VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
e
DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Característica
Variável
-Raça
-Peso
-Idade

Experimento
ou
Processo

Espaço
Amostral
Ω

Classificação:
Qualitativas
Quantitativas

Variáveis
Aleatórias
Funções
Números

-Probabilidades
-Distribuições

Conclusões
Inferência

Medidas

Variável Aleatória

Uma função X que associa a cada elemento ω do espaço amostral Ω um valor $x \in R$ é denominada uma ***variável aleatória***.

Experimento: jogar 1 dado duas vezes e observar o resultado
(P = par e I= impar)

X: número de vezes que saiu par em 2 lances do dado

$X = 0 \Leftrightarrow$ II
$X = 1 \Leftrightarrow$ IP ou PI
$X = 2 \Leftrightarrow$ PP

Variável Aleatória

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

Exemplos:

1) Observa-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino).

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}$$

ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6 ω_7 ω_8

Defina X: nº. de crianças do sexo masculino (M).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

→ Então X assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, logo é uma **variável aleatória discreta**.

SE o interesse específico é o número de meninOs, a discriminação entre, por exemplo, MFF,FMF,FFM torna-se algo desnecessário e que custa tempo e paciência.

Em tais situações a variável aleatória vai direto ao assunto, poupando tempo e paciência.

Tendo em mãos a função de probabilidade de uma variável aleatória, o espaço amostral original e a tranformação X podem ser esquecidos e removidos da análise.

Variável Aleatória

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**

Uma v.a. é discreta quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou infinito enumerável.

Exemplos:

1) No mesmo experimento...

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM),(FFF)\}$$

ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6 ω_7 ω_8

Podemos definir agora

$\boldsymbol{Y}$: nº. de crianças do sexo feminino (F).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
Y	0	1	1	1	2	2	2	3

$\rightarrow$ Então $\boldsymbol{Y}$ também assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, porém, para outros valores de Ω.

Exemplos:

2) Observar o tempo de vida, em horas, de lâmpadas produzidas por uma fábrica.

Defina T: tempo de vida, em horas, da lâmpada escolhida, ao acaso, da fábrica.

$\rightarrow$ Então, T é uma **variável aleatória contínua** que assume qualquer valor real não negativo.

Variável Aleatória

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **contínua**

Uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não enumerável.

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Caracterização

Função de probabilidade: É a função que atribui a **cada valor** x_i **da v. a. discreta** X sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função de probabilidade deve satisfazer:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Exemplo 1:

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.
Qual é a probabilidade da comissão ser formada por *pelo menos duas mulheres*?

Vamos definir a v.a.

X: nº. de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que X pode assumir?

Espaço amostral	Probabilidade	X
(HHH)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$	**0**
(HHM)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$	**1**
(HMH)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	**1**
(MHH)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	**1**
(HMM)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	**2**
(MHM)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	**2**
(MMH)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$	**2**
(MMM)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$	**3**

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}291 + 0{,}056 = 0{,}347.$

Exemplo 2: Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade da ***soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6***?

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Qual é a probabilidade de cada ponto w_i de Ω ?

Admitindo-se que o dado seja perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes,

$$P(w_i) = 1/36 \text{ , qualquer } w_i \in \Omega.$$

Defina X: soma dos pontos nos dois lançamentos do dado.

Função de probabilidade de X: $\Rightarrow$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então,

$$P(X < 6) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2)$$
$$= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36$$
$$= 10/36 = 0{,}278$$

Podemos estar interessados em outras variáveis aleatórias definidas para o mesmo espaço amostral.

Y: valor máximo obtido dentre os dois lançamentos.

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Z: diferença entre os pontos do 2º. e do 1º. lançamento.

