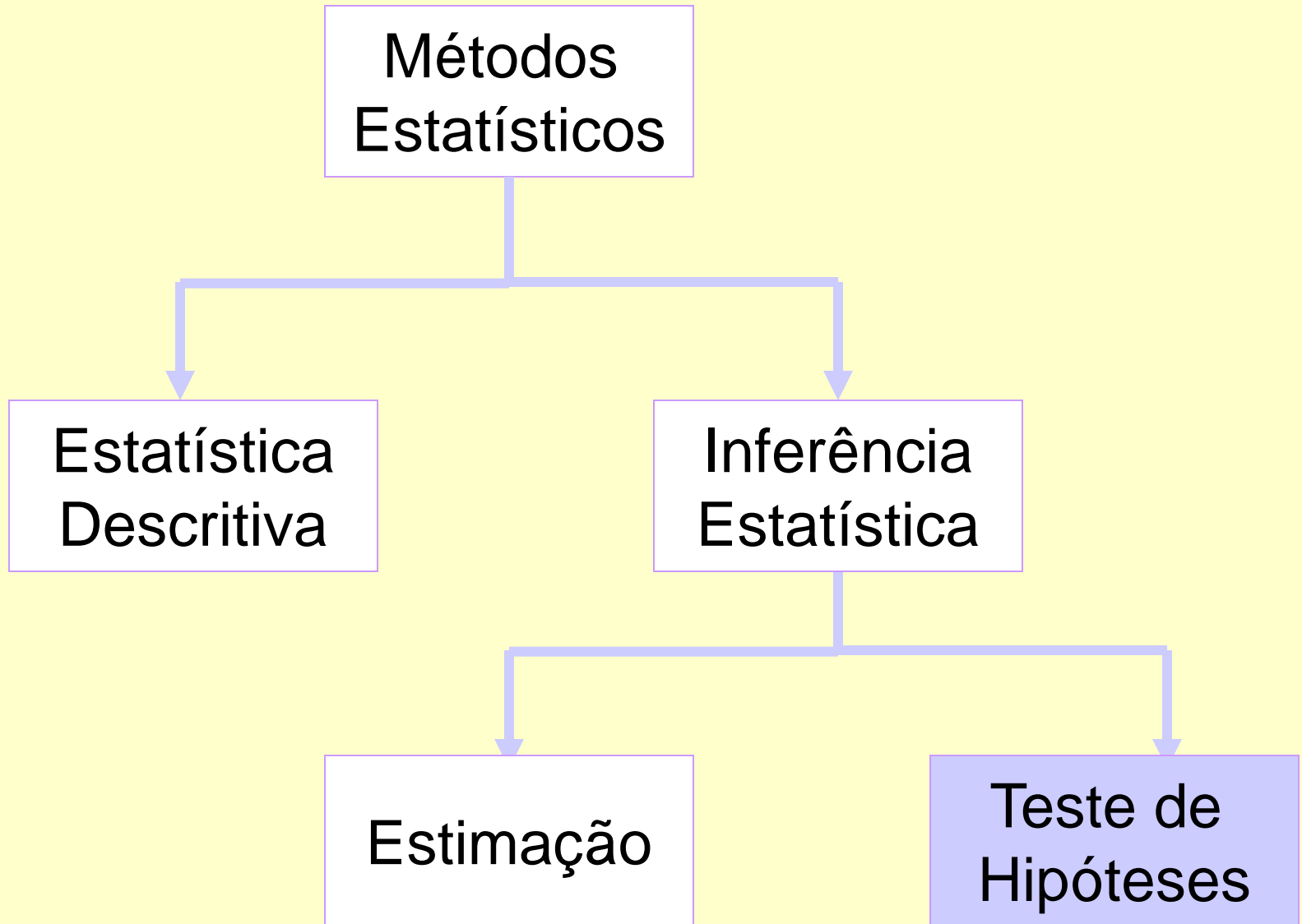


# NOÇÕES DE TESTE DE HIPÓTESES (I)

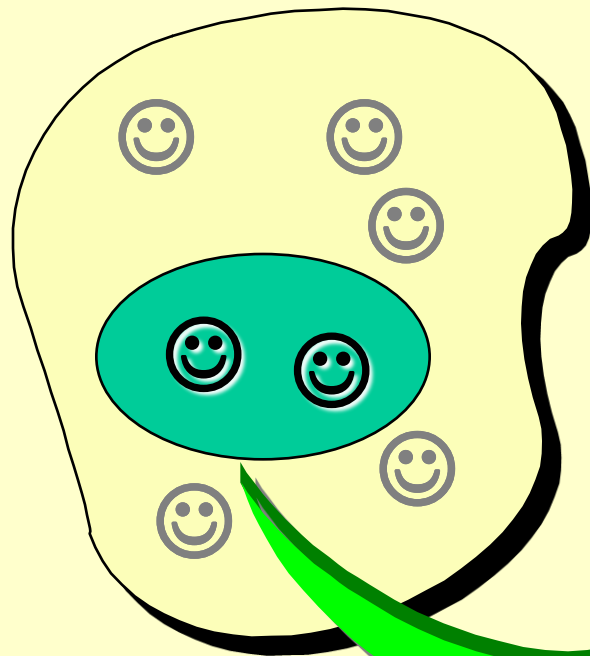
**Teste de hipóteses para a  
proporção populacional**

# Métodos Estatísticos



# TESTE DE HIPÓTESES

População



