Melhores momentos

AULA 25

Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema Π é uma algoritmo polinomial ALG que recebe

uma instância I de Π e um objeto C, tal que $\langle C\rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I\rangle^c)$ para alguma constante c e

$$\text{ALG}(I, C) = \text{SIM} \Leftrightarrow \Pi(I) = \text{SIM}$$

A constante c depende apenas do problema!

P, NP e co-NP

Classe P	formada por problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial
Classe NP	formada por problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM
Classe co-NP	formada por problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta NÃO

Redução polinomial

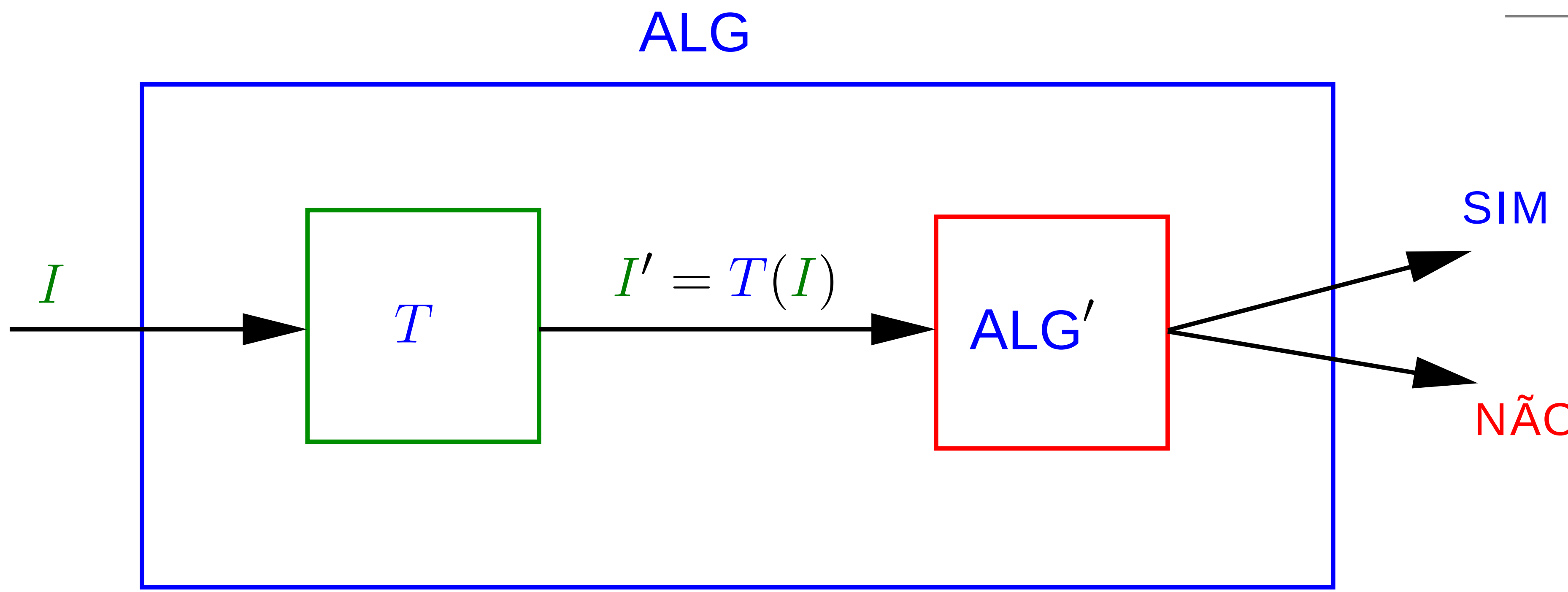
Permite comparar o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Redução (polinomial) de um problema Π a um problema Π' é um algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG$'$ que resolve Π', de tal forma que, se ALG$'$ é um algoritmo polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

$\Pi \leq_P \Pi' =$ existe uma redução de Π a Π'.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π' está em P, então Π está em P.

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG$'$.

T transforma uma instância I de Π em uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{SIM se e somente se } \Pi'(I') = \text{SIM}$$

T é uma espécie de “filtro” ou “compilador”.

Reduções

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

Ciclo hamiltoniano $\leq_P$ Caminho hamiltoniano entre u e v

Caminho hamiltoniano entre u e v $\leq_P$ Caminho hamiltoniano

Caminho hamiltoniano $\leq_P$ Satisfatibilidade

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Hoje: 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin: Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se P $=$ NP.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

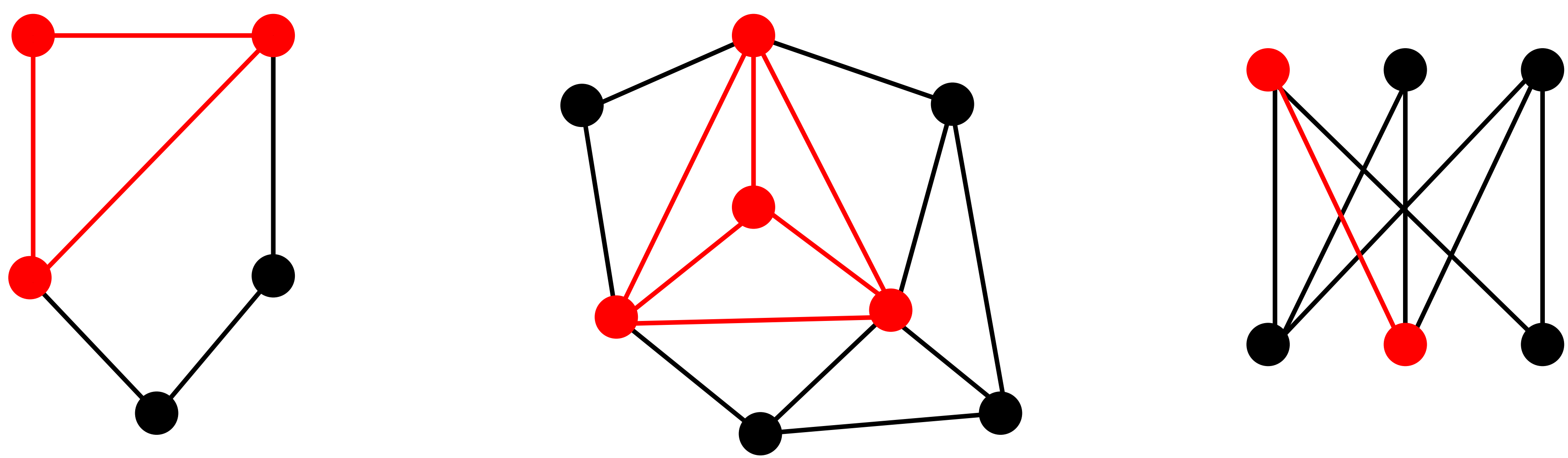
Para isto devemos:

- Demonstrar que Π' está en NP.
- Escolher um problema Π sabidamente NP-completo.
- Demonstrar que $\Pi \leq_P \Pi'$.

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:



clique com k vértices $=$ subgrafo completo com k vértices

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

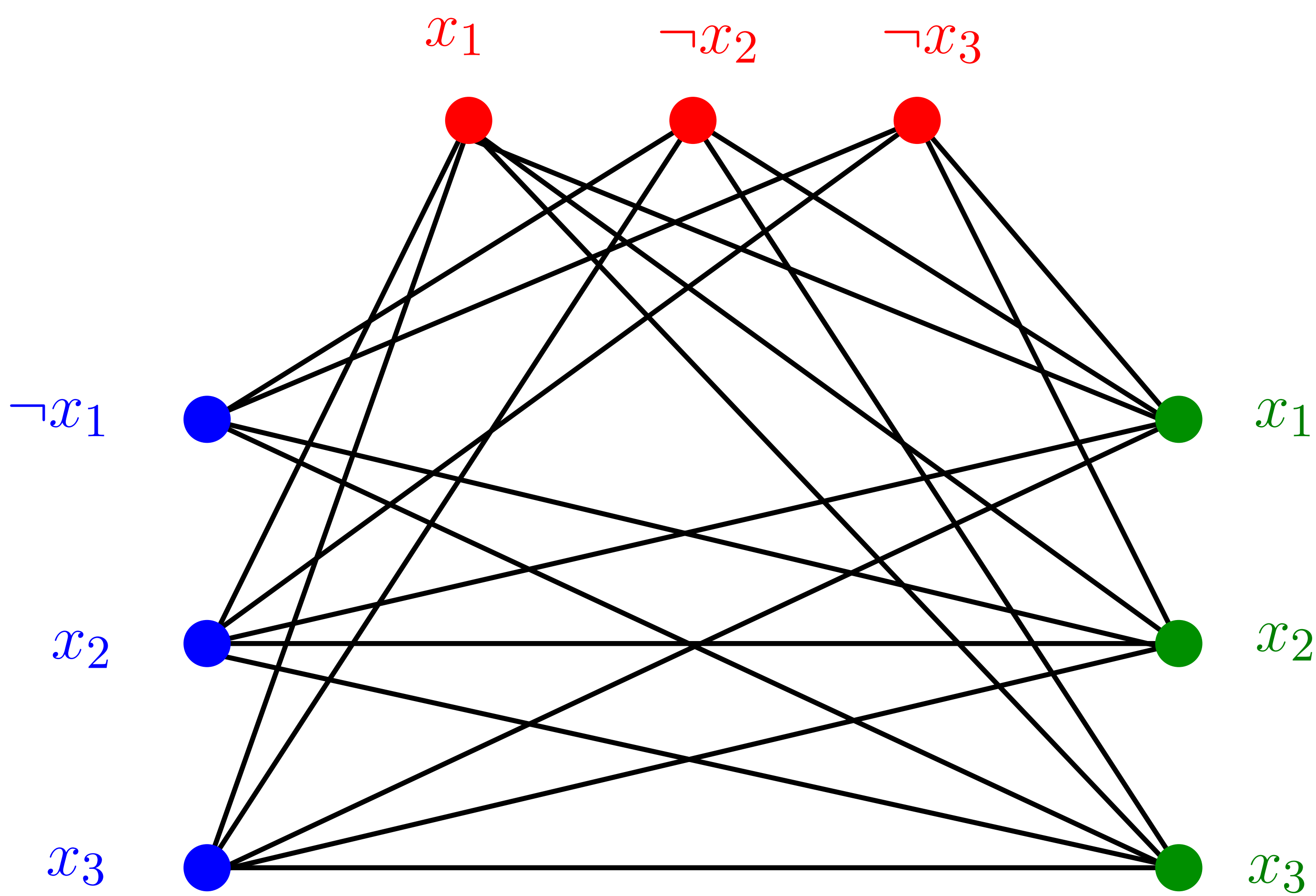
$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada claúsula o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices. Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