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

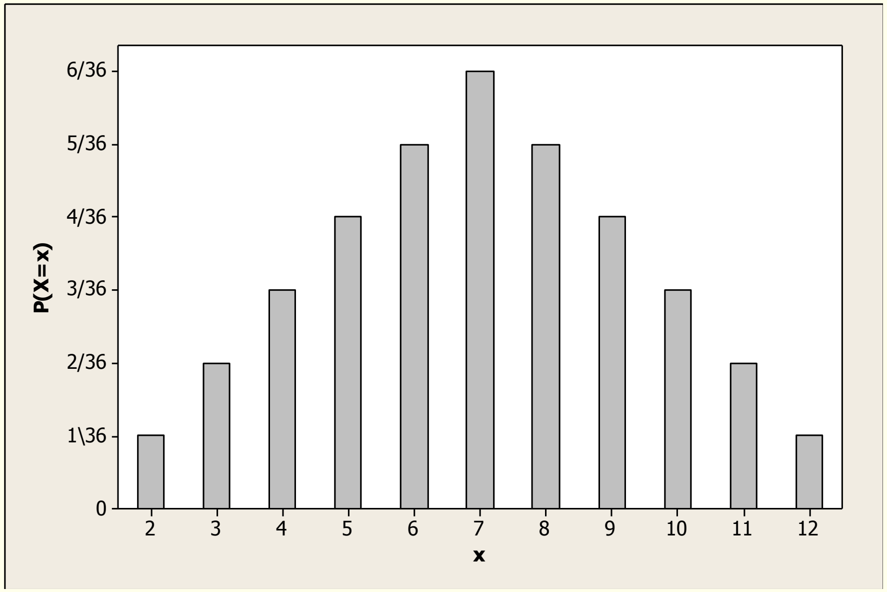
VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA

Qual é o valor médio da soma dos pontos (X) *no lançamento de dois dados?*

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

$\Rightarrow$ 36 pontos igualmente prováveis

x	$P(X = x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	3/36
12	1/36



VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA

Valor Esperado ("média"): Dada a v.a. X, assumindo os valores x_1, x_2, ..., x_n, chamamos de ***valor médio***, ou ***valor esperado***, ou ***esperança matemática*** da distribuição **de** X o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Notação: $\boldsymbol{\mu = E(X)}$

No exemplo, para média de X (soma de pontos), temos:

$E(X)$ = 2×(1/36) + 3×(2/36) + ... + 11×(2/36) + 12×(1/36)

= 252/36 = 7,

ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é igual a 7.

No lançamento de um dado honesto, qual o valor esperado da face obtida ?

Qual a relação entre o número 3,5 e o dado, isto é, qual a relação entre o cubo de madeira e o número 3,5 (que sequer é "esperado", já que nenhuma face tem nela pintado esse valor) ?????

Se você sair dessa aula e rumar para a Av. S. João para jogar o dado a noite inteira, anotando em uma folha de papel todos os resultados, ao amanhecer a média aritmética (aquela da Parte I do curso) de tais resultados estará muito próxima de 3,5

Se você não acreditou, faça um teste (pode ser em casa).

O que garante isso, quaisquer que sejam os resultados dos arremessos, é a Lei dos Grandes Números.

Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, então

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Da relação acima, segue que

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = \mathrm{DP}(X)$.

No exemplo,

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathrm{Var}(X) = (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + (11-7)^2 \times \frac{2}{36} + (12-7)^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{210}{36} = 5{,}83.$$

Alternativamente, poderíamos calcular

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

e, portanto, $\mathrm{Var}(X) = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83.$

Propriedades:

1) Se $P(X = a) = 1$, então

$$E(X) = a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(X) = 0.$$

2) Se $Y = aX + b$, em que a e b são constantes, então

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

e

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

- MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS -

Modelo de Bernoulli ou Binário

Na prática, existem muitos experimentos que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- o resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- um paciente submetido a um tratamento, durante um período de tempo fixo, cura-se ou não da doença;
- um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- no lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

Situações com alternativas *dicotômicas* podem ser representadas, genericamente, por respostas do tipo sucesso-fracasso.

Esses experimentos recebem o nome de ***Ensaios de Bernoulli*** e originam uma v.a. com *distribuição de Bernoulli.*

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- ***1*** se ocorrer ***sucesso***,
- ***0*** se ocorrer ***fracasso***.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p, $0 < p < 1$.