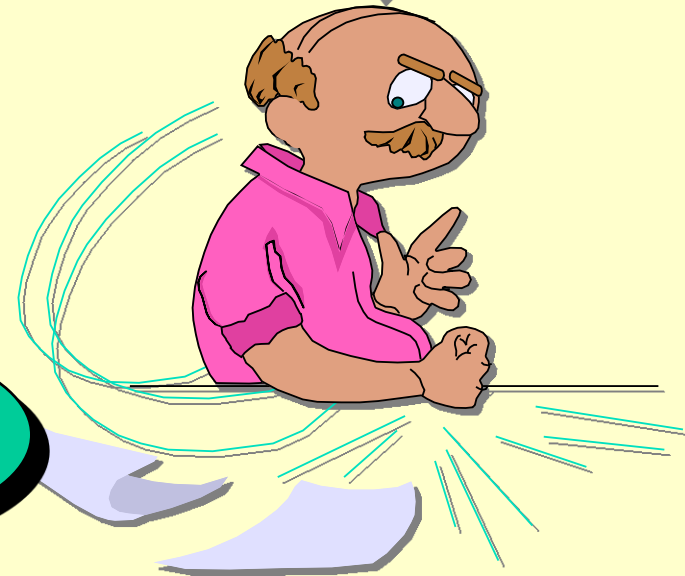
Eu acredito que  
30% da população  
é careca.

Não está  
nem perto.  
Rejeito a  
hipótese.

Amostra  
Aleatória

Proporção

$$\hat{p} = 0.05$$



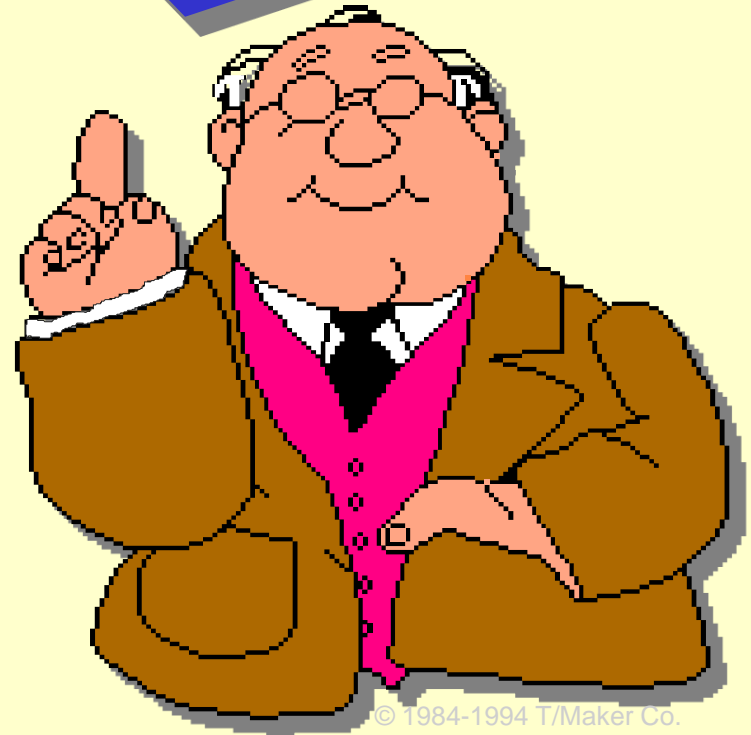
# O que é uma hipótese?

