MAE 0325 - aula 05

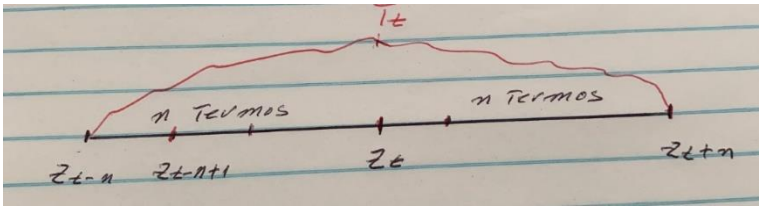
Tendência e Sazonalidade

Suavização

Quando supomos que a tendência possa ser representada por um polinômio de baixo grau, isto implica que usamos todas as observações $\{Z_t, t = 1, ..., N\}$ para estimar o polinômio.

A idéia de se usar algum tipo de suavização é que a tendência num instante t será estimada usando-se observações Z_s, com **s** ao redor de t para estimar T_t.

Exemplo: usamos as observações $Z_{t-n}, Z_{t-n+1}, \ldots, Z_{t+n}$ para estimar T_t.



Métodos de suavização:

1) Médias Móveis

usar um filtro linear, uma operação que transforma a séries Z_t na série Z_t^*:

$$Z_t^* = \mathcal{F}[Z_t], \quad t = 1, \ldots, N.$$

Do modelo:

$$Z_t = T_t + a_t,$$

temos:

$$Z_t^* = T_t^* + a_t^*, \tag{3.13}$$

onde $T_t^* = \mathcal{F}[T_t], a_t^* = \mathcal{F}[a_t]$. Queremos que $\mathcal{F}$ seja tal que $T_t^* \approx T_t$ e $E(a_t^*) = 0$, de modo que, suavizando-se as observações Z_t, obtenhamos $\mathcal{F}[Z_t] = Z_t^* \approx T_t$.

Dadas as observações $Z_1, \ldots, Z_N$, o filtro $\mathcal{F}$ comumente utilizado é da forma

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^{n} c_j Z_{t+j}, \quad t = n+1, \ldots, N-n, \tag{3.14}$$

onde $\sum_{j=-n}^{n} c_j = 1$. Observe que perdemos n observações no início e n no final da série original. Z_t^* será uma estimativa da tendência no instante t e também dizemos que (3.14) é um filtro de *médias móveis*. O caso mais simples é aquele em que $c_j = 1/(2n+1)$, para todo j, de modo que

$$Z_t^* = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} Z_{t+j}. \tag{3.15}$$

Temos:

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^{n} c_j Z_{t+j}, \quad t = n+1, \ldots, N-n,$$

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^{n} c_j Z_{t+j} = \sum_{j=-n}^{n} c_j [T_{t+j} + a_{t+j}] = \sum_{j=-n}^{n} c_j T_{t+j} + \sum_{j=-n}^{n} c_j a_{t+j},$$

ou seja,

$$Z_t^* = \sum_{j=-n}^{n} c_j T_{t+j} + a_t^*, \tag{3.16}$$

na qual

$$a_t^* = \sum_{j=-n}^{n} c_j a_{t+j}. \tag{3.17}$$

Como $E(a_t^*) = 0$, pois $E(a_t) = 0$, para todo t, segue-se que

$$E(Z_t^*) = \sum_{j=-n}^{n} c_j T_{t+j} \approx \sum_{j=-n}^{n} c_j T_t = T_t = E(Z_t), \tag{3.18}$$

dado que $T_{t+j} \approx T_t$, supondo-se a tendência "suave". Assim, a série original e a série suavizada têm praticamente a mesma média, para cada t. Por outro lado,

$$\mathrm{Var}(a_t^*) = \sigma_a^2 \sum_{j=-n}^{n} c_j^2, \tag{3.19}$$

dado que $\mathrm{Var}(a_t) = \sigma_a^2$, constante. Como $\mathrm{Var}(Z_t) = \sigma_a^2$ e $\mathrm{Var}(Z_t^*) = \mathrm{Var}(a_t^*)$, segue-se de (3.19) que a série suavizada terá uma variância menor se $\sum_{j=-n}^{n} c_j^2 < 1$, $\forall j$. Entretanto, o filtro (3.14) introduz uma correlação nos resíduos. De fato, nossa suposição era que $E(a_t, a_s) = 0$, $s \neq t$. É fácil ver (Problema 4 do Capítulo 2) que

$$E(a_t^* a_{t+h}^*) = \begin{cases} \sigma_a^2 \sum_{j=-n+h}^{n} c_j c_{j-h}, & h = 0, 1, \ldots, 2n, \\ 0, & h = 2n+1, \ldots \end{cases} \tag{3.20}$$