- u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes claúsula; e
- se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal $\neg x$.

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Verifique: ϕ é satisfatível $\Leftrightarrow$ G possui um clique $\geq k$.

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica em P $=$ NP.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Exemplos:

- Encontrar um ciclo hamiltoniano é NP-difícil, mas não é NP-completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP.
- Satisfabilidade é NP-completo e NP-difícil.

AULA 26

Algoritmos de aproximação

CLRS 35

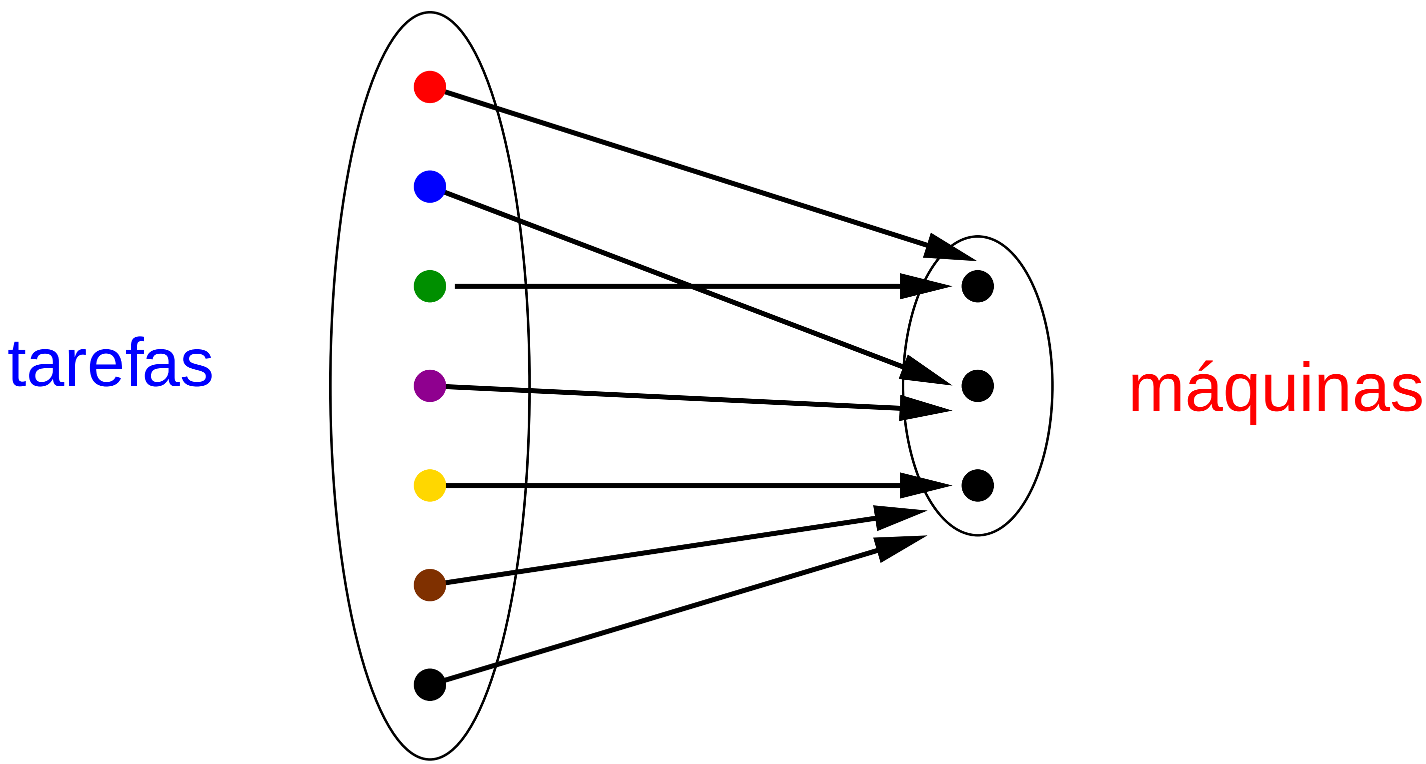
Transparências de Cristina Gomes Fernandes

MAC5727 Algoritmos de Aproximação

Escalonamento de máquinas idênticas

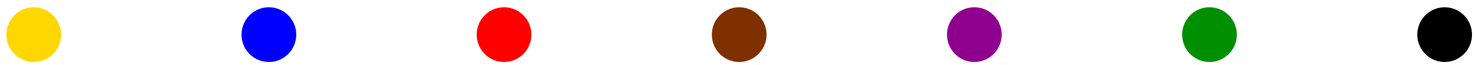
Dados: m máquinas
t tarefas
duração $d[i]$ da tarefa i $(i = 1, \ldots, t)$

um escalonamento é uma partição $\{M[1], \ldots, M[m]\}$ de $\{1, \ldots, t\}$

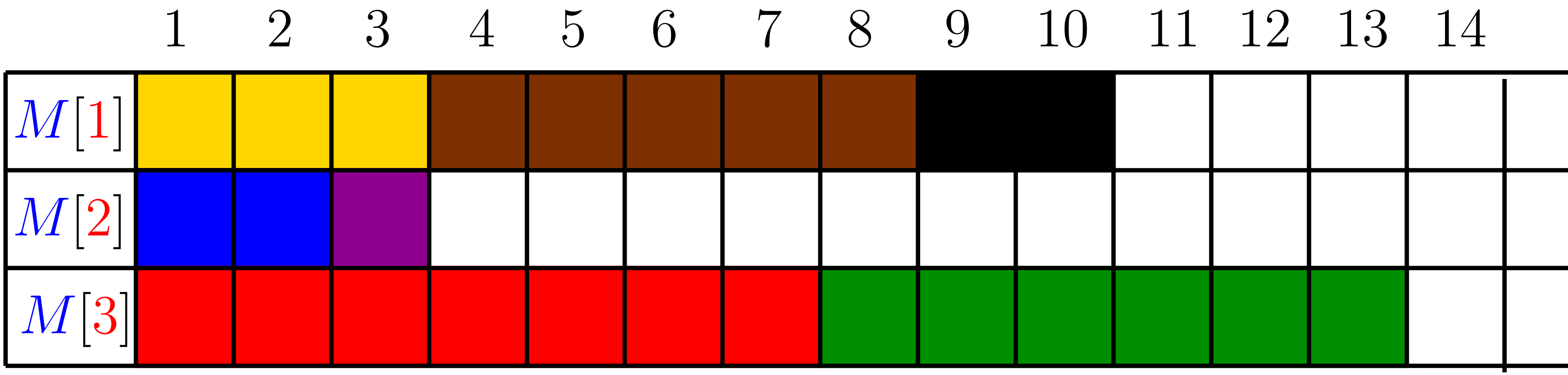


Exemplo 1

$m = 3 \quad t = 7$



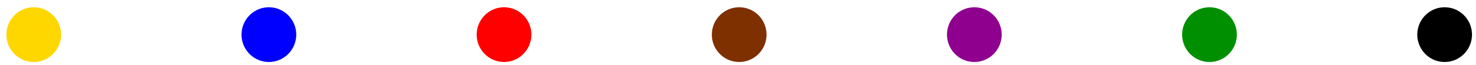
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2