"$X \sim$ ***Bernoulli*** (p)" indica uma v.a. com ***distribuição de Bernoulli*** com parâmetro p, isto é,

$$X = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ se ocorrer "sucesso"} \\ \mathbf{0}, \text{ se ocorrer "fracasso"} \end{cases}$$

e sua função de probabilidade pode ser representada pela tabela

X	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

Segue que

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= p, \\ \mathrm{Var}(X) &= p(1-p). \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de "sucesso", dão origem ao ***modelo de probabilidade binomial***.

Modelo Binomial

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5* duas vezes?

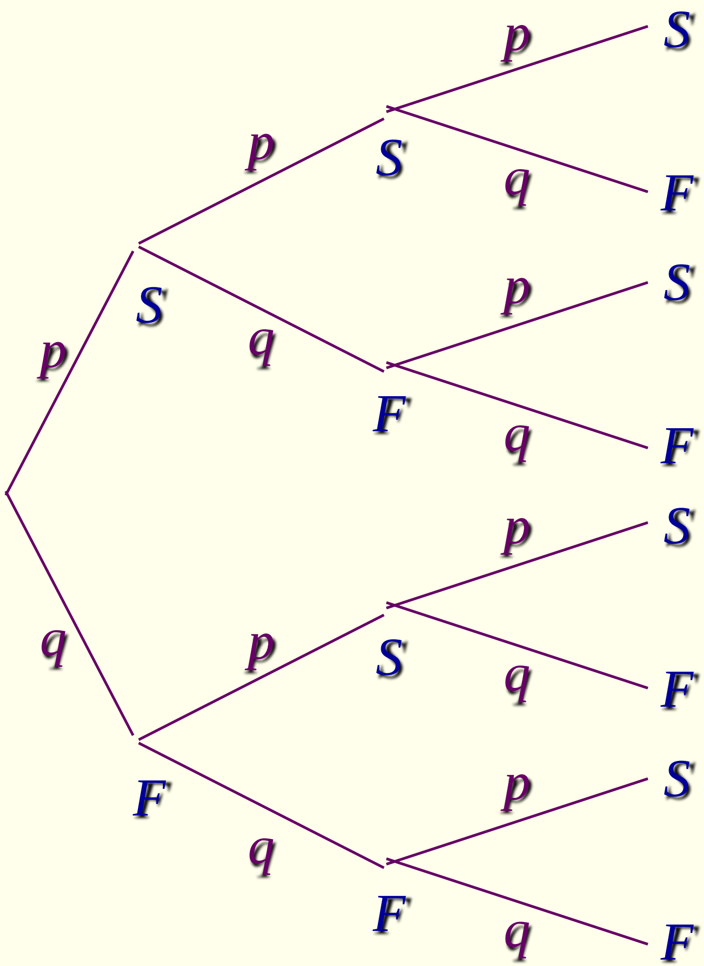
Denotamos,

S: "sucesso", ocorrer face 5;
F: "fracasso", não ocorrer face 5.

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e
$\boldsymbol{q} = \mathbf{1 - p} = P(\text{fracasso}) = 5/6$

$\boldsymbol{\Omega} = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o *número de vezes que a face 5 é observada* nos 3 lançamentos do dado.



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSF)	p^2q	2
(SFS)	p^2q	2
(SFF)	pq^2	1
(FSS)	p^2q	2
(FSF)	pq^2	1
(FFS)	pq^2	1
(FFF)	q^3	0

A função de probabilidade de X é dada por:

Probabilidades binomiais para n = 3 e $P(S) = p$		
nº. de sucessos	**probabilidades**	p **= 1/6**
0	q^3	125/216=0,5787
1	$3pq^2$	75/216=0,3472
2	$3p^2q$	15/216=0,0694
3	p^3	1/216=0,0046

Podemos escrever essa função como

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k \, q^{3-k} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

No exemplo, para n **= 3** e p **= 1/6**, $P(X = 2) = 0{,}0694$.

Distribuição binomial:

A v.a. X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso, tem *distribuição binomial com parâmetros n e p.*

Sua função de probabilidade é dada por

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n.}$$

Notação: $X \sim b(n; p)$.