A série livre de tendência será $Z_t - Z_t^*$ e $E(Z_t - Z_t^*)$ representa o viés de estimação, dado por

$$v(t) = T(t) - \sum_{j=-n}^{n} c_j T_{t+j}, \tag{3.21}$$

e como vimos, $v(t) \approx 0$, já que $E(Z_t^*) \approx E(Z_t)$.

O erro quadrático médio do estimador é

$$E(T_t - Z_t^*)^2 = \mathrm{Var}(Z_t^*) + v^2(t) = \sigma_a^2 \sum_{j=-n}^{n} c_j^2 + v^2(t). \tag{3.22}$$

Problema: escolhe de n.

Idéia: escolher n de modo que (3.22) seja o menor possível.

Para dados mensais, usualmente tomamos médias móveis de 12 observações sucessivas.

3 desvantagens principais neste processo de suavização:

(i) inferências estatísticas derivadas do método são limitadas, dado que ele não é baseado em nenhum modelo probabilístico;

(ii) não podemos obter as estimativas da tendência nos instantes $t = 1, \ldots, n$ e $t = N - n + 1, \ldots, N$;

(iii) não fornece um meio de fazer previsões.

Exemplo 3.2. Para ilustrar o procedimento, consideremos os dados da Tabela 3.1 e $n = 1$ em (3.15), ou seja, teremos médias móveis centradas de três termos

$$Z_t^* = \frac{1}{3}\sum_{j=-1}^{1} Z_{t+j}, \quad t = 2, 3, \ldots, 23.$$

Assim,

$$Z_2^* = \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3) = \frac{84,6 + 89,9 + 81,9}{3} = 85,5, \text{ etc.}$$

Exemplo 3.1. Na Tabela 3.1 apresentamos parte dos dados da série A_5 (Energia). São 24 observações, referentes aos anos 1977 e 1978 e arredondadas. Notamos que, *para este período*, um polinômio de primeiro grau é adequado para representar T_t.

Tabela 3.1: Série A_5 - Consumo de Energia Elétrica no Espírito Santo, jan./1977 a dez./1978

t	Z_t	t	Z_t
1	84,6	13	110,3
2	89,9	14	118,1
3	81,9	15	116,5
4	95,4	16	134,2
5	91,2	17	134,7
6	89,8	18	144,8
7	89,7	19	144,4
8	97,9	20	159,2
9	103,4	21	168,2
10	107,6	22	175,2
11	120,4	23	174,5
12	109,6	24	173,7

Fonte: Série A_5

Assim,

$$Z_2^* = \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3) = \frac{84,6 + 89,9 + 81,9}{3} = 85,5, \text{ etc.}$$

Os valores estimados estão na Tabela 3.3, juntamente com a série $Y_t = Z_t - Z_t^*$, livre de tendência. Dado o modelo (3.3) esta série deveria ser um ruído branco. Verifique se isto acontece.

Tabela 3.3: Estimativas da tendência (Z_t^*) e da série livre de tendência, para os dados da Tabela 3.1, utilizando o método de suavização. ΔZ_t é a primeira diferença, $Z_t^{(12)}$ é a média móvel centrada de 12 meses e $Z_t^{(5)}$ é a mediana móvel centrada de 11 meses.

