	77.58	1m17.57
5000	0.24	0.24	360.78	6m0.45s
10000	1.16	1.62	2940	49m27.32
20000	4.8	4.82	?	?
50000	42.8	42.96	?	?
100000	188.0	3m7.58s	?	?
200000	911.74	15m10.34s	?	?
400000	?	64m22.880s	?	?

Resultados experimentais

n (M)	SEG-MAX-1 A		SEG-MAX-1 B	
	`clock`	`user time`	`clock`	`user time`
1	0.06	0.11	0.08	0.07
2	0.11	0.23	0.15	0.06
3	0.16	0.28	0.30	0.12
6	0.32	0.63	0.56	0.29
8	0.43	0.80	0.71	0.43
10	0.55	1.03	1.00	0.52
15	0.82	1.55	1.37	0.64
20	1.08	2.03	2.17	0.95
25	1.37	2.52	2.44	1.38
30	1.70	3.13	3.28	1.68

[a]

[a] Todos os tempos estão em segundos.

AULA 7

Mais análise de algoritmos recursivos

CLRS 2.1–2.2, 28.2

AU 3.3, 3.6 (muito bom)

Notas de AA de Jeff Edmonds:

`http://www.cs.yorku.ca/~jeff/notes/3101/`

Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8

Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Sai:

$X \cdot Y$

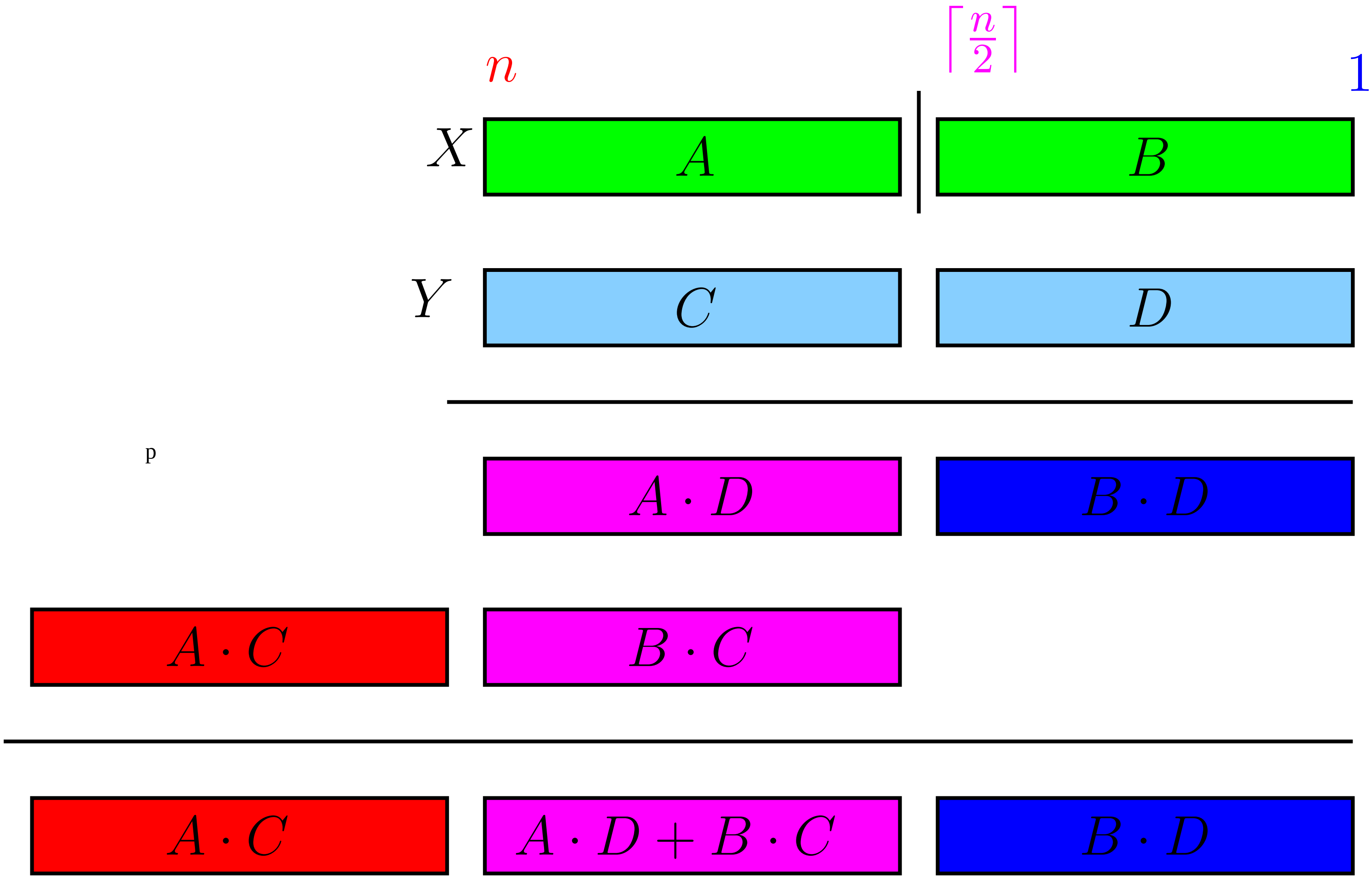
23																						1
5	8	4	4	0	8	7	2	8	6	7	0	2	7	1	4	1	0	2	9	5	1	2