- É uma conjectura sobre um parâmetro populacional.

Por exemplo, a proporção  $p$  é um parâmetro populacional.

- A hipótese deve ser estabelecida antes da análise.

Eu acredito que a proporção de pessoas com dengue neste ano no Rio de Janeiro com idade entre 15 e 49 anos é de 45%.



# Estimação

Qual é a probabilidade de “cara” no lançamento de uma moeda?

Qual é a proporção de votos que o candidato A terá na próxima eleição?

Qual é a proporção de motoristas habilitados de SP que tiveram suas carteiras apreendidas após a vigência da nova lei de trânsito?

# Teste de Hipóteses

A moeda é honesta ou é desequilibrada?

O candidato A vencerá a eleição?

A proporção dos motoristas habilitados de SP que tiveram suas carteiras apreendidas após a nova lei é maior que 2% ou não?

# Introdução

Em **estimação**, o objetivo é “estimar” o valor desconhecido de um parâmetro, por exemplo, a proporção  $p$  de “indivíduos” em uma população com determinada característica.

A estimativa é baseada no número  $x$  de “indivíduos” com a característica numa amostra aleatória de tamanho  $n$ .

Entretanto, se o objetivo for saber se o valor observado  $x$  nessa amostra dá ou não suporte a uma conjectura sobre o valor de  $p$ , trata-se de um **teste de hipóteses**.

**Exemplo 1:** Queremos avaliar se uma moeda é honesta.

Ou seja, queremos testar a

**hipótese nula  $H$ : a moeda é honesta**

contra a

**hipótese alternativa  $A$ : a moeda não é honesta.**

Em linguagem estatística, essas hipóteses podem ser reescritas como:

$$H: p = 0,5$$

$$A: p \neq 0,5$$

com  $p$  a probabilidade de “cara” da moeda.

# Hipóteses

De maneira geral, uma **hipótese estatística** é uma afirmação ou conjectura sobre um parâmetro da distribuição de probabilidades de uma variável aleatória.

No caso especial de teste de hipóteses sobre a proporção populacional  $p$ , temos:

**Hipótese nula:** afirmação sobre  $p$  geralmente relacionada a um valor de referência, ou a uma especificação padrão ou histórica.

**Hipótese alternativa:** afirmação sobre  $p$  que suspeitamos ser verdadeira.



No nosso exemplo, o parâmetro é a probabilidade  $p$  de sair “cara”.

Se consideramos 12 lançamentos independentes da moeda e denotamos por  $X$  o número de caras obtidas nesses lançamentos, então

$$X \sim \text{binomial}(12; p).$$

Note que o número de lançamentos está fixado ( $n=12$ ), portanto fazer conjecturas sobre  $p$  é similar a fazer conjecturas sobre o número esperado de sucessos (esperança de  $X$ ).

Se observarmos 5 caras em 12 lançamentos independentes da moeda, o que podemos concluir?

E se observarmos 4 caras? Ou 10 caras?

Podemos considerar uma **regra de decisão**, por exemplo,

“Se nos 12 lançamentos da moeda, observarmos 0, 1, 2, 3, 9, 10, 11 ou 12 caras, então rejeitamos a hipótese nula  $H$  de que a moeda é honesta.

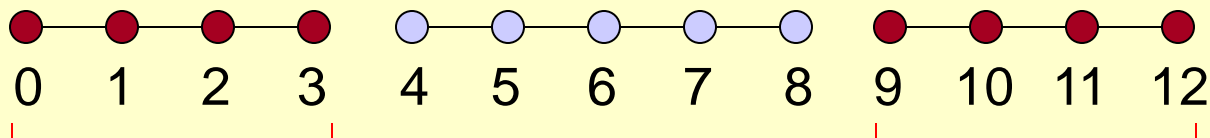
Caso contrário, não rejeitamos a hipótese  $H$ .”