t	Z_t	Z_t^*	Y_t	$Z_t^{(12)}$	$Z_t^{(5)}$	ΔZ_t
1	84,6	-	-	-	-	-
2	89,9	85,5	4,4	-	-	5,3
3	81,9	89,1	-7,2	-	-	-8,0
4	95,4	89,5	5,9	-	-	13,5
5	91,2	92,1	-0,9	-	-	-4,2
6	89,8	90,2	-0,4	-	91,2	-1,4
7	89,7	92,5	-2,8	97,4	95,4	-0,1
8	97,9	97,0	0,9	99,3	97,9	8,2
9	103,4	103,0	0,4	101,9	100,3	5,5
10	107,6	110,5	-2,9	104,9	103,4	4,2
11	120,4	112,5	7,9	108,4	107,6	12,8
12	109,6	110,1	-0,5	112,5	109,6	-10,8
13	100,3	109,3	-9,0	117,0	116,5	-9,3
14	118,1	111,6	6,5	121,9	118,1	17,8
15	116,5	122,9	-6,4	127,1	120,4	-1,6
16	134,2	128,5	5,7	132,7	134,2	17,7
17	134,7	137,9	-3,2	137,7	134,7	0,5
18	144,8	141,3	3,5	142,6	144,4	10,1
19	144,4	149,5	-5,1	-	144,8	-0,4
20	159,2	157,3	1,9	-	-	14,8
21	168,2	167,5	0,7	-	-	9,0
22	175,2	172,6	2,6	-	-	7,0
23	174,5	174,5	0,0	-	-	-0,7
24	173,7	-	-	-	-	-0,8

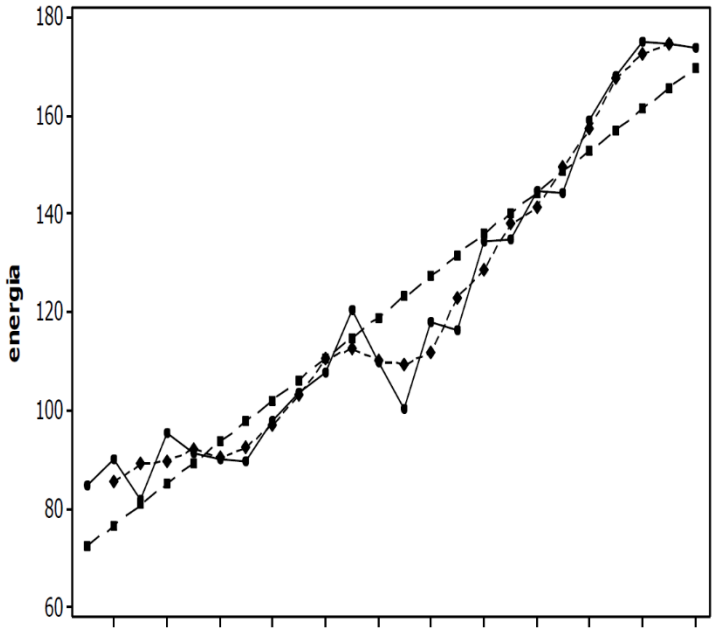


Figura 3.1: Gráfico de Z_t (linha cheia), Z_t^* (linha pontilhada) e $\hat{T}_t$ (linha tracejada).

Se o número de termos que entram na média móvel for par, então estaremos estimando a tendência para um valor T_t cujo índice não coincide com um dos instantes de tempo considerado. Assim, considerando-se a média dos quatro primeiros valores, estaremos estimando a tendência T_t para $t = (2+3)/2 = 2,5$. Para centrar em um instante de tempo dado, considera-se cada termo da média móvel como uma média móvel de médias de duas observações sucessivas.

Por exemplo, para médias móveis de doze observações, tomamos

$$Z_t^{(12)} = \frac{1}{24}\left\{Z_{t-6} + 2Z_{t-5} + \cdots + 2Z_{t+5} + Z_{t+6}\right\},$$

$t = 7, 8, \ldots, 12p + 6$, sendo a série observada durante $(p+1)$ anos.

Exemplo 3.3. Para ilustrar o procedimento, consideremos novamente os dados da Tabela 3.1. Neste caso, a primeira média móvel de doze observações é

$$\begin{aligned} Z_7^{(12)} &= \frac{1}{12}\left\{\frac{Z_1+Z_2}{2}+\frac{Z_2+Z_3}{2}+\cdots+\frac{Z_{11}+Z_{12}}{2}+\frac{Z_{12}+Z_{13}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{24}\{Z_1+2Z_2+2Z_3+\cdots+2Z_{12}+Z_{13}\} \end{aligned}$$

e a última é dada por $Z_{18}^{(12)}$. Os valores de $Z_t^{(12)}$, $t = 7, \ldots, 18$, estão na Tabela 3.3.