Algoritmo do ensino fundamental

```
                        * * * * * * * *
                     ×  * * * * * * * *
                     ------------------
                      * * * * * * * * *
                    * * * * * * * * *
                  * * * * * * * * *
                * * * * * * * * *
              * * * * * * * * *
            * * * * * * * * *
          * * * * * * * * *
        * * * * * * * * *
    -----------------------------------
      * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

O algoritmo do ensimo fundamental é $\Theta(n^2)$.

Divisão e conquista



$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^n + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

Exemplo

	4			1
X	3	1	4	1

	4			1
Y	5	9	3	6

Exemplo

	4			1
X	3	1	4	1

	4			1
Y	5	9	3	6

A	3	1

B	4	1

C	5	9

D	3	6

Exemplo

$$X \quad \begin{array}{cccc} \color{red}{4} & & & \color{blue}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \qquad Y \quad \begin{array}{cccc} \color{red}{4} & & & \color{blue}{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{9} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline \end{array}$$

$$A \ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad C \ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 9 \\ \hline \end{array} \qquad D \ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$X \cdot Y = \color{red}{A \cdot C} \times 10^4 + \color{magenta}{(A \cdot D + B \cdot C)} \times 10^2 + \color{blue}{B \cdot D}$$

$\color{red}{A \cdot C = 1829}$ $\qquad$ $\color{magenta}{(A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535}$

$\color{blue}{B \cdot D = 1476}$

$$\begin{array}{lcccccccc} \color{red}{A \cdot C} & \color{red}{1} & \color{red}{8} & \color{red}{2} & \color{red}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \color{magenta}{(A \cdot D + B \cdot C)} & & & \color{magenta}{3} & \color{magenta}{5} & \color{magenta}{3} & \color{magenta}{5} & 0 & 0 \\ \color{blue}{B \cdot D} & & & & & \color{blue}{1} & \color{blue}{4} & \color{blue}{7} & \color{blue}{6} \\ \hline X \cdot Y = & 1 & 8 & 6 & 4 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{array}$$

Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT (X, Y, n)
se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
$A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\quad B \leftarrow X[1\,..\,q]$