Testar uma hipótese estatística é estabelecer uma **regra** que nos permita, com base na informação de uma amostra, **decidir pela rejeição ou não de  $H$** .

No exemplo, segundo a regra de decisão, o conjunto de valores de  $X$  que levam à rejeição da hipótese nula  $H$  é  $\{0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12\}$ .

Denominamos esse conjunto **região crítica (RC)** ou **região de rejeição de  $H$** .

**$RC = \{0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12\}$  : região de rejeição**

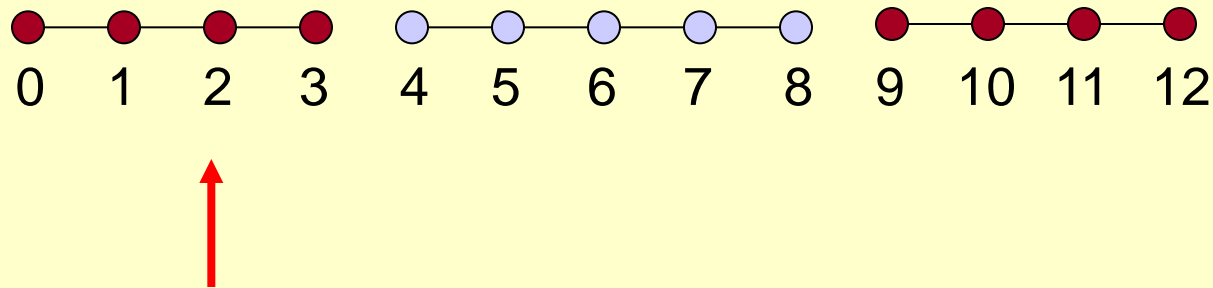


**$RC^c = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  : região de não rejeição de  $H$**

# Regra de decisão (teste)

Seja  $x$  o valor observado da variável aleatória  $X$ .

No exemplo, suponha que observamos 2 caras, isto é,  $x = 2$ .



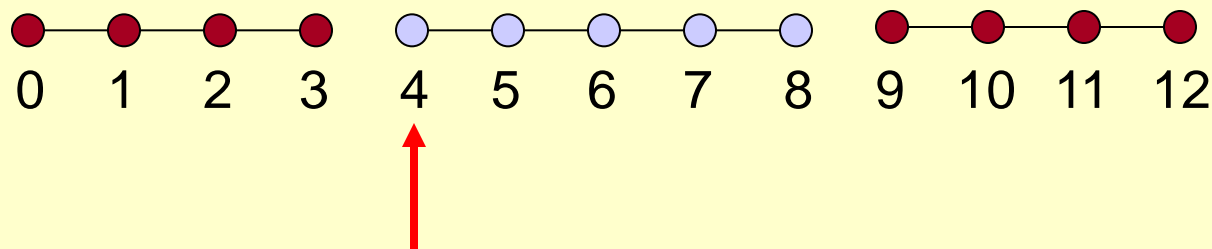
Valor observado na amostra

$x \in \text{RC} \Rightarrow$  **rejeitamos  $H$ .**

*Será que a nossa conclusão está correta?*

## Regra de decisão (teste)

Agora suponha que observamos 4 caras, isto é,  $x = 4$ .



Valor observado na amostra

Como  $x \notin \text{RC} \Rightarrow$  **não rejeitamos  $H$**  (não temos evidência suficiente de que a moeda seja desequilibrada).

*Será que a nossa conclusão está correta?*

## Regra de decisão (teste)

$x \in \text{RC} \Rightarrow$  rejeitamos  $H$

$x \notin \text{RC} \Rightarrow$  não rejeitamos  $H$

Ao decidir pela rejeição ou não da hipótese nula  $H$ , podemos cometer *dois tipos de erro*.

# Erros

**Erro tipo I:** Rejeitar  $H$  quando  $H$  é verdadeira.

(Afirmar que a moeda não é honesta quando na verdade ela é).

