NOÇÕES DE TESTE DE HIPÓTESES (II)

Teste de Hipóteses sobre p

Nível Descritivo

Resumo

Já vimos na aula anterior!

$X \sim$ binomial $(n; p)$

(1) Estabelecer as **hipóteses sobre p**:

$H: p = p_0$ x $A: p \neq p_0$; (ou $A: p > p_0$, ou $A: p < p_0$)

(2) Escolher um **nível de significância α.**

(3) Determinar a **região crítica RC** da forma

$\{ X \leq k_1 , X \geq k_2 \}$; (ou $\{ X \geq k \}$ ou $\{ X \leq k \}$)

- Fixar α e obter RC
  ou
- Fixar RC e obter α

(4) Selecionar uma **amostra**: obter $X = x$

(5) Regra de **Decisão:** $x \in RC \Rightarrow$ rejeitamos H

$x \notin RC \Rightarrow$ não rejeitamos H

Exemplo 1: Uma indústria de medicamentos afirma que o processo de fabricação de embalagens produz 90% de itens dentro das especificações. O *IPEM* deseja investigar se este processo de fabricação ainda está sob controle.

Sendo p a proporção de embalagens dentro das especificações, as hipóteses de interesse são:

$$\boxed{\begin{array}{l} H\text{: } p = 0{,}9 \\ A\text{: } p < 0{,}9 \end{array}}$$

Seleciona-se uma amostra aleatória de 15 itens e se observa o número de itens satisfatórios (X),

então $X \sim b(15,\, p)$.

Região crítica: $RC = \{X \leq k\}$

Logo, para $\alpha = 6\%$ temos $k = 11$ e $RC = \{X \leq 11\}$.

Para $\alpha = 1\%$ temos $k = 9$ e $RC = \{X \leq 9\}$. $\Rightarrow$

Se $x_{obs} = 10$ itens satisfatórios, então

a) $\alpha = 6\% \Rightarrow$ **$10 \in RC$**

Rejeitamos H ao nível de significância de 6%.

b) $\alpha = 1\% \Rightarrow$ **$10 \notin RC$**

Não rejeitamos H ao nível de significância de 1%.

Crítica: arbitrariedade na escolha da RC (nível de significância).

Sugestão: determinar um nível de significância associado à evidência experimental.

NÍVEL DESCRITIVO: $\boldsymbol{P}$ (ou "$\boldsymbol{P}$-*value*")

Nesse exemplo, temos $RC = \{X \leq k\}$ e $x_{obs} = 10$.

Qual seria o nível de significância se fosse utilizada a RC = { X ≤ 10 } ?

O nível de significância seria
$P(X \leq 10 \mid p = 0,9) = 0,0127$.
Esse valor é o nível descritivo do teste.
Indicando-o por *P*, então *P* = 0,0127.

Se o nível de significância α é maior ou igual ao nível descritivo *P*, então a região crítica de nível α contém o valor observado e, portanto, rejeitamos H.

Portanto, para um α fixado,

$P \leq \alpha \Rightarrow$ **rejeitamos** H
$P > \alpha \Rightarrow$ **não rejeitamos** H

No exemplo, $P = 0{,}0127$.

Adotando $\alpha = 0{,}05$, temos $P < \alpha$ e, portanto, **rejeitamos** H.

Se tivermos x_{obs} = 12, *qual será o nível descritivo?*

$\boldsymbol{P} = P\,(X \leq 12 \mid p = 0{,}9) \; = 0{,}1840$

Conclusão: não rejeitamos *H*.

Nível Descritivo é o menor nível de significância para o qual o resultado observado é significante, ou seja, conduz à rejeição da hipótese nula *H*.

Exemplo 2: A diretoria de uma escola acredita que neste ano a proporção p de alunos usuários da Internet é maior que os 70% encontrados no ano anterior. Se uma pesquisa com 30 alunos, escolhidos ao acaso, mostrou que 26 são usuários da Internet, podemos concluir que a afirmação da diretoria é verdadeira?

Hipóteses estatísticas:

$$\boxed{\begin{array}{c} H: p = 0{,}7 \\ A: p > 0{,}7 \end{array}}$$

Seja

X: nº de usuários em 30 entrevistados. Então

$X \sim b\,(30, p)$.

Se x_{obs} = 26 usuários da Internet, o ***nível descritivo*** do teste é dado por:

$\boldsymbol{P} = P\,(X \geq 26 \mid p = 0{,}7) = 0{,}0301$ $\Rightarrow$

Conclusão:

Se α = 5%, $\boldsymbol{P} < \boldsymbol{\alpha}$ $\Rightarrow$ **rejeitamos** $\boldsymbol{H}$, ou seja, os dados indicam que a proporção de usuários aumentou (é maior que 70%).

Uso da Aproximação Normal

Exemplo 3: Proporção de analfabetos em uma cidade

Pelo Anuário IBGE/1988: 15% *de analfabetos*.

Vamos supor duas pesquisas:

Em 1998, entre 200 entrevistados, 27 eram analfabetos.

Em 2008, entre 200 entrevistados, 19 eram analfabetos.

Pergunta: Esses dados suportam a tese de diminuição do analfabetismo na cidade de 1988 para 1998? E de 1988 para 2008?