$C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\quad D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
$E \leftarrow$ MULT$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
$F \leftarrow$ MULT$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
$G \leftarrow$ MULT$(A, D, \lceil n/2 \rceil)$
$H \leftarrow$ MULT$(B, C, \lceil n/2 \rceil)$
$R \leftarrow E \times 10^{n} + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
devolva R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(1)$
3	$=$	$\Theta(n)$
4	$=$	$\Theta(n)$
5	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
8	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
9	$=$	$\Theta(n)$
10	$=$	$\Theta(n)$
total	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(4n+2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

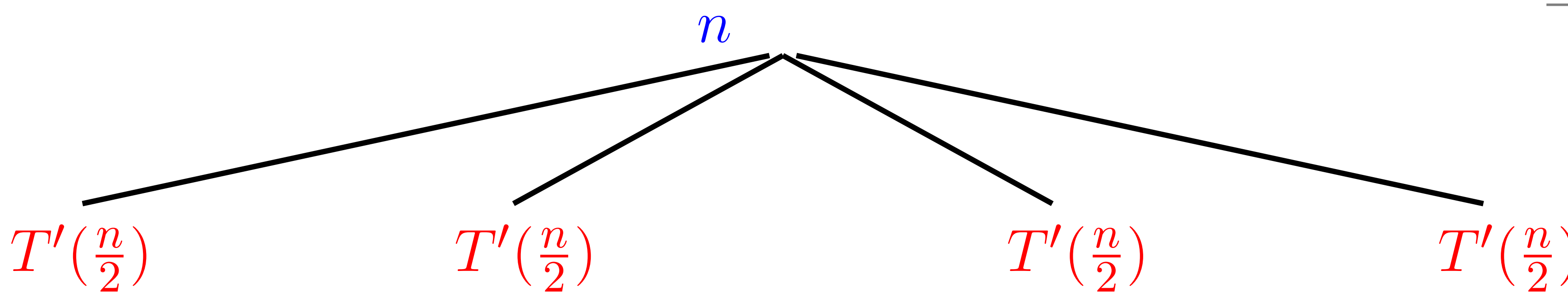
$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 4T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776

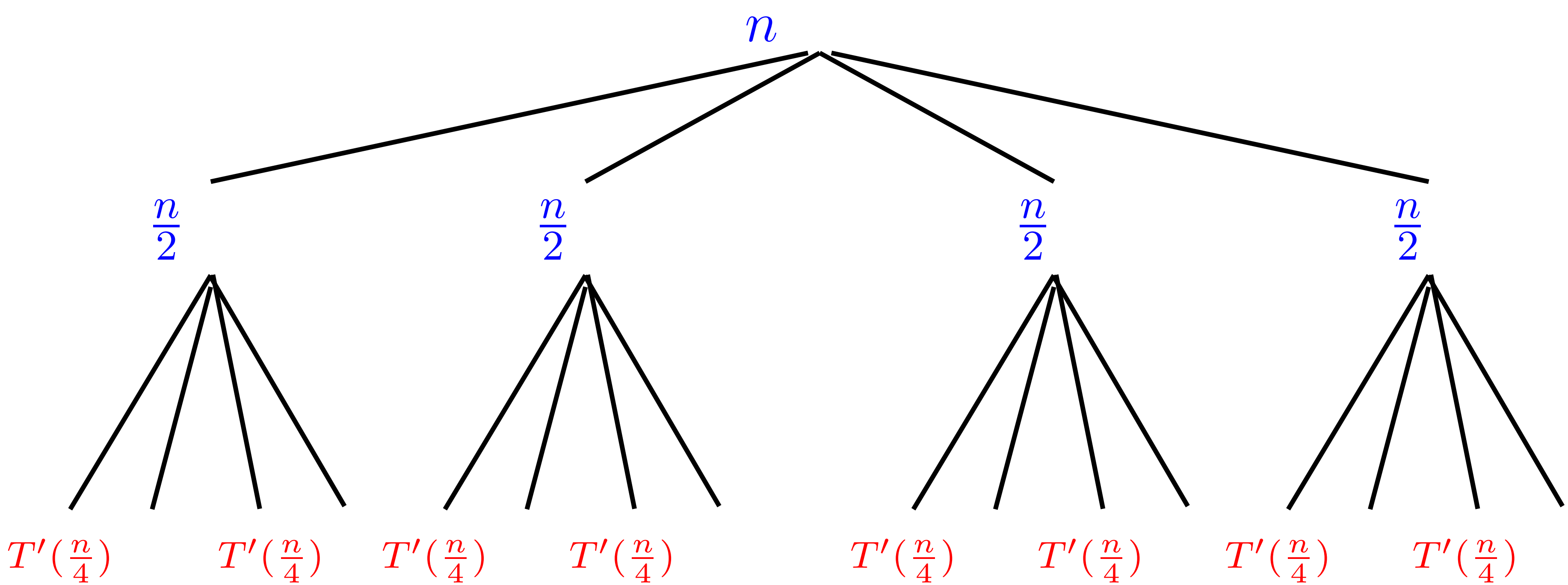
Árvore da recorrência

$$T'(n)$$

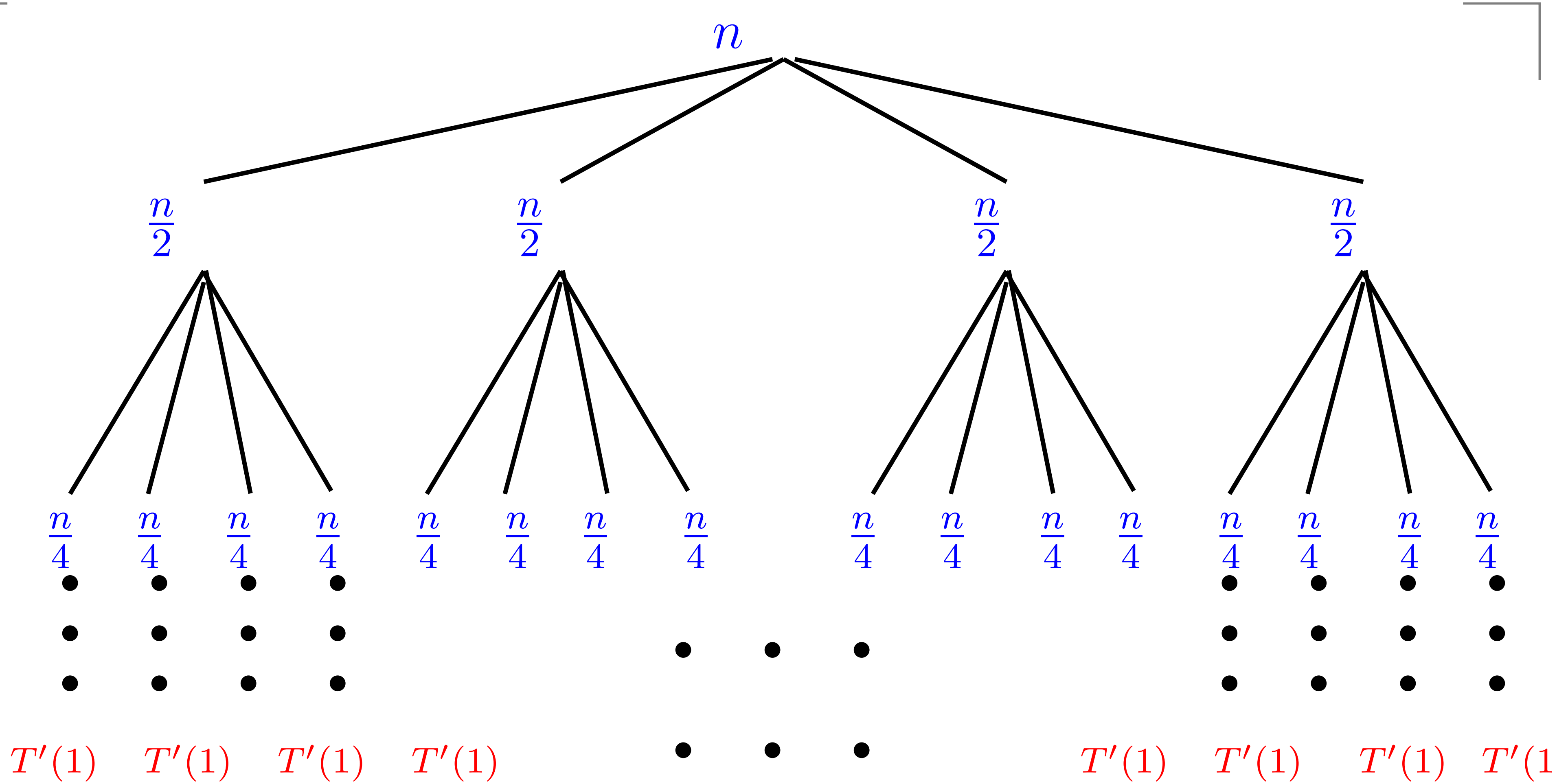
Árvore da recorrência



Árvore da recorrência



Árvore da recorrência



total de $1 + \lg n$ níveis

Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	n	$2n$	$4n$	$\ldots$	$2^{k-1}n$	$2^k n$

$n = 2^k \qquad\qquad k = \lg n$

Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	n	$2n$	$4n$	$\ldots$	$2^{k-1}n$	$2^k n$

$n = 2^k \qquad\qquad k = \lg n$

$$\begin{aligned}
T'(n) &= n + 2n + \cdots + 2^{k-1}n + 2^k n \\
&= n\,(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k) \\
&= n\,(2^{k+1} - 1) \\
&= n\,(2n - 1) \qquad (k = \lg n) \\
&= 2n^2 - n = \Theta(n^2)
\end{aligned}$$

ÊPA, não melhorou ...

Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simpli£cado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada ...
Será?!?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{cccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?
Gauss faz por R$ 3,06!

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$
$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$g = (a+b)(c+d) \qquad e = ac \qquad f = bd \qquad h = g - e - f$$