**Erro tipo II:** Não rejeitar  $H$  quando  $H$  é falsa.

(Afirmar que a moeda é honesta quando na verdade ela é desequilibrada).

## **Exemplo:** Uma pessoa está sendo julgada.

Como pela lei uma pessoa é inocente até que se prove o contrário, as hipóteses são:

*H: A pessoa é inocente.*

*A: A pessoa é culpada.*

- Erro I: A pessoa é condenada apesar de ser inocente.
- Erro II: A pessoa é absolvida apesar de ser culpada.
- Naturalmente, a Justiça procura reduzir a possibilidade de ocorrer o Erro I, pois entende-se que é mais grave condenar inocentes do que absolver criminosos.



# Probabilidades de erros

$P(\text{erro I}) = P(\text{rejeitar } H \mid H \text{ é verdadeira}) = \alpha$

$\alpha$  : nível de significância do teste

$P(\text{erro II}) = P(\text{não rejeitar } H \mid H \text{ é falsa}) = \beta$

$1 - \beta$  : poder do teste

Observações:

- $\alpha$  e  $\beta$  têm uma relação inversa.
- Em geral, só podemos controlar um dos erros (fixando sua probabilidade de ocorrência).

No exemplo da moeda:

$$H: p = 0,5$$
$$A: p \neq 0,5$$

$X \sim \text{binomial}(12; p)$

$$\text{RC} = \{0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12\}$$

$$\alpha = P(\text{erro I}) = P(\text{rejeitar } H \mid H \text{ verdadeira})$$

$$= P(X \in \text{RC} \mid p = 0,5)$$

$$= P(X=0 \mid p=0,5) + \dots + P(X=3 \mid p=0,5) + P(X=9 \mid p=0,5) +$$

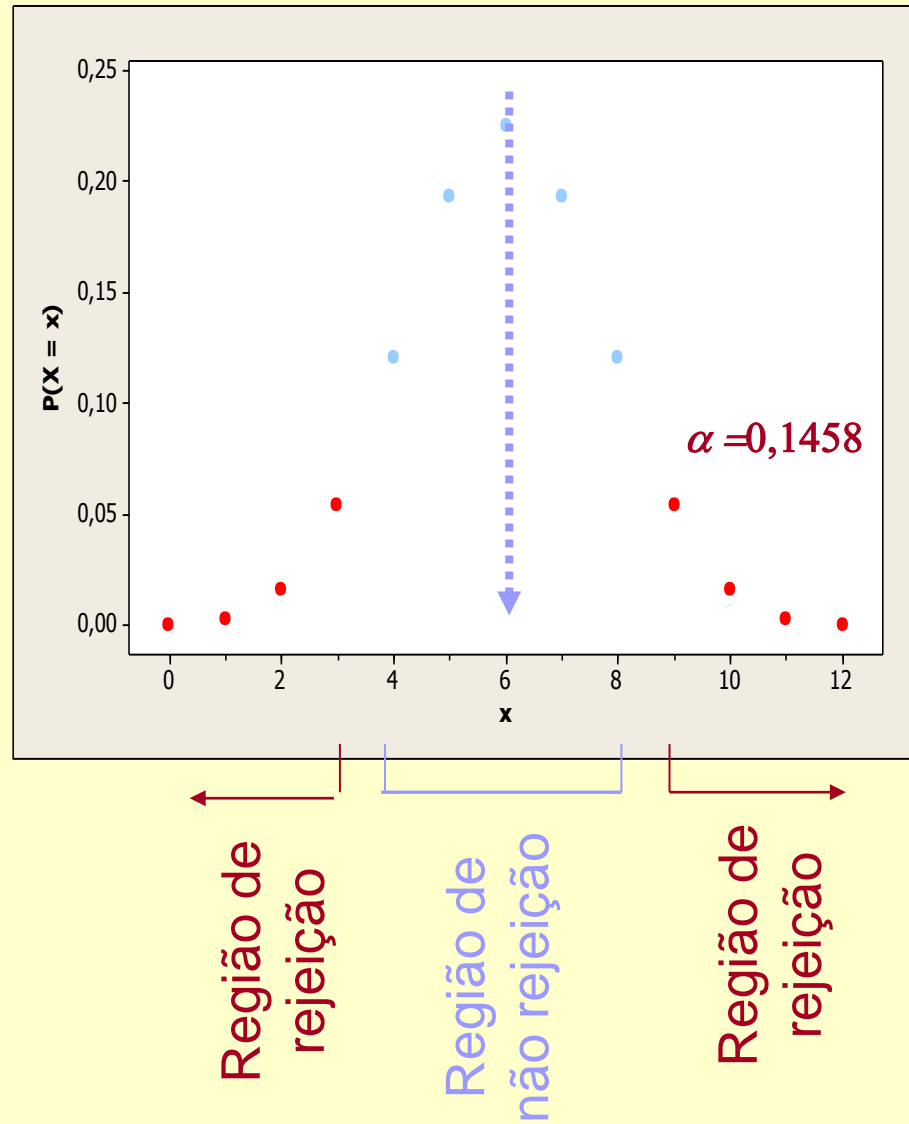
$$\dots + P(X=12 \mid p=0,5) \quad \Rightarrow$$