Resultado: Se $X \sim b(n; p)$, então

valor esperado: $\mu = \mathrm{E}(X) = n \times p$

variância: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = n \times p \times (1-p)$

Exemplo utilizando o R:

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele ***acerte pelo menos 6 questões***?

X: nº. de questões que o aluno acertará

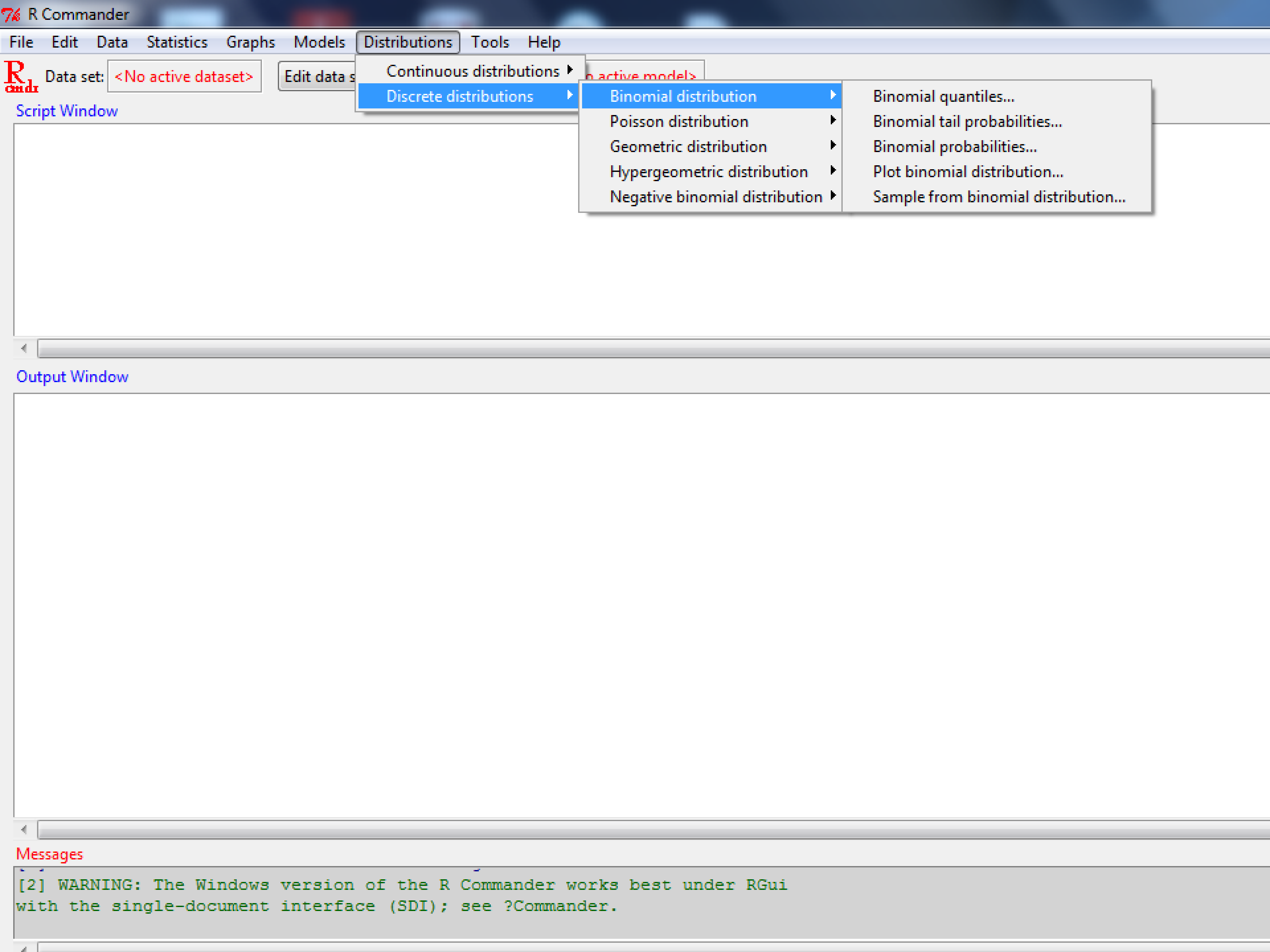
X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12}