$$\boxed{X \cdot Y \ \text{(por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f}$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; ? \qquad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 21 \quad Y = \; 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; ? \qquad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 2 \quad Y = \; 2 \quad X \cdot Y = \; 4$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \quad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ 4 \quad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$

$ac = \ ? \quad bd = \ ? \quad (a+b)(c+d) = \ ?$

$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad X \cdot Y = \ ?$

$ac = \ 4 \quad bd = \ ? \quad (a+b)(c+d) = \ ?$

$X = \ 1 \quad Y = \ 3 \quad X \cdot Y = \ 3$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 4 \quad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$X = \;2133 \quad Y = \;2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \;?$

$ac = \;? \qquad bd = \;? \qquad (a+b)(c+d) = \;?$

$X = \;21 \quad Y = \;23 \qquad\qquad X \cdot Y = \;?$

$ac = \;4 \qquad bd = \;3 \qquad (a+b)(c+d) = \;?$

$X = \;3 \quad Y = \;5 \quad X \cdot Y = \;15$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = 483$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = 15$$

Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; 483 \quad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; 483 \quad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 33 \quad Y = \; 12 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ 483 \quad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 33 \quad Y = \ 12 \qquad X \cdot Y = \ 396$$
$$ac = \ 3 \quad bd = \ 6 \qquad (a+b)(c+d) = \ 27$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; 483 \quad bd = \; 396 \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = \; 54 \quad Y = \; 35 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 54 \quad Y = 35 \qquad X \cdot Y = 1890$$
$$ac = 15 \quad bd = 20 \qquad (a+b)(c+d) = 72$$

Exemplo

$$
\begin{array}{llllll}
X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\
ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & 1890
\end{array}
$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = 4931496$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA (X, Y, n)

se $n \leq 3$ **devolva** $X \cdot Y$
$q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
$A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\qquad B \leftarrow X[1\,..\,q]$