$$= 0,0002 + 0,0029 + 0,0161 + 0,0537 + 0,0537 +$$

$$0,0161 + 0,0029 + 0,0002$$

$$= \mathbf{0,1458}$$

# Valor de $E(X)$ sob $H$



Decisão	Verdadeiro valor de $p$	
	$p = 0,5$ ( $H$ é verd.)	$p \neq 0,5$ ( $A$ é verd.)
Não rejeitar $H$	Decisão correta $1 - \alpha = 0,8542$	<b>Erro II</b> $\beta$
Rejeitar $H$	<b>Erro I</b> $\alpha = 0,1458$	Decisão correta $1 - \beta$

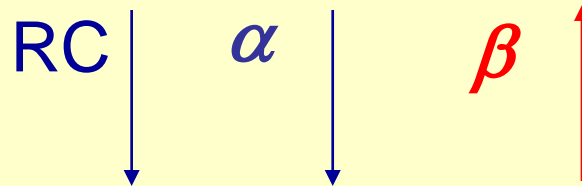
Se alterarmos a regra de decisão para  $\mathbf{RC} = \{0, 1, 2, 10, 11, 12\}$ , isto é, concluiremos que a moeda é desonesta se o número de caras for 0, 1, 2, 10, 11 ou 12, o que acontece com o nível de significância  $\alpha$  do teste (probabilidade de erro tipo I)?

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{erro I}) = P(\text{rejeitar } H \mid H \text{ verdadeira}) = P(X \in \mathbf{RC} \mid p = 0,5) \\ &= P(X=0 \mid p=0,5) + \dots + P(X=2 \mid p=0,5) + P(X=10 \mid p=0,5) + \\ &\quad \dots + P(X=12 \mid p=0,5) \quad \Rightarrow \\ &= 0,0002 + 0,0029 + 0,0161 + 0,0161 + 0,0029 + 0,0002 \\ &= \mathbf{0,0384}\end{aligned}$$

# Regiões críticas e níveis de significância $\alpha$

## (Exemplo 1: Moeda)

RC	$\alpha$
{0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12}	0,1458
{0, 1, 2, 10, 11, 12}	0,0384
{0, 1, 11, 12}	0,0063



Até agora, o procedimento foi  
**escolher RC  $\Rightarrow$  determinar  $\alpha$ .**

Alternativamente, podemos  
**fixar  $\alpha \Rightarrow$  determinar RC.**

Os valores de nível de significância  $\alpha$   
usualmente adotados estão entre 1% e 10%.

# Determinação da região crítica

**Exemplo 2:** Suponha que um medicamento existente no mercado produza o efeito desejado em 60% dos casos nos quais é aplicado.

Um laboratório produz um **novo medicamento** e afirma que ele é melhor do que o existente.

**Objetivo:** Verificar estatisticamente se é verdadeira a afirmação do laboratório.

Aplicou-se o medicamento em  $n = 10$  pacientes.



Seja  $X$  o número de pacientes, dentre os 10, para os quais o novo medicamento produz o efeito desejado.