Neste caso, perdemos seis observações em cada extremo da série observada. Estimativas da tendência para os instantes iniciais e finais podem ser obtidas por uma extensão do método exposto. Não trataremos deste assunto aqui. Veja Kendall (1973) para detalhes.

2) Médiana Móveis

Em vez de tomar médias móveis, dadas por (3.14), podemos calcular medianas móveis. Assim, o valor suavizado $Z_t^{(n)}$ será

$$Z_t^{(n)} = \text{mediana}(Z_{t-n}, Z_{t-n+1}, \ldots, Z_{t+n}). \tag{3.23}$$

Se Z_t seguir o modelo (3.3), então $Z_t^{(n)}$ será uma estimativa da tendência no instante t e é denominada mediana móvel centrada de ordem $2n+1$.

Exemplo 3.4. Para ilustrar o procedimento, vamos calcular medianas móveis utilizando os dados da Tabela 3.1 e $n = 5$. A primeira mediana móvel é

$$Z_6^{(5)} = \text{mediana}(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_{10}, Z_{11}) = 91,2.$$

Os valores de $Z_t^{(5)}$, $t = 6, \ldots, 19$ estão na Tabela 3.3. Podemos observar a perda de cinco observações em cada extremo da série.

3) "LOwess"

Locally regression scatter plot smoothing.

Isto significa que a suavização é feita através de sucessivos ajustes de retas de mínimos quadrados ponderados a sub-conjunto de dados.

Suponha que queiramos obter o par $(x_j, \hat{Z}_j)$, onde $\hat{Z}_j$ é o valor suavizado de Z_j; no caso de uma série temporal $Z_1, \ldots, Z_N$, os pares são representados por $(t_j, \hat{Z}_j)$ onde t_j é o instante em que Z_j é observado. A Figura 3.2 ilustra o procedimento. Consideramos uma faixa vertical centrada em (t_j, Z_j), contendo q pontos (na figura, $q = 9$). De modo geral, escolhemos $q = [pN]$, onde p é a proporção de pontos na faixa, $0 < p < 1$. Quanto maior o valor de p, mais suave será o ajustamento.

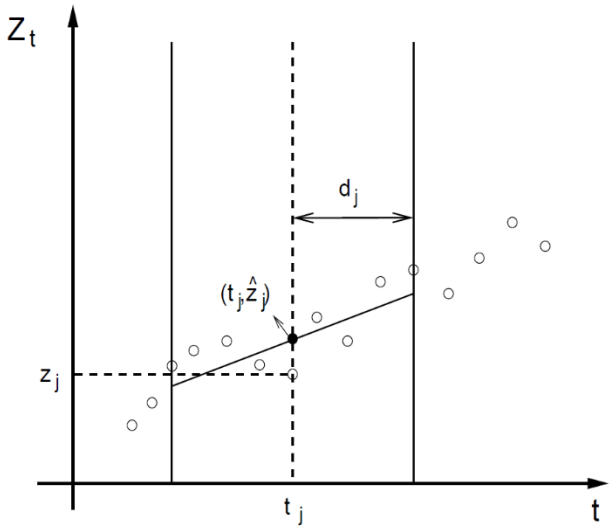


Figura 3.2: O procedimento *lowess*.

Definimos pesos para os pontos vizinhos de (t_j, Z_j), dentro da faixa, de modo que este tenha o maior peso e os vizinhos tenham pesos decrescentes, à medida que t se afasta de t_j. Usamos uma função peso simétrica ao redor de t_j, denominada tricúbica, dada por

$$h(u) = \begin{cases} (1 - |u|^3)^3, & \text{se } |u| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.24}$$

e o peso atribuído a (t_k, Z_k) será

$$h_j(t_k) = h\left(\frac{t_j - t_k}{d_j}\right), \tag{3.25}$$

onde d_j é a distância de t_j ao seu vizinho mais afastado dentro da faixa, veja a Figura 3.3. Ajustamos então uma reta aos q pontos, $Z = a + bt + \varepsilon$, onde a e b são estimados pelos valores que minimizam

$$\sum_{k=1}^{N} h_j(t_k)(Z_k - a - bt_k)^2.$$

O valor suavizado de Z_j é

$$\hat{Z}_j = \hat{a} + \hat{b}t_j, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{3.26}$$