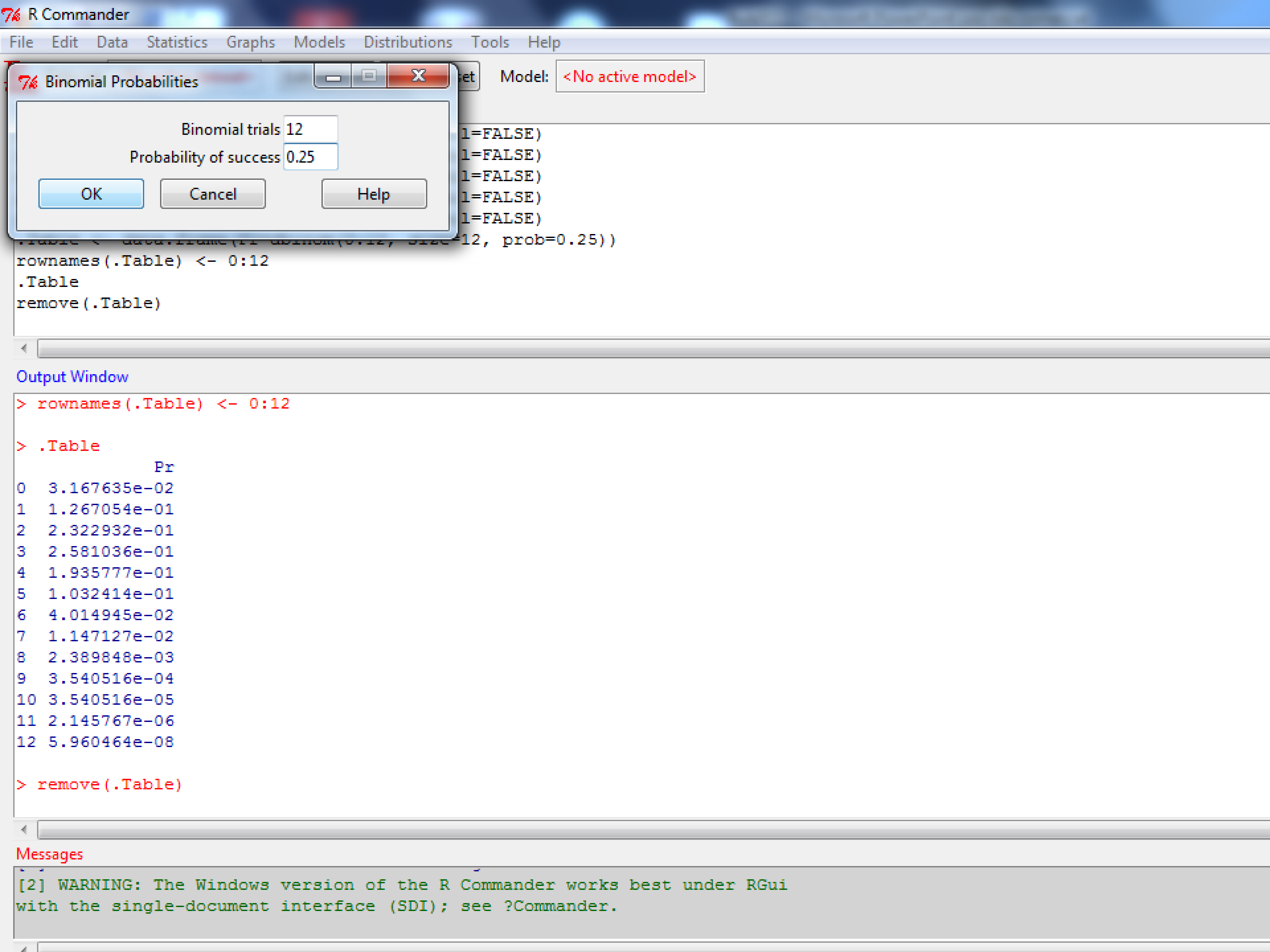
$X \sim b(12;\ 0{,}25)$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{12}{x} 0{,}25^{x} (1 - 0{,}25)^{12-x}}$$

$\Downarrow$

Uso do R para os cálculos!