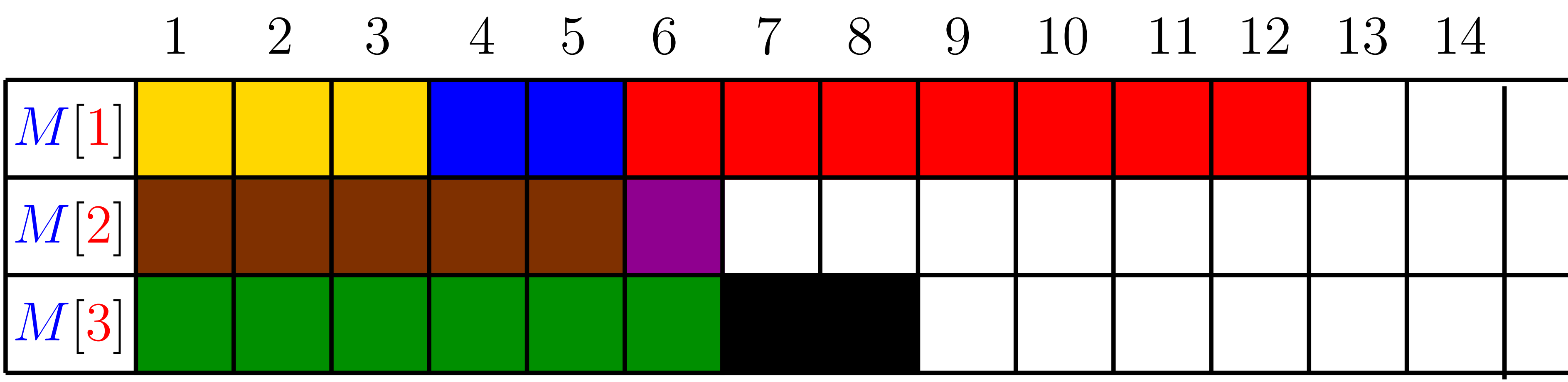
$\{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\} \Rightarrow$ Tempo de conclusão $= 13$

Exemplo 2

$m = 3 \quad t = 7$



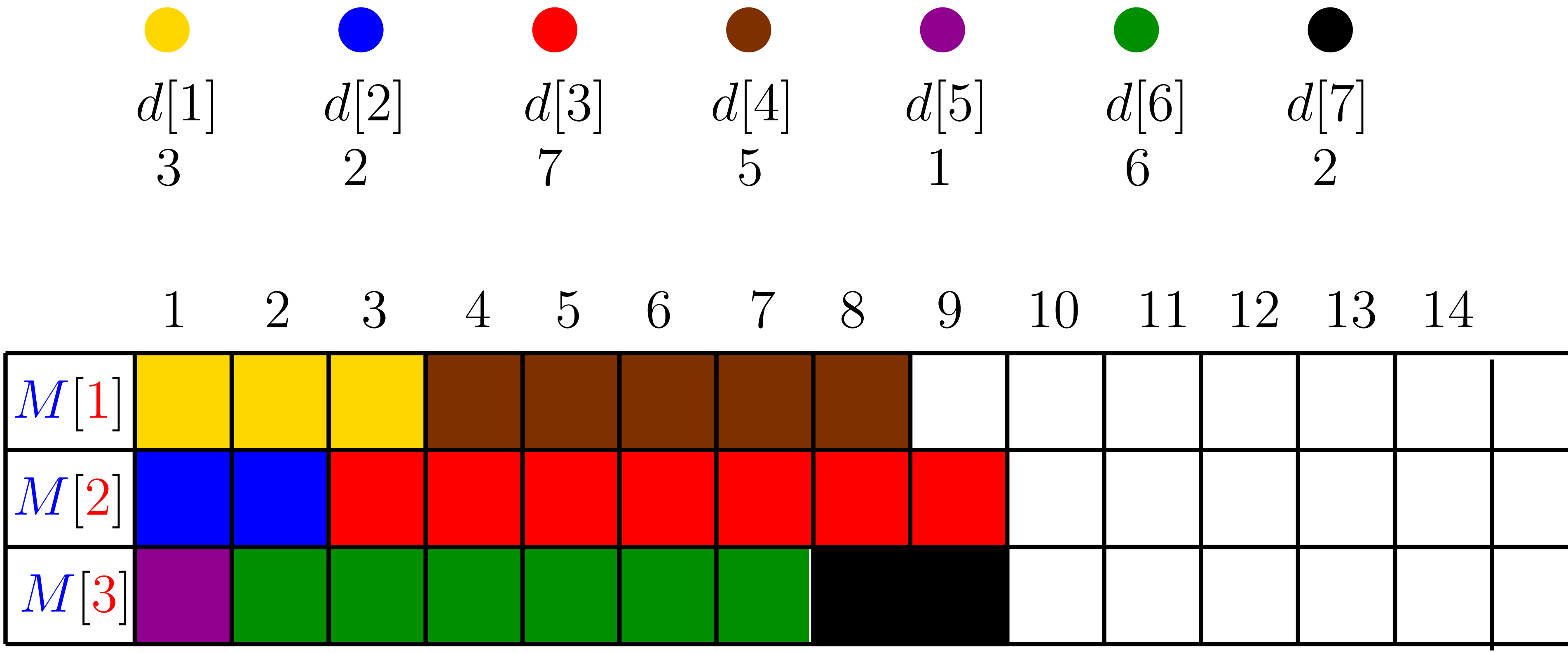
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2



$\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\} \Rightarrow$ Tempo de conclusão $= 12$

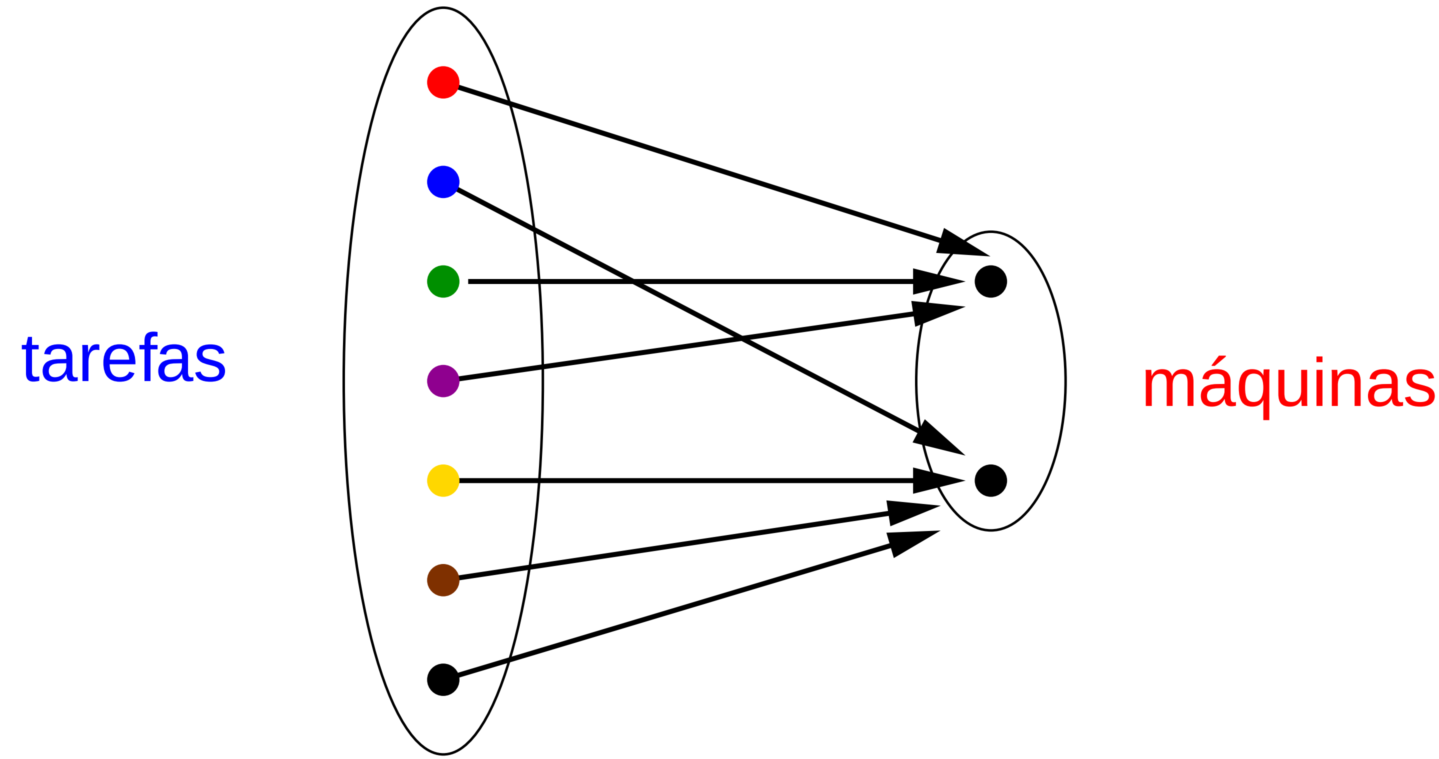
Problema

Encontrar um escalonamento com tempo de conclusão mínimo.



