INFERÊNCIA PARA A MÉDIA POPULACIONAL μ

Nosso objetivo é apresentar procedimentos estatísticos simples para **testar hipóteses e construir intervalos de confiança** sobre um **valor médio *μ*** (desconhecido) de uma característica de interesse na população, com base na média amostral de uma amostra casual simples de tamanho ***n*** desta população.

Exemplo 1:

Em períodos de pico, os clientes de um banco são obrigados a enfrentar longas filas para sacar dinheiro nos caixas eletrônicos. Dados históricos de vários anos de operação indicam que o tempo de transação nesses caixas tem distribuição normal com média igual a 270 segundos.

Para aliviar essa situação o banco resolve instalar, em caráter experimental, alguns caixas eletrônicos de concepção mais avançada. Após o período de experiência, o banco pretende examinar o tempo médio obtido em uma amostra casual simples das transações realizadas nesses caixas.

Que tipo de informação o banco pretende obter com esse conjunto de dados?

Obviamente, ele deseja obter informação que dê suporte à conjectura de que o *tempo médio de transação nas novas máquinas seja inferior a 270 segundos.*

Isto serviria como base objetiva para a decisão de substituir as máquinas antigas pelas novas.

→ Em *linguagem estatística*, o que o banco precisa é conduzir um *teste de hipóteses para o tempo médio* μ *de transação nas novas máquinas*.

As etapas a serem cumpridas para este teste de hipóteses são as mesmas que vimos anteriormente.

(1) Formular as hipóteses nula $\boldsymbol{H}$ e a alternativa $\boldsymbol{A}$

Hipótese Nula : afirmação ou conjectura sobre μ contra a qual estaremos buscando evidência nos dados amostrais.

Hipótese Alternativa : afirmação ou conjectura sobre μ que suspeitamos (ou esperamos) ser verdadeira.

(2) Fixar o nível de significância α do teste.

(3) Coletar os dados e calcular as medidas necessárias

A média amostral $\bar{x}_{obs}$, e se necessário, o desvio padrão amostral $\boldsymbol{s}$.

(4) Determinar o nível descritivo P.

P mede a força da evidência contra a hipótese nula contida nos dados.

(5) Tomar a decisão e concluir.

Comparar o valor de P com o nível de significância α adotado.

Se $P \leq \alpha$ reconhecemos na amostra evidência suficiente para rejeitar H, isto é, consideramos a amostra significante ao nível α . Caso contrário, não rejeitamos H.

No caso do Exemplo 1, temos

(1) Hipóteses nula e alternativa

$$H\text{: } \mu = 270 \text{ seg} \quad \text{e} \quad A\text{: } \mu < 270 \text{ seg}$$

(2) Nível de significância $\alpha = 5\%$

(3) Amostra

Tempos (em seg) de 36 transações escolhidas ao acaso

240	245	286	288	238	239	278	287	291	248	257	225
...											
250	268	275	271	290	260	254	282	263	256	278	270

<u>Valor observado</u> da média amostral:

$$\bar{x}_{obs} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{36}}{36} = 262{,}3$$

(4) Cálculo do nível descritivo ***P***

Como visto anteriormente o nível descritivo mede a probabilidade de se observar valores mais extremos do que o encontrado na amostra, supondo que a hipótese nula seja verdadeira, isto é,

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{P}\left(\bar{X} \leq \bar{x}_{obs} \mid \mu = 270 \right)$$

Para calcular o nível descritivo temos que utilizar o seguinte resultado:

Teorema do Limite Central

Seja X uma v. a. que tem média μ e variância σ^2. Para amostras X_1, X_2, ..., X_n , retiradas ao acaso e com reposição de X, a distribuição de probabilidade da média amostral $\overline{X}$ aproxima-se, para n grande, de uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2 / n , ou seja,

$$\overline{X} \sim \mathbf{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ para } n \text{ grande, aproximadamente.}$$

Temos duas opções ao padronizar a variável $\bar{X}$.