R Commander
File
Edit
Data
Statistics
Graphs
Models
Distributions
Tools
Help
Data set:
<No active dataset>
Continuous distributions
Discrete distributions
Binomial distribution
Poisson distribution
Geometric distribution
Hypergeometric distribution
Negative binomial distribution
Binomial quantiles...
Binomial tail probabilities...
Binomial probabilities...
Plot binomial distribution...
Sample from binomial distribution...
Script Window
Output Window
Messages
[2] WARNING: The Windows version of the R Commander works best under RGui
with the single-document interface (SDI); see ?Commander.


R Commander
File Edit Data Statistics Graphs Models Distributions Tools Help
Model: <No active model>
Binomial Probabilities
Binomial trials 12
Probability of success 0.25
OK Cancel Help
l=FALSE)
l=FALSE)
l=FALSE)
l=FALSE)
l=FALSE)
12, prob=0.25))
rownames(.Table) <- 0:12
.Table
remove(.Table)
Output Window
> rownames(.Table) <- 0:12
> .Table
Pr
0 3.167635e-02
1 1.267054e-01
2 2.322932e-01
3 2.581036e-01
4 1.935777e-01
5 1.032414e-01
6 4.014945e-02
7 1.147127e-02
8 2.389848e-03
9 3.540516e-04
10 3.540516e-05
11 2.145767e-06
12 5.960464e-08
> remove(.Table)
Messages
[2] WARNING: The Windows version of the R Commander works best under RGui
with the single-document interface (SDI); see ?Commander.

R Commander

File Edit Data Statistics Graphs Models Distributions Tools Help

Data set: <No active dataset> Edit data set View data set Model: <No active model>

Script Window

```
rownames(.Table) <- 0:12
.Table
remove(.Table)
pbinom(c(6), size=12, prob=0.25, lower.tail=TRUE)
pbinom(c(6), size=12, prob=0.25, lower.tail=FALSE)
.Table <- data.frame(Pr=dbinom(0:12, size=12, prob=0.25))
rownames(.Table) <- 0:12
.Table
remove(.Table)
```

Output Window

```
> rownames(.Table) <- 0:12

> .Table
             Pr
0  3.167635e-02
1  1.267054e-01
2  2.322932e-01
3  2.581036e-01
4  1.935777e-01
5  1.032414e-01
6  4.014945e-02
7  1.147127e-02
8  2.389848e-03
9  3.540516e-04
10 3.540516e-05
11 2.145767e-06
12 5.960464e-08

> remove(.Table)
```

Messages

```
[2] WARNING: The Windows version of the R Commander works best under RGui
with the single-document interface (SDI); see ?Commander.
```