$\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6,7\}\} \Rightarrow$ Tempo de conclusão $= 9$

NP-difícil mesmo para $m = 2$



Algoritmo: testa todo $M[1] \subseteq \{1, \ldots, t\}$ e escolhe melhor

2^t subconjuntos $\Rightarrow$ exponencial

NP-difícil $\Rightarrow$ é improvável que exista algoritmo polinomial que resolva o problema (se exitir, P $=$ NP)

Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

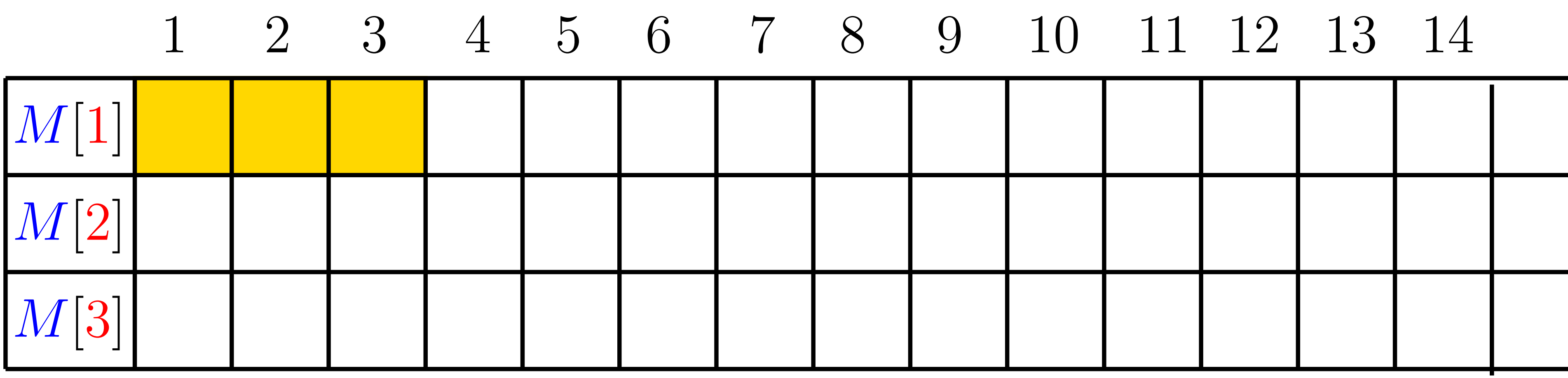
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$M[1]$														
$M[2]$														
$M[3]$														

Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

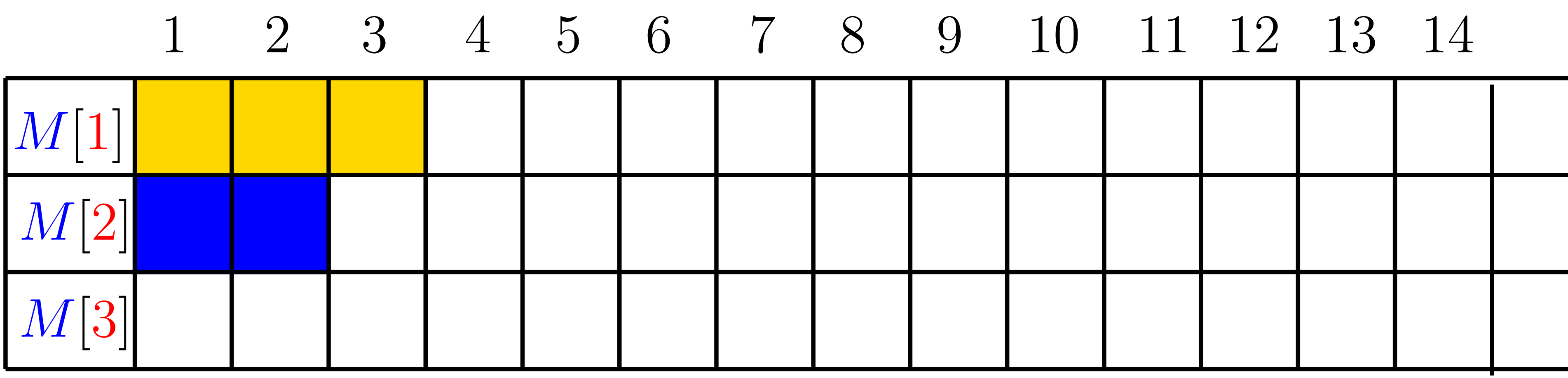
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2



Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

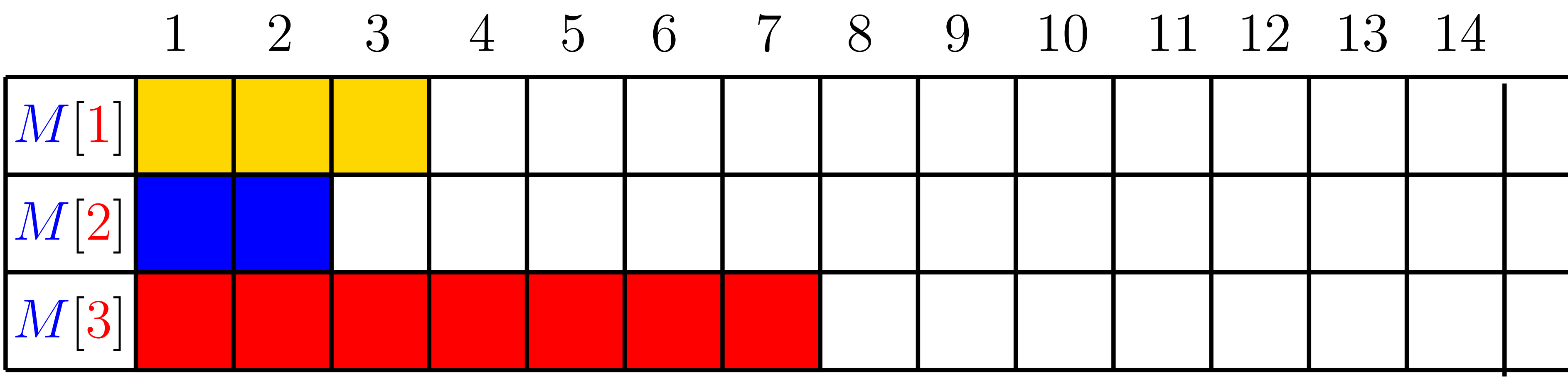
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2



Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

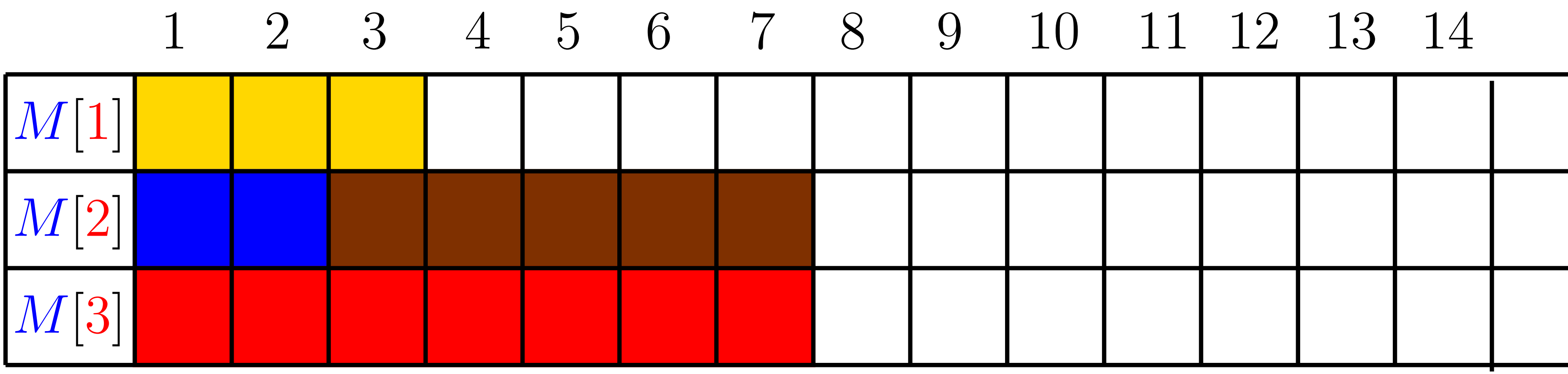
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2



Algoritmo de Graham

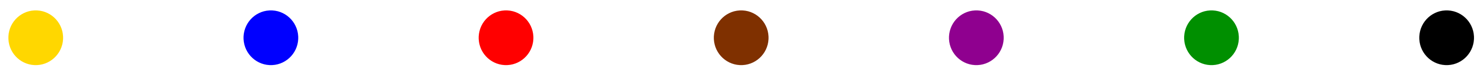
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2

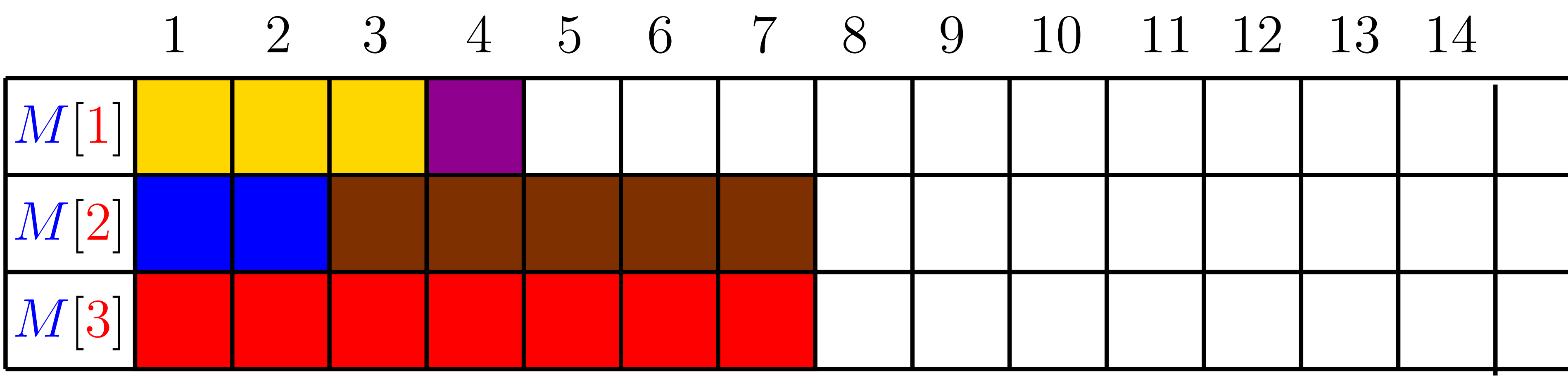


Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.