$C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\qquad D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
$E \leftarrow$ KARATSUBA$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
$F \leftarrow$ KARATSUBA$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
$G \leftarrow$ KARATSUBA$(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$
$H \leftarrow G - F - E$
$R \leftarrow E \times 10^{n} + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
devolva R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(1)$
3	$=$	$\Theta(n)$
4	$=$	$\Theta(n)$
5	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil + 1)$
8	$=$	$\Theta(n)$
9	$=$	$\Theta(n)$
10	$=$	$\Theta(n)$
total	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(5n+2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugerem que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) \quad \text{para } n = 1,2,3 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 3T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	5	19	65	211	665	2059	6305	19171	58025

Árvore da recorrência

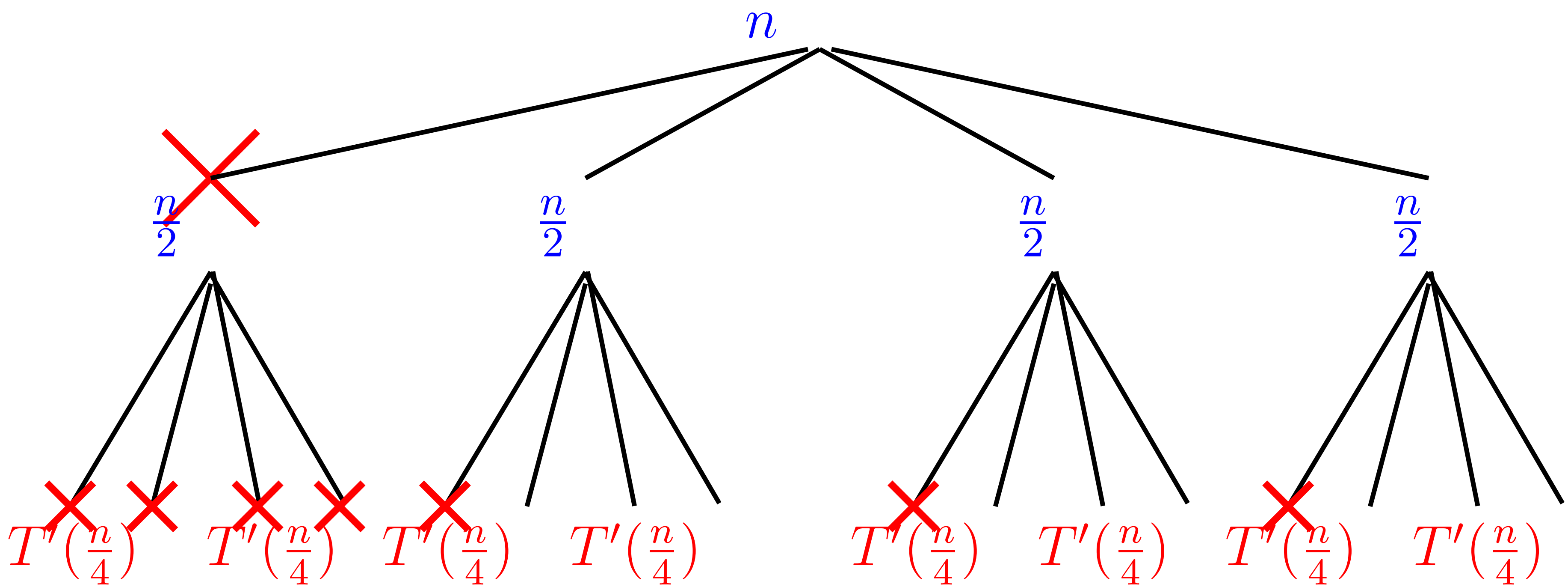
$$T'(n)$$

Árvore da recorrência

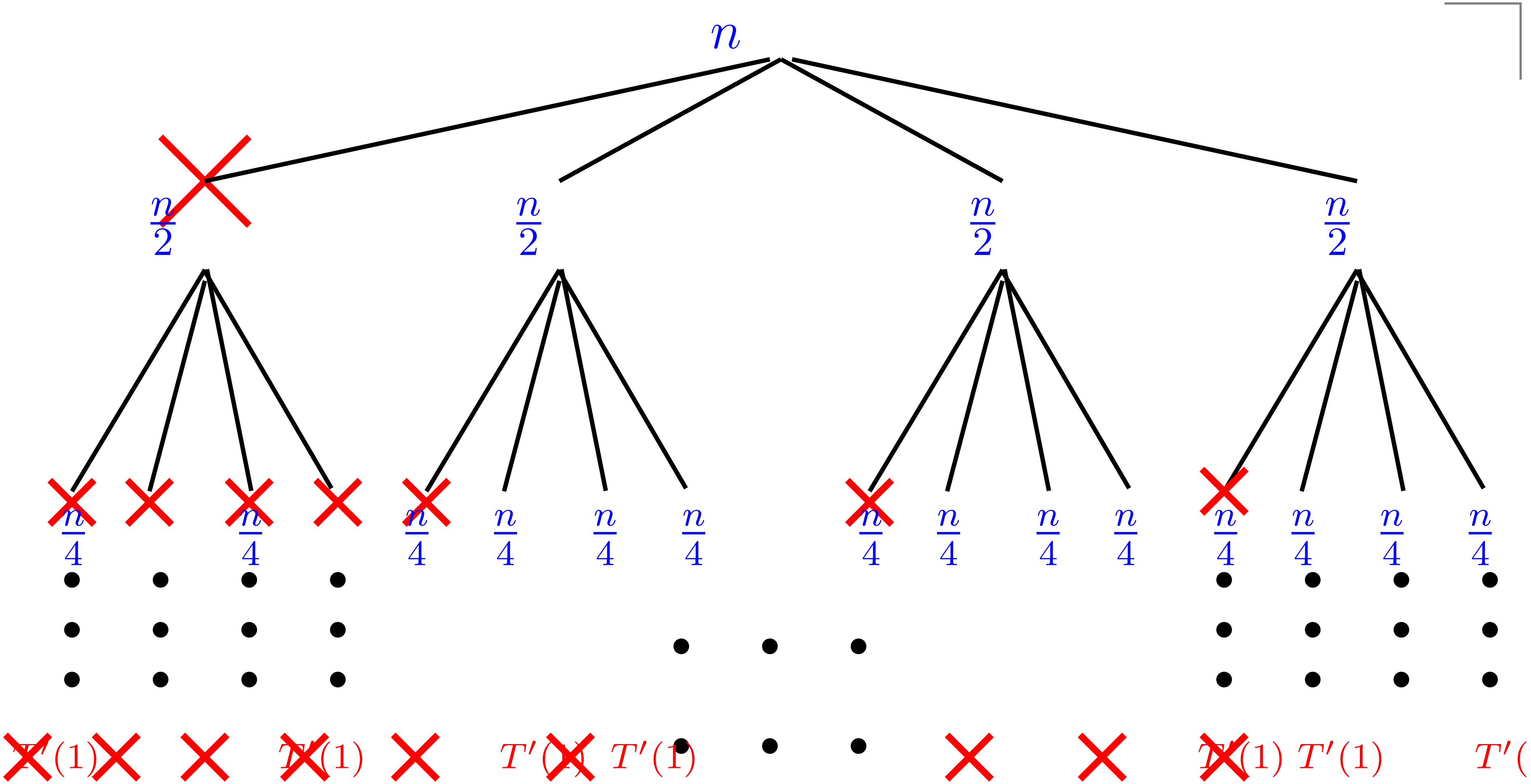
$$n$$

$$\cancel{T'\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad T'\left(\frac{n}{2}\right) \qquad T'\left(\frac{n}{2}\right) \qquad T'\left(\frac{n}{2}\right)$$

Árvore da recorrência



Árvore da recorrência



total de $1 + \lg n$ níveis

Contas

nível	0	1	2	...	$k-1$	k
soma	n	$(3/2)n$	$(3/2)^2 n$	...	$(3/2)^{k-1} n$	$(3/2)^k n$

$n = 2^k$ $\qquad$ $k = \lg n$

Contas

nível	0	1	2	...	$k-1$	k
soma	n	$(3/2)n$	$(3/2)^2 n$	$\dots$	$(3/2)^{k-1} n$	$(3/2)^k n$

$n = 2^k \qquad k = \lg n$

$$\begin{aligned} T'(n) &= n + (3/2)n + \cdots + (3/2)^{k-1} n + (3/2)^k n \\ &= n\,(1 + (3/2) + (3/2)^2 + \cdots + (3/2)^k) \\ &= n\,(3(3/2)^k - 2) \\ &= n\,(3\frac{3^{\lg n}}{2^{\lg n}} - 2) \qquad (\text{pois}, k = \lg n) \\ &= 3 \cdot 3^{\lg n} - 2n = 3n^{\lg 3} - 2n = \Theta(n^{\lg 3}) \end{aligned}$$

$1{,}584 < \lg 3 < 1.585$

LEGAL, estamos de volta ao jogo!

Recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(2) &= 1 \\
R(3) &= 1 \\
R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(2) &= 1 \\ R(3) &= 1 \\ R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Vamos mostra que $R(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.