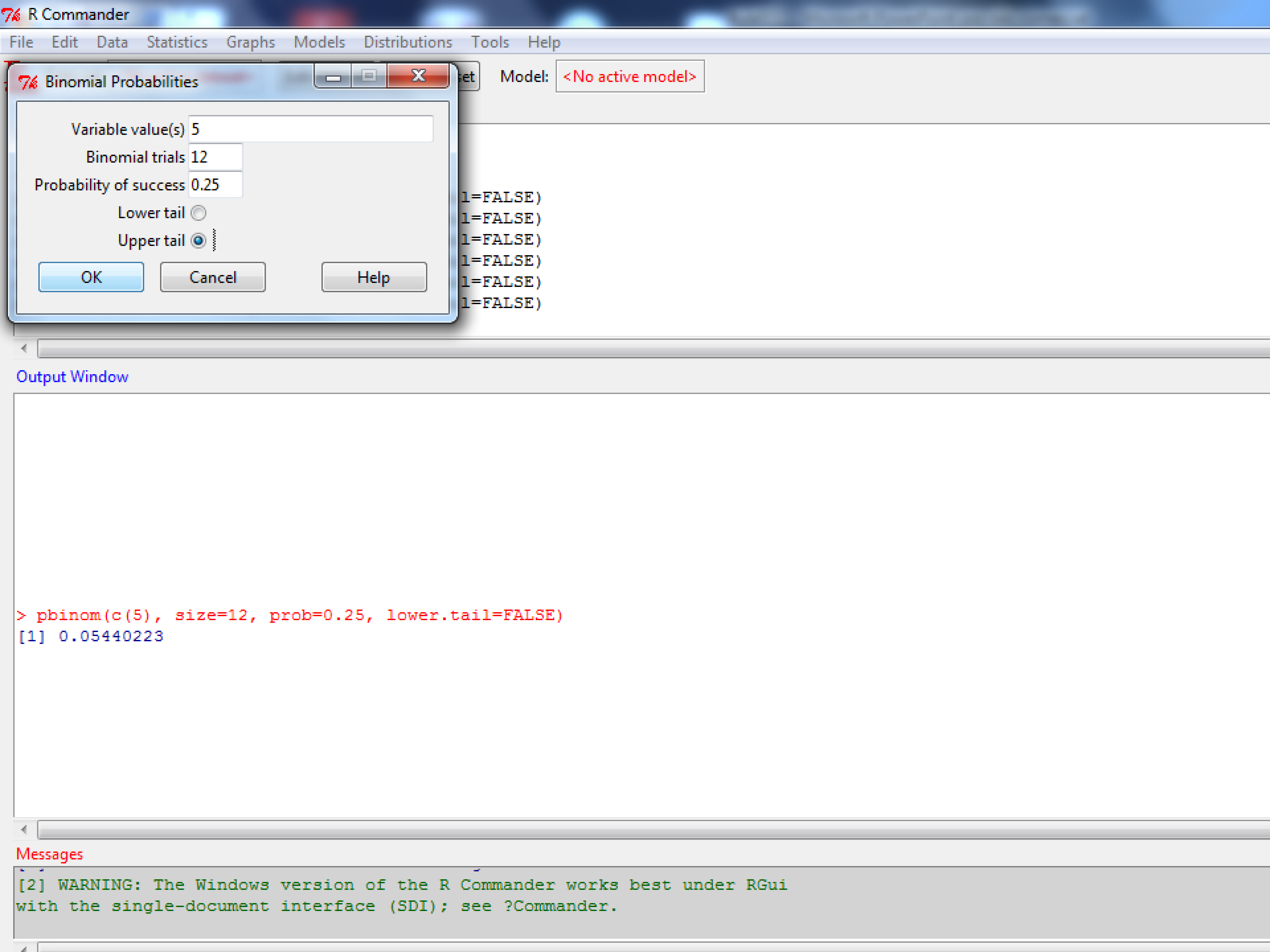
```
> .Table
             Pr
0  3.167635e-02
1  1.267054e-01
2  2.322932e-01
3  2.581036e-01
4  1.935777e-01
5  1.032414e-01
6  4.014945e-02
7  1.147127e-02
8  2.389848e-03
9  3.540516e-04
10 3.540516e-05
11 2.145767e-06
12 5.960464e-08
```

Portanto,

$P(X \geq 6) = 0{,}0544.$

Temos $E(X) = n \times p = 12 \times 0{,}25 = 3$,

ou seja, *em média*, o aluno que responder ao acaso todas as questões acertará 3.


R Commander
File Edit Data Statistics Graphs Models Distributions Tools Help
Binomial Probabilities
Model: <No active model>
Variable value(s) 5
Binomial trials 12
Probability of success 0.25
Lower tail
Upper tail
OK
Cancel
Help
l=FALSE)
l=FALSE)
l=FALSE)
l=FALSE)
l=FALSE)
l=FALSE)
Output Window
> pbinom(c(5), size=12, prob=0.25, lower.tail=FALSE)
[1] 0.05440223
Messages
[2] WARNING: The Windows version of the R Commander works best under RGui
with the single-document interface (SDI); see ?Commander.