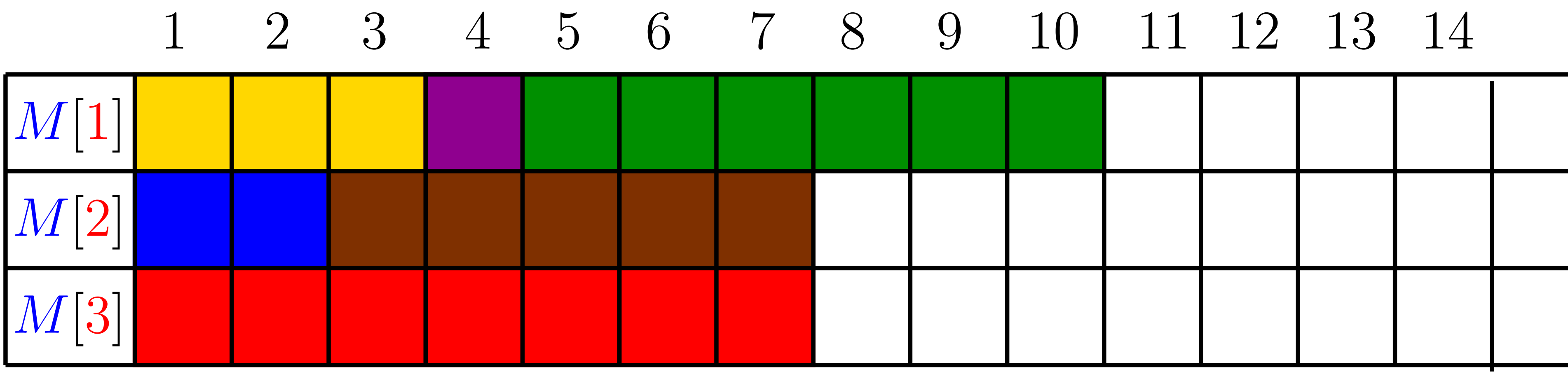
$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2



Algoritmo de Graham

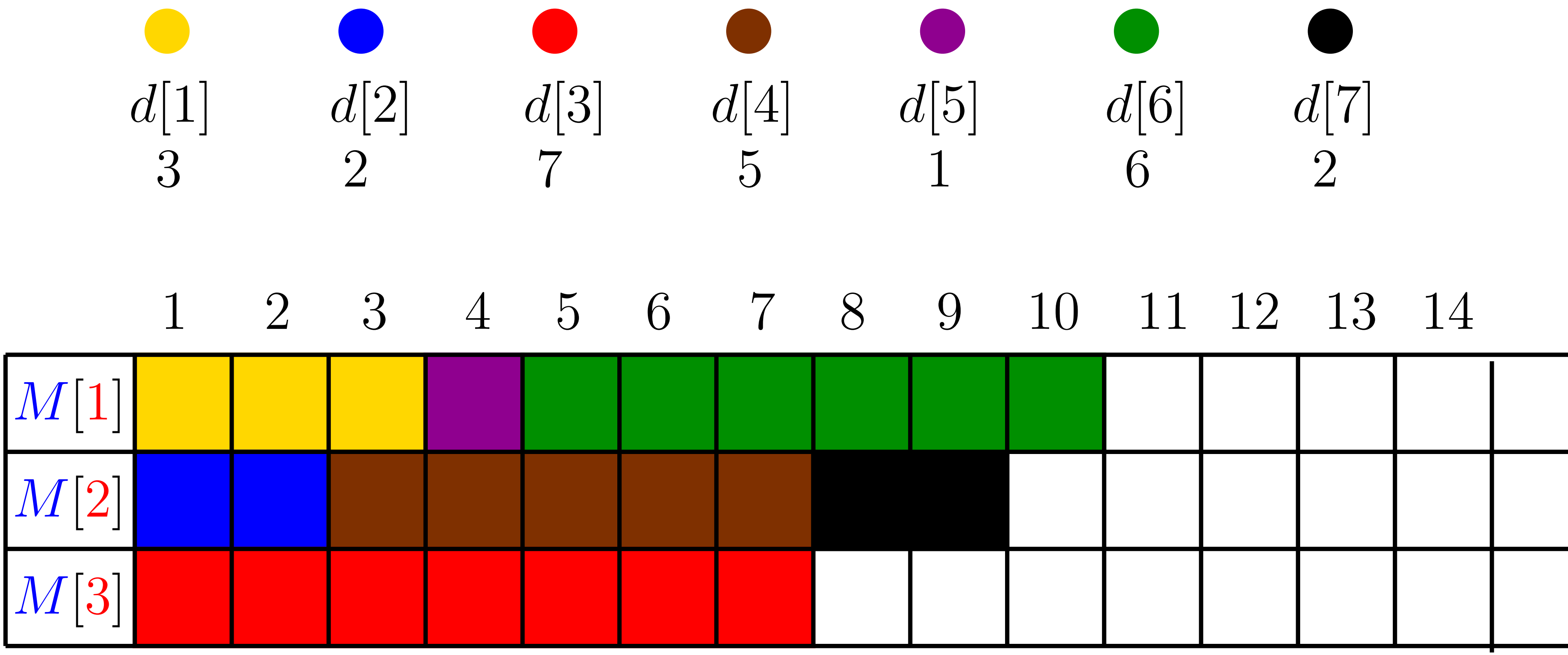
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
3	2	7	5	1	6	2



Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.



Escalonamento-Graham

Recebe números inteiros positivos m e t e um vetor $d[1\,..\,t]$ e devolve um escalomento de $\{1,\ldots,t\}$ em m máquinas.

ESCALONAMENTO-GRAHAM (m, t, d)

para $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**
  $M[j] \leftarrow \emptyset$
  $T[j] \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** t **faça**
  seja k tal que $T[k]$ é mínimo
  $M[k] \leftarrow M[k] \cup \{i\}$
  $T[k] \leftarrow T[k] + d[i]$
devolva $\{M[1], \ldots, M[m]\}$

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(m)$
2	$\Theta(m)$
3	$\Theta(m)$
4	$\Theta(t)$
5	$\Theta(mt)$
6	$\Theta(t)$
7	$\Theta(t)$
8	$\Theta(t)$
total	$3\Theta(m) + \Theta(mt) + 3\Theta(t) = \Theta(mt)$

Escalonamento-Graham

Se utilizarmos uma fila com prioridades (min-heap) para representar as m máquinas onde a prioridade da máquina i é $T[i]$ teremos:

ESCALONAMENTO-GRAHAM (m, t, d)

```
para j ← 1 até m faça
        M[j] ← ∅
        T[j] ← 0
BUILD-MIN-HEAP (T, m)
para i ← 1 até t faça
        k ← HEAP-MIN (T, m)
        M[k] ← M[k] ∪ {i}
        HEAP-INCREASE-KEY (T, k, T[k] + d[i])
devolva {M[1], . . . , M[m]}
```

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-4	$\Theta(m)$
5	$\Theta(t)$
6	$\Theta(t)$
7	$\Theta(t)$
8	$\mathrm{O}(t \lg m)$
9	$\Theta(t)$
total	$\Theta(m) + 4\Theta(t) + \mathrm{O}(t \lg m) = \mathrm{O}(m + t \lg m)$

O consumo de tempo do algoritmo ESCALONAMENTO-GRAHAM é $\mathrm{O}(m + t \lg m)$.