Isto implica que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	$*$	$*$	$*$	7	63	119	237	324	473	5910

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	$*$	$*$	$*$	7	63	119	237	324	473	5910

Prova:

Se $n = 4$, então $R(n) = 7 = 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$.

Solução assintótica da recorrência

Prova: (continuação) Se $n \geq 5$ vale que

$$R(n) = 3R(\lceil n/2 \rceil + 1) + n$$

hi

$$\leq 3(31(\lceil n/2 \rceil + 1 - 3)^{\lg 3} - 6(\lceil n/2 \rceil + 1)) + n$$

$$\leq 3(31(\frac{(n+1)}{2} - 2)^{\lg 3} - 6(\frac{n}{2} + 1)) + n$$

$$= 3(31(\frac{(n-3)}{2})^{\lg 3} - 3n - 6) + n$$

$$= 3(31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{2^{\lg 3}} - 3n - 6) + n$$

$$= 3 \cdot 31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{3} - 9n - 18 + n$$

$$= 31(n-3)^{\lg 3} - 6n - 2n - 18$$

$$< 31(n-3)^{\lg 3} - 6n = \Theta(n^{\lg 3})$$

Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Conclusão anterior$+$Exercício 9.B $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$ ($1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de inteiros:

Jardim de infância	$\Theta(n\,10^n)$
Ensino fundamental	$\Theta(n^2)$
Karatsuba e Ofman	$\Theta(n^{1.585})$
Schönhage e Strassen	$\Theta(n \lg n \lg\lg n)$

Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

Resultados experimentais

n	Ensino Fund.	KARATSUBA
4	0.005662	0.005815
8	0.010141	0.010600
16	0.020406	0.023643
32	0.051744	0.060335
64	0.155788	0.165563
128	0.532198	0.470810
256	1.941748	1.369863
512	7.352941	4.032258

Tempos em 10^3 segundos.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

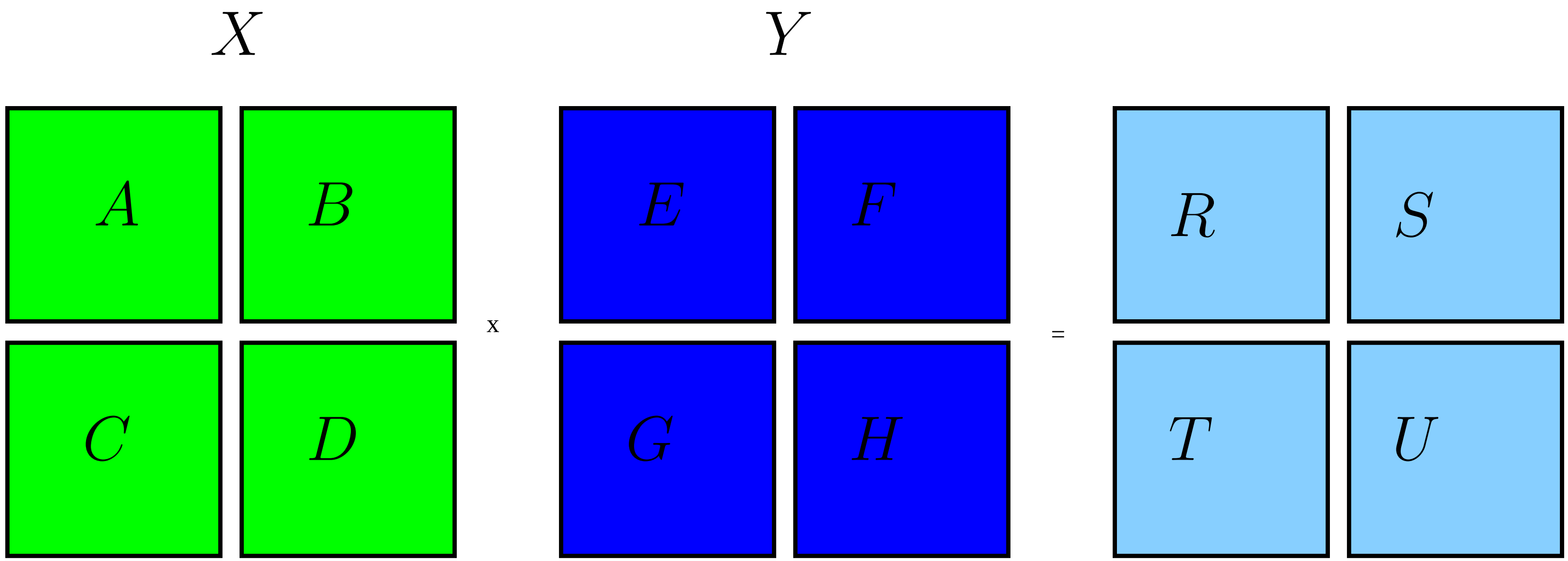
Os algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned} \qquad (0)$$

Solução custa R$ 8,04

Divisão e conquista



$$\begin{aligned} R &= AE + BG \\ S &= AF + BH \\ T &= CE + DG \\ U &= CF + DH \end{aligned} \tag{0}$$

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULTI-M (X, Y, n)
se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)
$R \leftarrow$ MULTI-M$(A, E, n/2) +$ MULTI-M$(B, G, n/2)$
$S \leftarrow$ MULTI-M$(A, F, n/2) +$ MULTI-M$(B, H, n/2)$
$T \leftarrow$ MULTI-M$(C, E, n/2) +$ MULTI-M$(D, G, n/2)$
$U \leftarrow$ MULTI-M$(C, F, n/2) +$ MULTI-M$(D, H, n/2)$