• Se o desvio padrão populacional σ for **conhecido**, usamos

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

• Se σ for **desconhecido**, usamos seu estimador, o desvio padrão amostral S, e consideramos a seguinte variável padronizada

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{S}$$

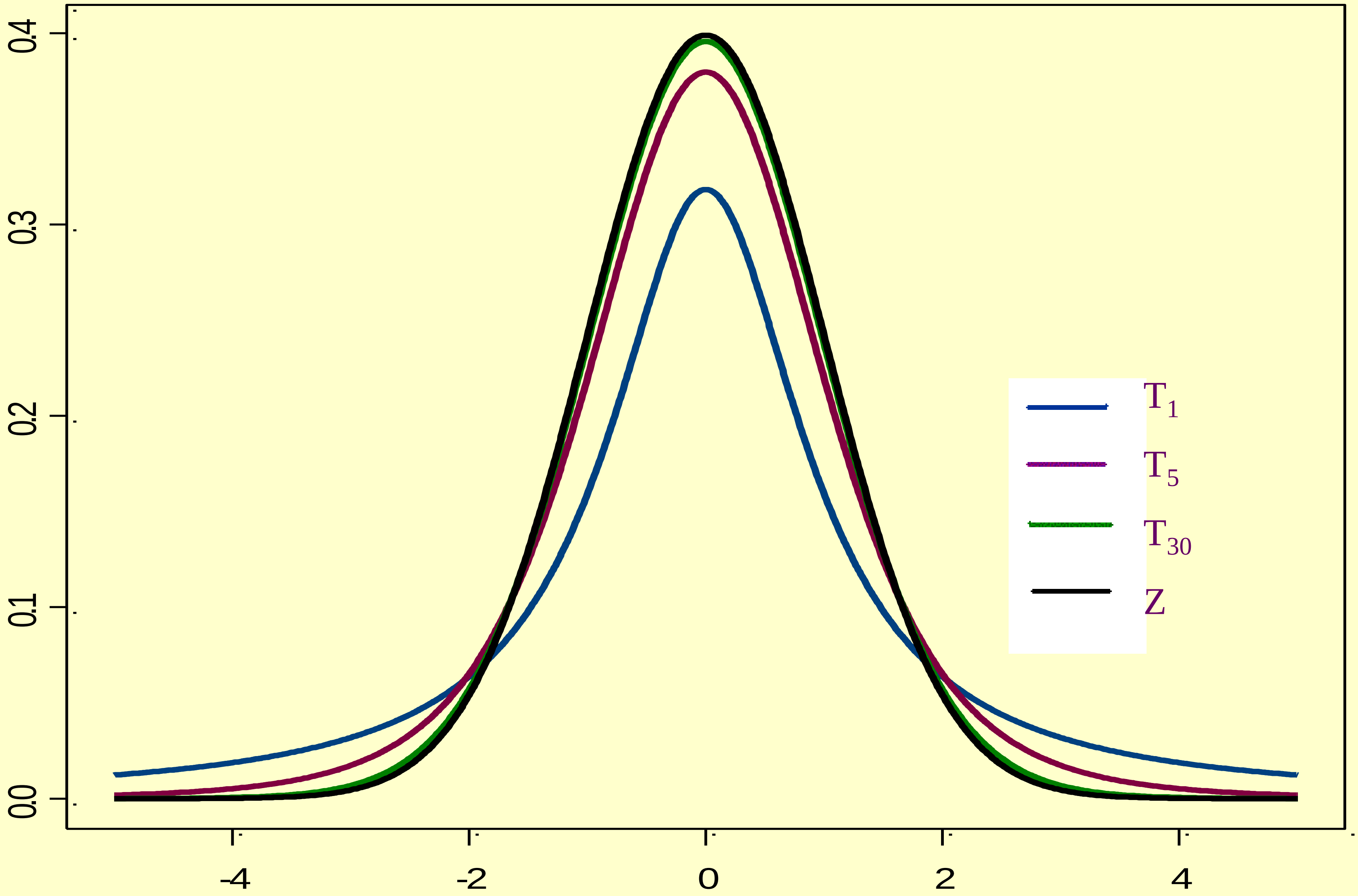
- Se a variável X na <u>população</u> tem distribuição <u>normal</u>, então

Z tem distribuição $N(0,1)$

e T tem distribuição *t-Student* com n-1 graus de liberdade.

- Se o tamanho n da amostra é <u>grande</u>, então

Z e T têm distribuição <u>aproximadamente</u> $N(0,1)$.


0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-4
-2
0
2
4
T_1
T_5
T_{30}
Z

No Exemplo 1, s = 21,4 e n = 36. Logo,

$$P = P(T \leq 6(262{,}3 - 270)/21{,}4)$$

$$P = P(T \leq -2{,}16) \cong 0{,}02$$

Usando a tabela da t-Student com 35 graus de liberdades, temos $P(T \geq 2{,}133)$ = 0,04/2 = 0,02

(5) Decisão e conclusão

Rejeitamos H ao nível de significância adotado ($\alpha = 5\%$).