Delimitações para OPT

$\mathrm{OPT} =$ menor tempo de conclusão de um escalonamento

- Duração da tarefa mais longa:

$$\mathrm{OPT} \geq \max\{d[1], d[2], \ldots, d[t]\}$$

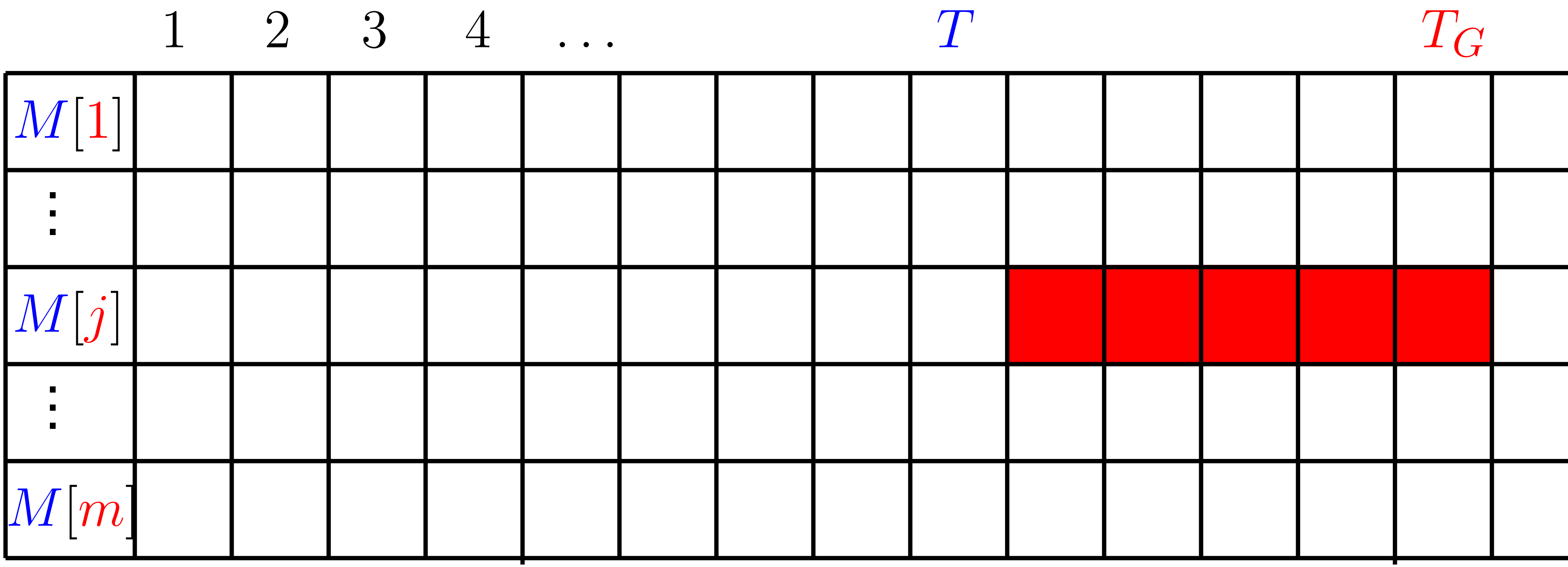
- Distribuição balanceada:

$$\mathrm{OPT} \geq \frac{d[1] + d[2] + \cdots + d[t]}{m}$$

Fator de aproximação

tarefa t é executada na máquina j a partir do instante T

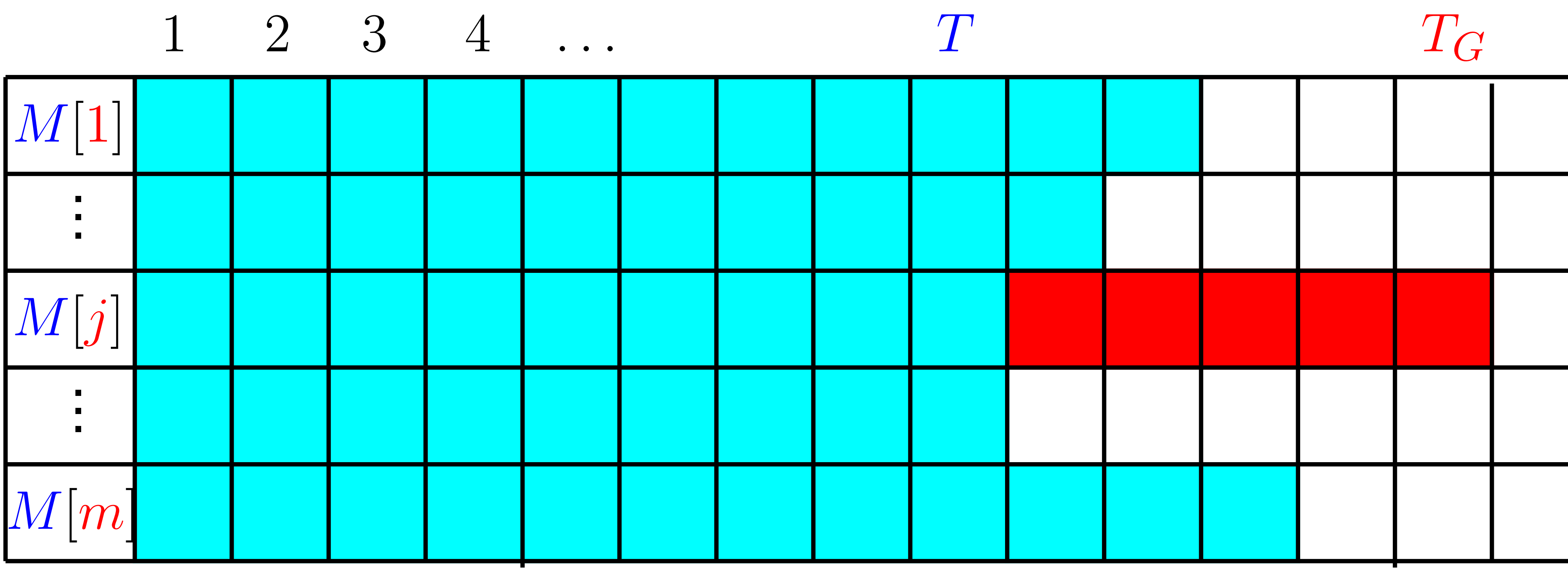
$T_G =$ conclusão do escalonamento obtido pelo algoritmo



Fator de aproximação (cont.)

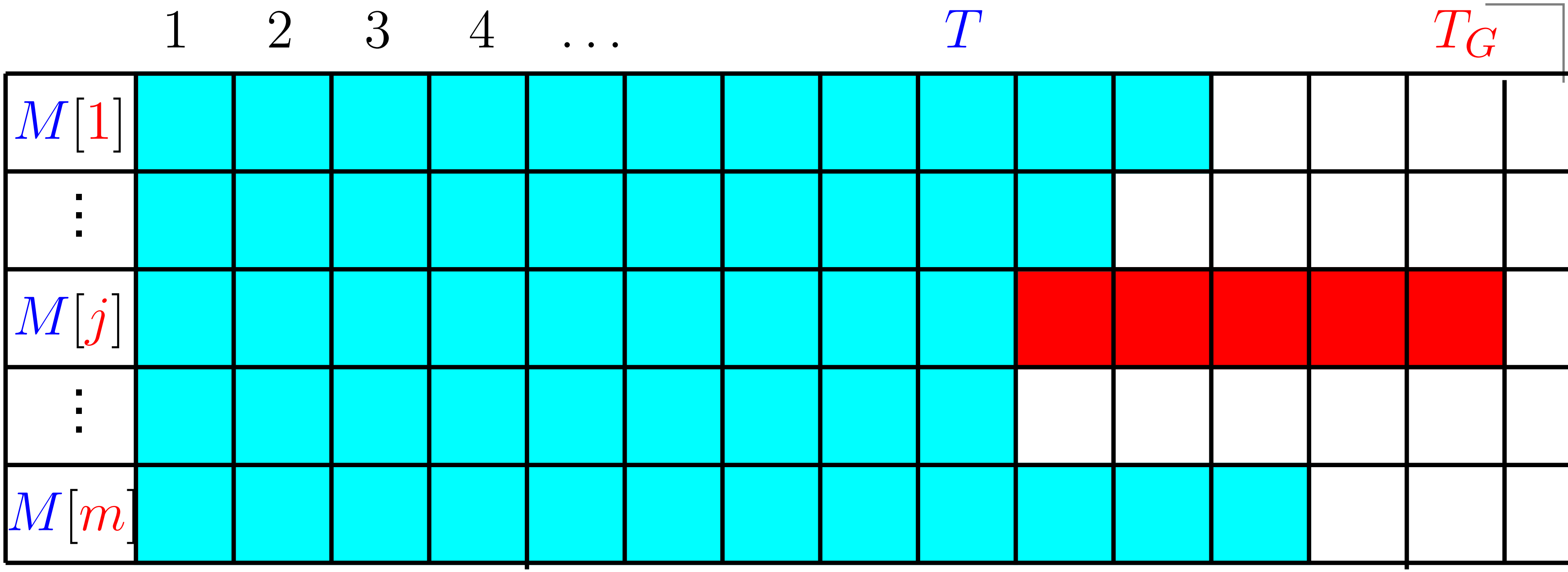
tarefa t é executada na máquina j a partir do instante T

$T_G =$ conclusão do escalonamento obtido pelo algoritmo



$$T \cdot m \leq d[1] + \cdots + d[t] \quad \Rightarrow \quad T \leq \frac{d[1] + \cdots + d[t]}{m}$$

Fator de aproximação (cont.)



$$
\begin{aligned}
T_G &= T + d[t] \\
&\le \frac{d[1] + \cdots + d[t]}{m} + d[t] \\
&\le \frac{d[1] + \cdots + d[t]}{m} + \max\{d[1], \ldots, d[t]\} \\
&\le \mathrm{OPT} + \mathrm{OPT} = 2\,\mathrm{OPT}
\end{aligned}
$$

Algoritmos de aproximação

Algoritmo ALG é de aproximação se existe $\alpha > 0$ tal que

$$\text{valor de ALG}(I) \le \alpha \cdot \mathrm{OPT}(I)$$

para toda instância I do problema.