Temos que:

$$X \sim b(10; p),$$

onde  $p$  é a proporção de pacientes para os quais o novo medicamento é eficaz.

(1) Hipóteses estatísticas:

$$H: p = 0,6$$

$$A: p > 0,6$$

que correspondem a

$H$ : O novo medicamento é similar ao existente.

$A$ : O novo medicamento é melhor (mais efetivo).

(2) Fixemos o nível de significância em 5% ( $\alpha = 0,05$ ).

(3) A região crítica deve ter a forma:

$$\mathbf{RC} = \{ X \geq k \}$$

O valor de  $k$  deve ser tal que

$$P(\mathbf{erro I}) = P(X \in \mathbf{RC} \mid p = 0,6) = P(X \geq k \mid p = 0,6) = \alpha$$

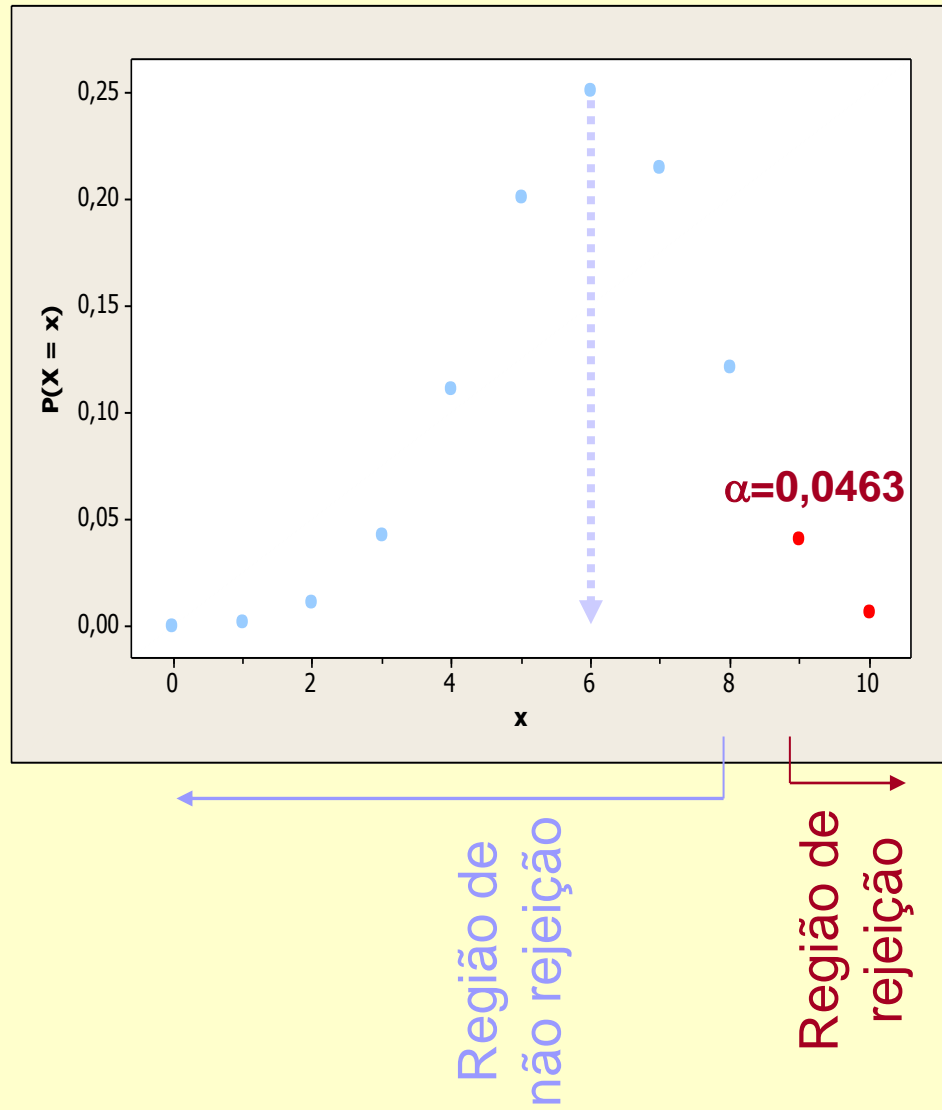
Pela tabela da **binomial** (10; 0,6),  $\Rightarrow$

$$\text{para } k = 9: P(X \geq 9) = 0,0463$$

$$\text{para } k = 8: P(X \geq 8) = 0,1672$$

Portanto,  $\mathbf{RC} = \{X \geq 9\}$ , que garante um nível de significância menor que 5% (na realidade,  $\alpha = 4,63\%$ ).