$P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)
devolva P

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(n^2)$
3	$=$	$\Theta(n^2)$
4	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
5	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
6	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
7	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
8	$=$	$\Theta(n^2)$
9	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$8\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$
\begin{aligned}
T(1) &= \Theta(1) \\
T(n) &= 8\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$
\begin{aligned}
T'(1) &= 1 \\
T'(n) &= 8T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	3348889

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(n) &= 8\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Veri£que por indução que $R(n) \le 20(n-1)^3 - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	12	105	112	865	876	945	960
$20\,(n-1)^3 - 2n^2$	-2	12	142	508	1230	2428	4222	6732

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Conclusão anterior$+$Exercício $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é $\Theta(n^3)$.

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R\$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f - h) = af - ah \\
p_2 &= (a + b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c + d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g - e) = dg + de \\
p_5 &= (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cfd
\end{aligned} \tag{1}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg + de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cfd$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$

$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$

$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$

$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

Algoritmo de Strassen

STRASSEN (X, Y, n)

se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$

$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)

$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)

$P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$

$P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$

$P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$

$P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$

$P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$

$P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$

$P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$

$R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$

$S \leftarrow P_1 + P_2$

$T \leftarrow P_3 + P_4$

$U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$

devolva $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2-3	$=$	$\Theta(n^2)$
4-10	$=$	$7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$=$	$\Theta(n^2)$
15	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$7\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 7T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(n) &= 7\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Veri£que por indução que $R(n) \leq 19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

$2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	11	86	93	627	638	700	715
$19\,(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$	-1	11	115	327	881	1657	2790	4337

Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ ($2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$).

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen	$\Theta(n^{2.81})$
...	...
Coppersmith e Winograd	$\Theta(n^{2.38})$

Exercícios

Exercício 11.A

O algoritmo abaixo promete rearranjar $A[p\,.\,.\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
ORDENA-POR-INS (A, p, r)
se p < r
    então ORDENA-POR-INS (A, p, r − 1)
          chave ← A[r]
          i ← r − 1
          enquanto i ≥ p e A[i] > chave faça
              A[i + 1] ← A[i]
              i ← i − 1
          A[i + 1] ← chave
```

O algoritmo está correto? Escreva uma recorrência que expresse o consumo de tempo.

Qual o consumo de tempo do algoritmo?

Exercício 11.B

Que acontece se trocarmos $\lfloor (p+r)/2 \rfloor$ por $\lceil (p+r)/2 \rceil$ na linha 2 do MERGE-SORT?

Mais exercicios

Exercício 11.C

Quantas vezes a comparação "$A[r] \neq 0$" é executada? De£na esse número por meio de um recorrência.

LIMPA (A, p, r)

se $p = r$
    então devolva r
    senão $q \leftarrow$ LIMPA $(A, p, r-1)$
        se $A[r] \neq 0$
            então $q \leftarrow q + 1$
                $A[q] \leftarrow A[r]$
        devolva q

Dê uma fórmula exata para a função de£nida pela recorrência. Em que classe Θ está a função de£nida pela recorrência?