α é o fator de aproximação

Objetivo: α tão perto de 1 quanto possível

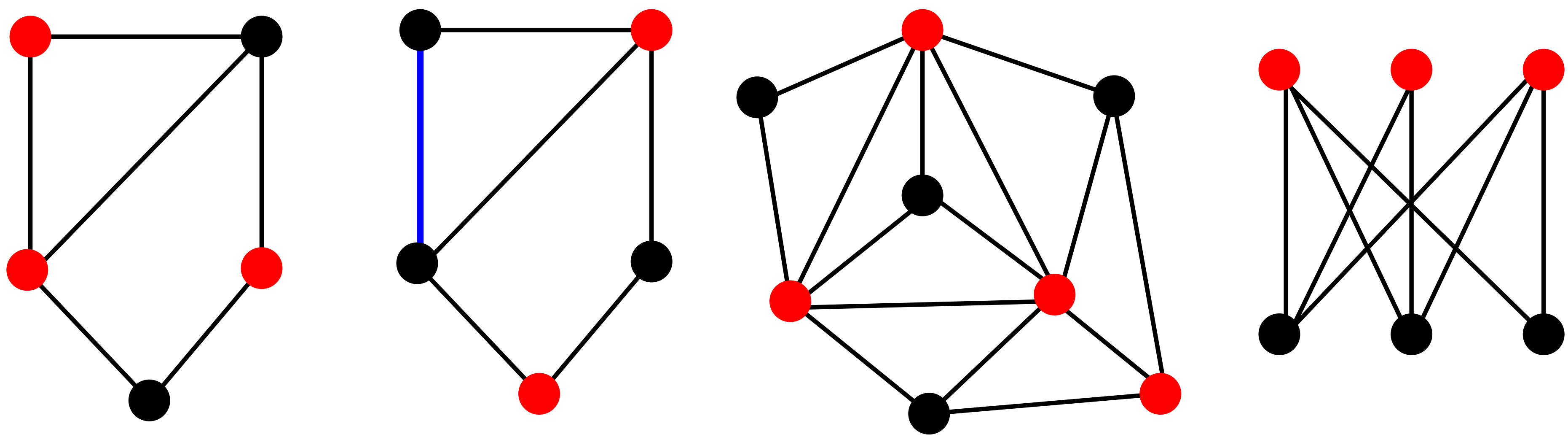
Conclusão

O algoritmo ESCALONAMENTO-GRAHAM é uma 2-aproximação polinomial.

Cobertura por vértices

Um conjunto de vértices C é uma cobertura por vértices de G se cada aresta tem pelo menos uma ponta em C

Exemplos:



não é

Cobertura por vértices

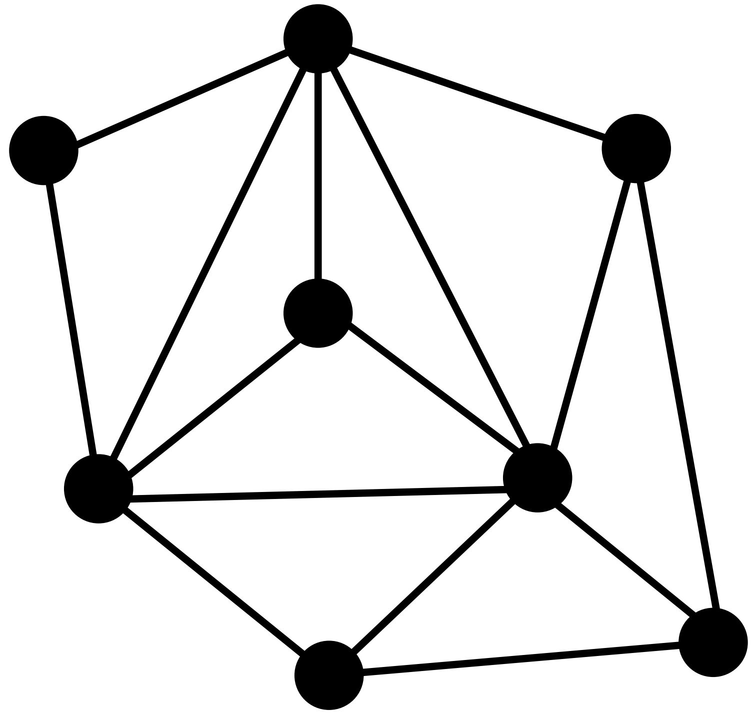
Problema: Dado um grafo G, encontrar um cobertura mínima.

Problema é NP-difícil.

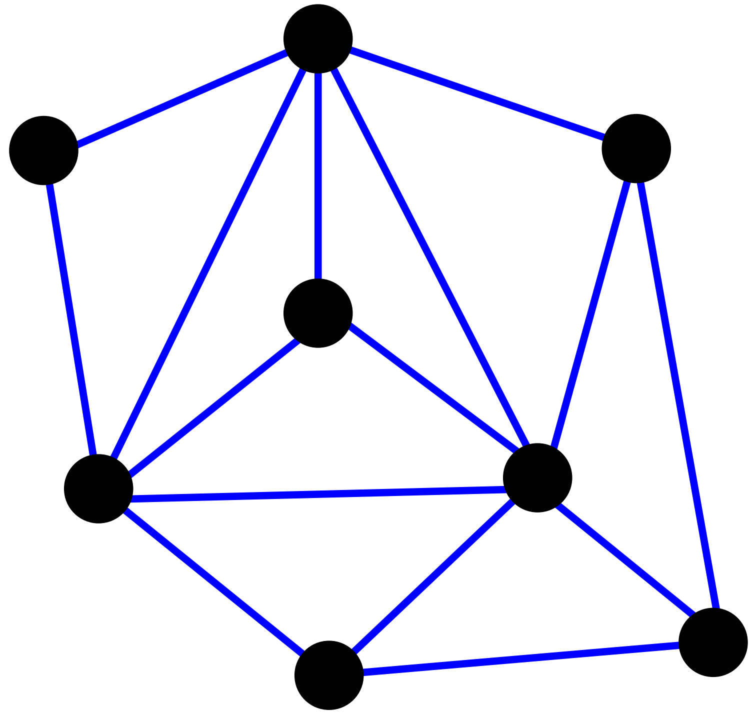
APPROX-VERTEX-COVER (G)

```
C ← ∅
E ← {arestas de G}
enquanto E ≠ ∅ faça
      seja (u, v) uma aresta qualquer em E
      C ← C ∪ {u, v}
      E ← E − {arestas incidentes a u ou v}
devolva C
```