# Valor de $E(X)$ sob $H$



# Hipóteses alternativas bilaterais e unilaterais

No Exemplo 1 (da moeda), as hipóteses são

$$H: p = 0,5 \quad \text{e} \quad A: p \neq 0,5.$$

Dizemos que a hipótese alternativa é **bilateral** (queremos detectar desvios em torno de  $p = 0,5$  em qualquer direção).

# Hipóteses alternativas bilaterais e unilaterais

No Exemplo 2, as hipóteses são

$$H: p = 0,6 \quad \text{e} \quad A: p > 0,6$$

isto é, desejamos detectar desvios em  $p$  em apenas uma direção (desvios à direita de 0,6).

Nesse caso, a hipótese alternativa é **unilateral**.

**Exemplo 3:** A proporção de analfabetos em um município era de **15%** na gestão anterior.

No início da sua gestão, o prefeito atual implantou um programa de alfabetização e após 2 anos afirma que **reduziu a proporção de analfabetos.**

Para verificar a afirmação do prefeito,  $n = 60$  cidadãos foram entrevistados.



Seja  $X$  o número de analfabetos entre os 60 cidadãos entrevistados.

Então:  $X \sim \mathbf{b}(60; p)$ ,

sendo  $p$  a proporção atual de analfabetos no município (após o programa de alfabetização).

(1) As hipóteses de interesse são:

*H*: A proporção de analfabetos no município não se alterou  
(a afirmação do prefeito está incorreta).

*A*: A proporção de analfabetos no município diminuiu  
(a afirmação do prefeito está correta).

Equivalentemente,

$$H: p = 0,15$$

$$A: p < 0,15$$

(2) Vamos fixar  $\alpha = 5\%$ .



(3) A **região crítica** deve ter a forma:

$$\mathbf{RC} = \{ X \leq k \}$$

O valor de  $k$  deve ser tal que  $P(\text{erro I}) = \alpha$ , ou seja,

$$P(X \leq k \mid p = 0,15) = 0,05.$$

Pela tabela da **binomial**(60; 0,15),  $\Rightarrow$

$$\mathbf{RC} = \{ X \leq 4 \}.$$

Na realidade, temos  $\alpha = 0,0424$ .

(4) Buscar a **evidência na amostra** para concluir.

Se observamos 6 analfabetos entre os 60 entrevistados, qual a conclusão?

(5) **Decisão e conclusão:**

$6 \notin RC \Rightarrow$  Decidimos por não rejeitar  $H$   
ao nível de significância 4,24%.

Concluimos que não temos evidência suficiente para afirmar que a proporção de analfabetos (após o programa de alfabetização) é inferior a 15%, isto é, não há evidência suficiente de que a afirmação do prefeito seja correta.

# Resumo

(1) Estabelecer as **hipóteses**:

$H: p = p_0$  contra uma das alternativas

$A: p \neq p_0$ ,  $A: p > p_0$  ou  $A: p < p_0$ .

(2) Escolher um **nível de significância**  $\alpha$ .

(3) Determinar a **região crítica RC** da forma

$\{ X \leq k_1 \} \cup \{ X \geq k_2 \}$ ,  $\{ X \geq k \}$  ou  $\{ X \leq k \}$ ,

respectivamente às hipóteses alternativas.

(4) Selecionar uma **amostra aleatória** e determinar o número  $x$  de elementos na amostra com o atributo desejado.

(5) **Decidir**, usando a evidência  $x$ , ao nível de significância  $\alpha$ , e **concluir**.

$x \in \text{RC} \Rightarrow$  rejeitamos  $H$ .

$x \notin \text{RC} \Rightarrow$  não rejeitamos  $H$ .