Conclusão: há evidência suficiente para que o banco substitua as máquinas atuais pelas mais modernas.

$\Rightarrow$

Exemplo 2:

Um fabricante de cigarros afirma que seus cigarros contêm não mais que 30 mg de nicotina.

Uma ONG anti-tabagismo não concorda com essa afirmação, e colhe uma amostra aleatória de 80 cigarros dessa marca para contestar a afirmação.

Na amostra coletada, o conteúdo médio de nicotina foi 31,1 mg e desvio padrão de 3,4 mg.

Esses resultados são suficientes para contestar a afirmação do fabricante ?

(1) As hipóteses nula e alternativa são

H: $\mu \leq 30\ mg$ (ou simplesmente H: $\mu = 30\ mg$)

A: $\mu > 30\ mg$

(2) Nível de significância, por exemplo, $\alpha = 5\%$.

(3) Evidência amostral

Tamanho da amostra $n = 80$
Média amostral $\overline{x}_{obs} = 31{,}1\ mg$
Desvio padrão amostral $s = 3{,}4\ mg$

(4) Cálculo do nível descritivo ***P***

$$\boldsymbol{P} = P(\,\overline{X} \geq 31{,}1 \mid \mu = 30\,)$$

$$= P\left(T \geq \frac{\sqrt{80}\,(31{,}1-30)}{3{,}4}\right)$$

$$\cong P(\,Z \geq \sqrt{80}\,(31{,}1-30)\,/\,3{,}4\,)$$

$$= P(\,Z \geq 2{,}89) = 0{,}002$$

(5) Decisão e conclusão

Como $\boldsymbol{P} \leq \boldsymbol{\alpha}$, decidimos por rejeitar $\boldsymbol{H}$.

Logo, ao nível de 5%, há evidências suficiente para concluir que a afirmação do fabricante está incorreta. A contestação da ONG procede.

Hipóteses Alternativas Unilaterais e Bilaterais

Quando a hipótese alternativa é A: $\mu < \mu_0$ (como no Exemplo 1), no cálculo de P, valores iguais ou mais extremos do que $\bar{x}_{obs}$ representam os valores <u>menores ou iguais</u> a $\bar{x}_{obs}$.

Quando a hipótese alternativa é A: $\mu > \mu_0$, consideramos, no cálculo de P, os valores <u>maiores ou iguais</u> a $\bar{x}_{obs}$.

Quando a hipótese alternativa é bilateral (A: $\mu \neq \mu_0$), o nível descritivo mede o quanto o valor amostral pode se distanciar do valor esperado, sob a hipótese nula H, em <u>ambas as direções.</u>

Exemplo 3:

Uma empresa vende uma mistura de castanhas, em latinha, cuja embalagem afirma que, em média, 25 g do conteúdo total (em g) é de castanha de caju. Sabe-se que o conteúdo de castanha de caju tem distribuição normal com desvio padrão igual a 3,1 g.

Desconfiado de que o conteúdo médio esteja incorreto, o departamento de Garantia da Qualidade (GQ) resolve examinar o conteúdo de 12 latas, e medir a quantidade (em g) de castanha de caju em cada lata. A média amostral resultou em 26,3 g.

Este resultado constitui uma forte evidência em favor do GQ, ao nível de 5% ?

Não interessa à empresa que se tenha menos castanha de caju do que o especificado na embalagem, por uma questão de qualidade. Por outro lado, não se pode ter muito mais, por uma questão de custo.

(1) As hipóteses nula e alternativa são

$$H: \mu = 25 \quad \text{e} \quad A: \mu \neq 25$$

(2) Nível de significância

Pelo texto, $\alpha = 5\%$.

(3) Evidência amostral

Tamanho da amostra $n = 12$

Média amostral $\bar{x}_{obs} = 26{,}3$ g

Desvio padrão (populacional) $\sigma = 3{,}1$ g

(4) Determinar o nível descritivo

Se a mistura está dentro dos padrões, o conteúdo médio de castanhas de caju seria 25 g.
Observamos um desvio de $|26,3 - 25| = 1,3\ g$.