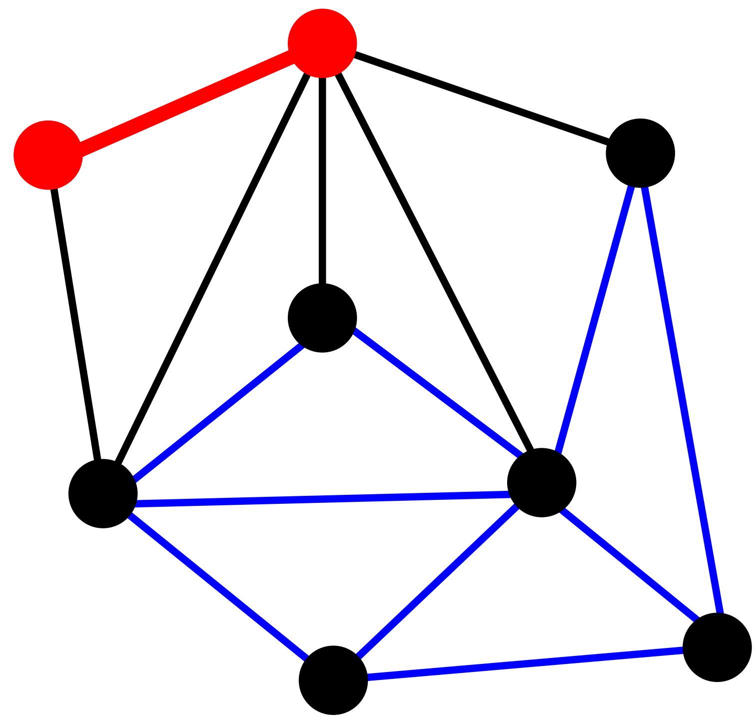
Exemplo



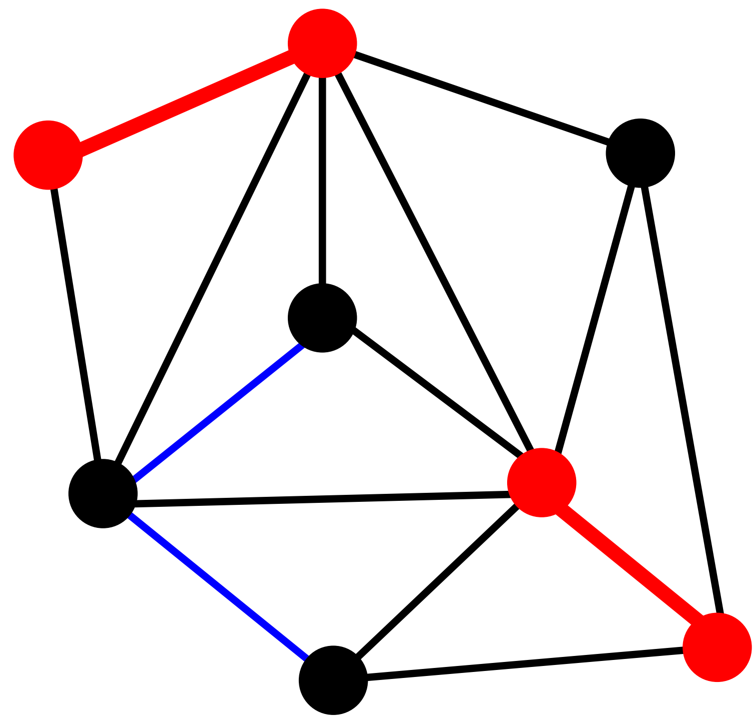
Exemplo



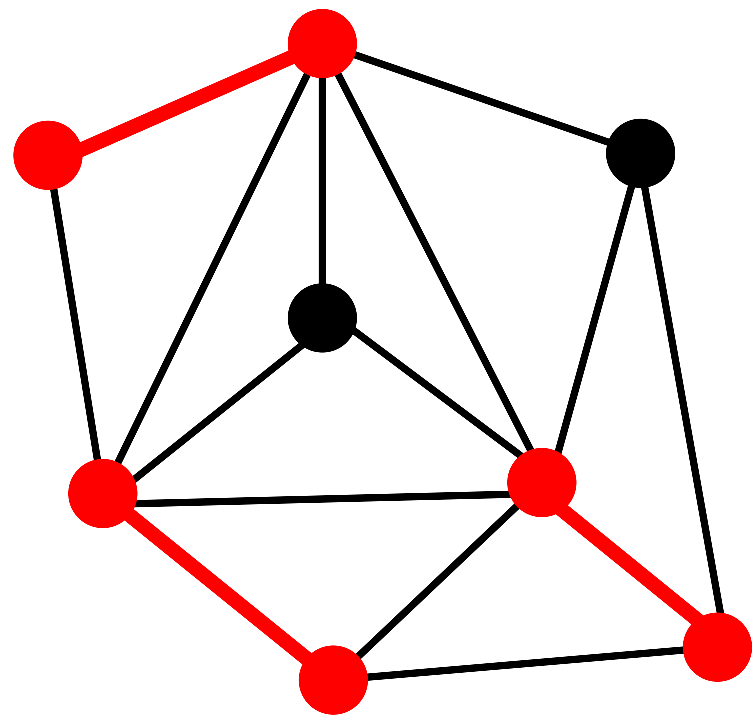
Exemplo



Exemplo



Exemplo

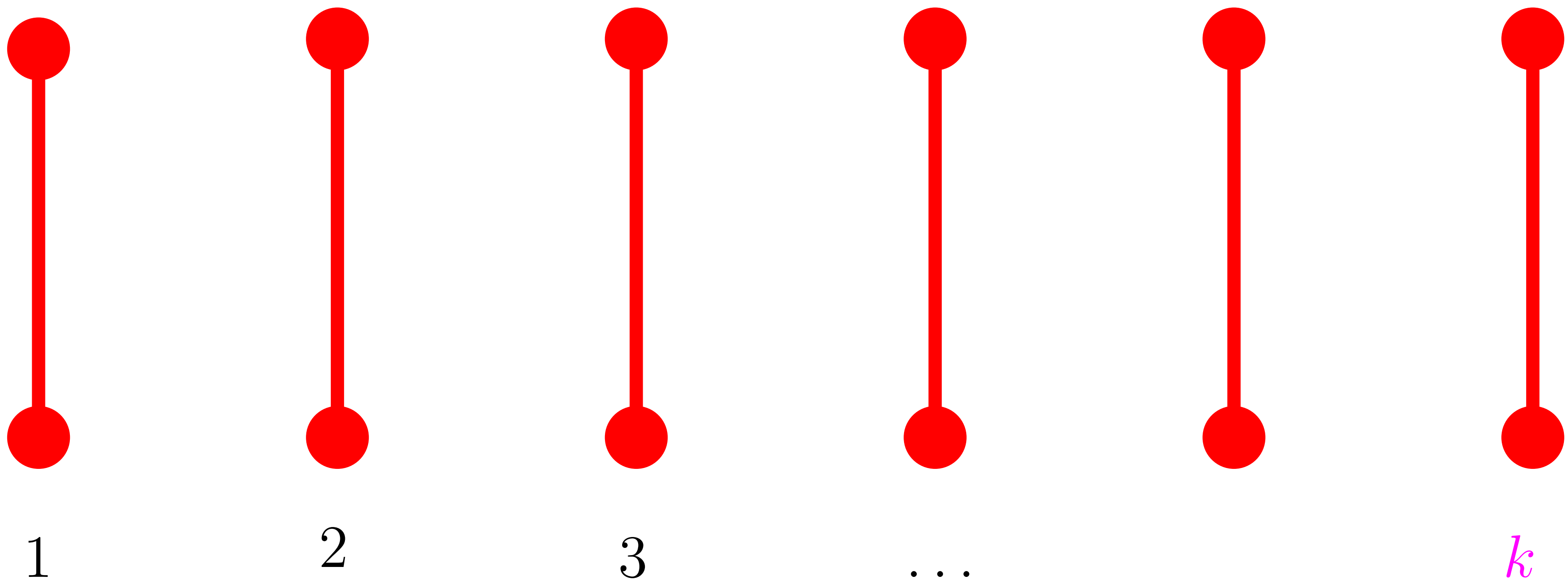


Consumo de tempo

E representado através de listas de adjacência.
$n =$ número de vértices
$m =$ número de arestas

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(n+m)$
3	$\mathrm{O}(m)$
4	$\mathrm{O}(m)$
5	$\mathrm{O}(n)$
6	$\mathrm{O}(m)$
7	$\mathrm{O}(n)$
total	$\Theta(1) + \Theta(n+m) + 3\mathrm{O}(m) + 2\mathrm{O}(n) = \Theta(n+m)$

Delimitações para OPT

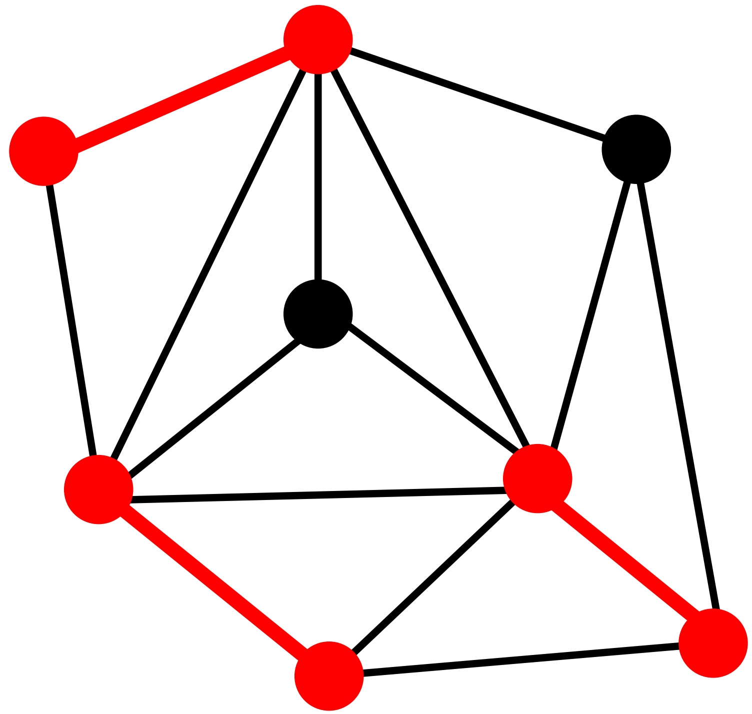


Se G possui um emparelhamento com k arestas, então

$$\mathrm{OPT} \geq k.$$

$\mathrm{OPT} =$ número mínimo de vértices de uma cobertura por vértices

Fatar de aproximação



$C =$ cobertura devolvida pelo algoritmo.
G possui um emparelamento com $|C|/2$ arestas.
Logo,

$$\frac{|C|}{2} \leq \mathrm{OPT} \quad \Rightarrow \quad |C| \leq 2\,\mathrm{OPT}.$$

Conclusão

O algoritmo APPROX-VERTEX-COVER é uma 2-aproximação polinomial.