Em ambos os casos, o teste de interesse é das hipóteses:

$$\boxed{\begin{array}{l} H: p = 0{,}15 \\ A: p < 0{,}15 \end{array}}$$

sendo p a proporção populacional de analfabetos na cidade (no ano da pesquisa).

Seja

X: nº de analfabetos em 200 cidadãos entrevistados (no ano da pesquisa).

Então,

$$X \sim b(200, p).$$

1) Se adotarmos $RC = \{X \leq 23\}$

Conclusão:

Em 1998, $x_{obs} = 27 \notin RC \Rightarrow$ Não rejeitamos H

Em 2008, $x_{obs} = 19 \in RC \Rightarrow$ Rejeitamos H

Cálculo do nível de significância:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{rejeitar } H \mid H \text{ verdadeira}) \\ &= P(X \leq 23 \mid p = 0{,}15) \\ &= 0{,}0958\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Cálculo do tamanho do erro tipo II:

$$\begin{aligned}\beta(0{,}10) &= P(\text{não rejeitar } H \mid p = 0{,}10) \\ &= P(X > 23 \mid p = 0{,}10) \\ &= 0{,}2016\end{aligned}$$

Usando aproximação normal:

$$\alpha = P(X \leq 23 \mid p = 0{,}15)$$

$E(X) = np = 200 \times 0{,}15 = 30$
$Var(X) = np(1-p) = 200 \times 0{,}15 \times 0{,}85 = 25{,}5$
$DP(X) = \sqrt{25{,}5} = 5{,}05$

$$\alpha \cong P\left(Z \leq \frac{23-30}{5{,}05}\right) = P(Z \leq -1{,}39) = 0{,}0823$$

$$\beta(0{,}10) = P(X \geq 24 \mid p = 0{,}10)$$

$E(X) = np = 200 \times 0{,}10 = 20$
$Var(X) = np(1-p) = 200 \times 0{,}10 \times 0{,}90 = 18$
$DP(X) = \sqrt{18} = 4{,}24$

$$\beta(0{,}10) \cong P\left(Z \geq \frac{24-20}{4{,}24}\right) = P(Z \geq 0{,}94) = 0{,}1746$$

2) Adotando o nível descritivo:

Em 1998, $x_{obs} = 27 \Rightarrow \boldsymbol{P} = P(X \leq 27 \mid p = 0{,}15) = 0{,}3164$

Em 2008, $x_{obs} = 19 \Rightarrow \boldsymbol{P} = P(X \leq 19 \mid p = 0{,}15) = 0{,}0148$

Conclusão: fixando $\alpha = 5\%$,

em 1998, $P > \alpha \Rightarrow$ não rejeitamos H

em 2008, $P < \alpha \Rightarrow$ rejeitamos H

Usando aproximação:

Em 1998, $\boldsymbol{P} = P(X \leq 27 \mid p = 0{,}15)$

$$\cong P\left(Z \leq \frac{27-30}{5{,}05}\right) = P(Z \leq -0{,}59) = 0{,}2776$$

Em 2008, $\boldsymbol{P} = P(X \leq 19 \mid p = 0{,}15)$

$$\cong P\left(Z \leq \frac{19-30}{5{,}05}\right) = P(Z \leq -2{,}18) = 0{,}0146$$

Exemplo 3: Uma pesquisa considerou 92 voluntários para fazerem parte do estudo sendo que cada um deles jogava uma moeda. *O* voluntário seria submetido ou não a um *teste*, conforme o resultado fosse cara ou coroa. Os seguintes resultados foram obtidos:

	Voluntários
nº caras	35
nº coroas	57
Total	92

Com base nos resultados dos 92 lançamentos você diria que a moeda usada era honesta? Tome a decisão com base no nível descritivo.

Hipóteses estatísticas:

$H: p = 0{,}5$
$A: p \neq 0{,}5$

sendo p a probabilidade de *coroa* da moeda.

Seja
X: nº de *coroas* em 92 lançamentos da moeda.
Então, $X \sim b(92, p)$.

Sob H, p=0,5 e E(X)=92x0,5= 46, Var(X)=92x0,5x0,5=23

Como a hipótese alternativa é bilateral, no cálculo do valor $\boldsymbol{P}$, devemos considerar que a região crítica envolve os valores de $\boldsymbol{X}$ que se distanciam muito (para mais ou para menos) do valor previsto pela hipótese nula $\boldsymbol{H}$.

Sob H, o valor esperado de X é 46.

Como x_{obs} = 57, que é maior que 46, calcula-se

$$\mathrm{P}(X \geq 57 \mid p = 0{,}50)$$

Usando a aproximação normal :

$$\cong P\left(Z \geq \frac{57 - 46}{\sqrt{23}} \right) = P(Z \geq 2{,}29) = 0{,}011$$

e o nível descritivo será P = 2 x 0,011=0,022

Para $\alpha = 5\%$, $P < \alpha \Rightarrow$ Rejeitamos *H*

Para α = 1%, $P > \alpha \Rightarrow$ Não rejeitamos *H*

Se o valor de x_{obs} fosse menor que 46, por exemplo, x_{obs} = 34, então

$$P = 2P\left(Z \leq \frac{34 - 46}{\sqrt{23}} \right)$$

$$P = 2\,P\,(\,Z \leq -\,2{,}5\,) = 2 \text{ x } [\,1 - A(\,2{,}5)\,]$$

$$= 2 \text{ x } [1 - 0{,}9938] = 0{,}0124\ .$$