Logo,

$$\boldsymbol{P} = P(\,|\,\overline{X} - 25| \geq 1,3)$$

$$= P(\,\overline{X} \geq 26,3 \text{ ou } \overline{X} \leq 23,7 \mid \mu = 25)$$

(por simetria) $= 2\,P(\,\overline{X} \geq 26,3 \mid \mu = 25)$

Assim,

$$P = 2\,P\left(Z \geq \frac{\sqrt{12}\,(26{,}3 - 25)}{3{,}1}\right)$$

$$= 2\,P(Z \geq 1{,}45) = 2\,(0{,}0735) = 0{,}1471$$

(5) Decisão e conclusão

Como $P > \alpha$, decidimos por **não rejeitar H.**

Concluímos, ao nível de significância de 5%, que não há evidências suficiente em favor do GQ.

Intervalo de Confiança para a média

O *estimador por intervalo* para a média μ tem a forma

$$\left[\overline{X} - \varepsilon \; ; \; \overline{X} + \varepsilon\right],$$

1. Se o desvio padrão populacional σ for conhecido,

$$\left[\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

2. Se o desvio padrão σ é desconhecido

$$\left[\bar{x} - t_{n\text{-}1}\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t_{n\text{-}1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Obs: Se n é grande o IC aproximado é dado por

$$\left[\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Exemplo 4:

O diretor do Banco Incerteza pretende analisar o endividamento médio dos clientes que fizeram empréstimo junto ao banco. Para tanto, uma amostra de 20 clientes apresentou média $ 587,25 e desvio padrão de $ 93,76. Construa um intervalo de 95% de confiança para o endividamento médio, assumindo que a distribuição dos empréstimos é normal.

$$\left(587{,}25 - 2{,}093\frac{93{,}76}{\sqrt{20}} \;;\; 587{,}25 + 2{,}093\frac{93{,}76}{\sqrt{20}}\right) = (543{,}37;\ 631{,}13).$$

Se o diretor do banco sabe que o endividamento médio dos clientes de um banco concorrente é de $ 535,00, então o IC obtido sugere que seus clientes apresentam endividamento médio maior.

RESUMO

Teste de hipóteses para a média populacional

(0) Descrever o **parâmetro** de interesse μ.

(1) Estabelecer as **hipóteses**:

H: $\mu = \mu_0$ contra uma das alternativas

A: $\mu \neq \mu_0$, A: $\mu > \mu_0$ ou A: $\mu < \mu_0$.

(2) Escolher um **nível de significância** α.

(3) Selecionar uma **amostra** casual simples de tamanho $n \Rightarrow$ determinar a média amostral $\bar{x}_{obs}$ e o desvio padrão (populacional σ ou amostral s) .

(4) Determinar o **nível descritivo** P

Se A: $\mu > \mu_0$, $\quad P = P\left(\bar{X} \geq \bar{x}_{obs} \middle| \mu = \mu_0\right)$

Se A: $\mu < \mu_0$, $\quad P = P\left(\bar{X} \leq \bar{x}_{obs} \middle| \mu = \mu_0\right)$

Se A: $\mu \neq \mu_0$, $\quad P = 2P\left(\bar{X} \leq \bar{x}_{obs} \middle| \mu = \mu_0\right)$

ou $2P\left(\bar{X} \geq \bar{x}_{obs} \middle| \mu = \mu_0\right)$

Usando no cálculo uma das variáveis padronizadas

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \quad \text{ou} \quad T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{s}$$

e lembrando que,

$Z \sim N(0,1)$ e

$T \sim t$ de *Student* com n**-1** graus de liberdade.

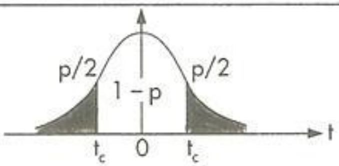
(Se n é grande, use a aproximação normal.)

(5) **Decidir**, comparando P com o nível de significância α, e **concluir.**

Se $P \leq \alpha \Rightarrow$ **rejeitamos** H

Se $P > \alpha \Rightarrow$ **não rejeitamos** H

Tabela V — Distribuição t de Student
Corpo da tabela dá os valores t_c tais que $P(-t_c < t < t_c) = 1 - p$.
Para $\nu > 120$, usar a aproximação normal.



Graus de liberdade ν	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	Graus de liberdade ν
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,657	318,309	636,619	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,598	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	10,214	12,924	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,998	3,747	4,604	7,173	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,756	3,365	4,032	5,893	6,869	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	3,025	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,248	2,602	2,947	3,733	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850	20
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,166	2,485	2,787	3,450	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,684	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646	30
35	0,126	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591	35
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551	40
50	0,126	0,254	0,387	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496	50
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373	120
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	∞
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	

Fonte: "Estatística Básica", W. O. Bussab e P. A. Morettin, Ed. Saraiva, 5a. edição, 2002.

⇒