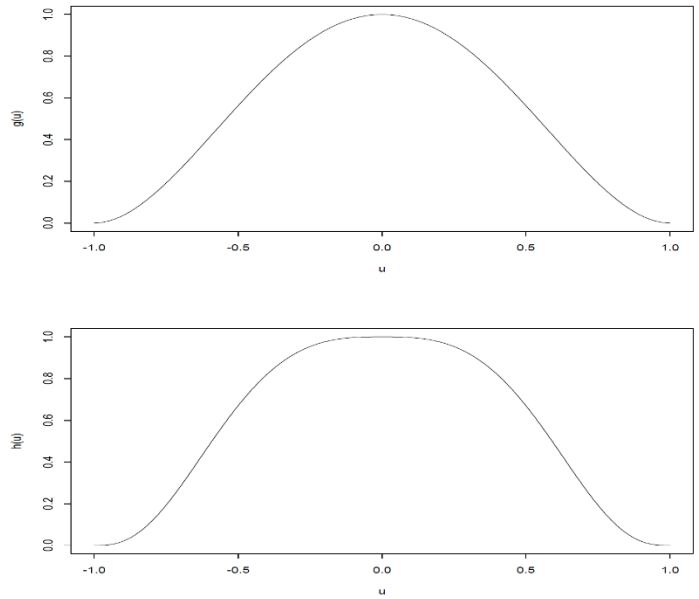


Figura 3.4: (a) função biquadrática; (b) função tricúbica

Se tivermos valores discrepantes (*outliers*), podemos utilizar um procedimento "robusto". Calculamos os resíduos

$$r_i = Z_i - \hat{Z}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

e um gráfico de dispersão destes resíduos no tempo mostrará os valores discrepantes. Definimos novos pesos, baseados nos valores dos resíduos, de modo que pontos com resíduos grandes tenham pesos pequenos e vice-versa. Estes novos pesos robustos são dados pela função biquadrática

$$g(u) = \begin{cases} (1 - |u|^2)^2, & \text{se } |u| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.27}$$

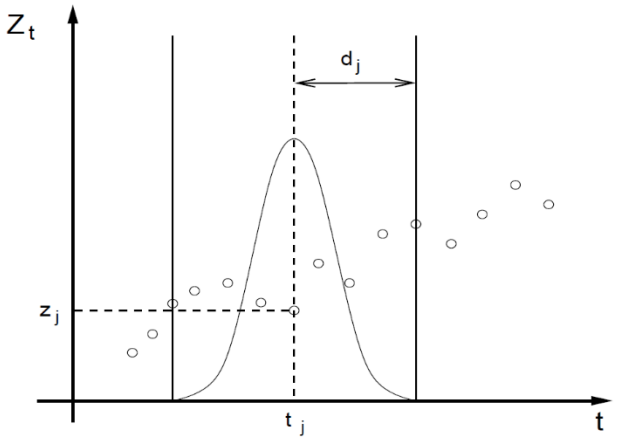


Figura 3.3: Associação de peso a (t_j, Z_j)

Seja m a mediana dos valores absolutos dos resíduos, $|r_i|$. O peso robusto atribuído a (t_k, r_k) é

$$g(t_k) = g\left(\frac{r_k}{6m}\right). \tag{3.28}$$

Note que se r_i for muito menor do que $6m$, o peso será próximo de um e será próximo de zero, caso contrário. A razão de se utilizar $6m$ está no fato de que se os resíduos fossem normais, então $m \approx 2/3$ e $6m \approx 4\sigma$, ou seja, para dados normais, raramente teremos pesos pequenos.

Finalmente, ajustamos uma nova reta aos q pontos, atribuindo a (t_k, Z_k) o peso $h_j(t_k)g(t_k)$. Segue-se que se (t_k, Z_k) for discrepante, r_k será grande e o peso final será pequeno. O procedimento deve ser repetido duas ou mais vezes (em geral, procedimentos robustos envolvem iterações).

Exemplo 3.5. A Figura 3.5 mostra os valores suavizados para os dados da Tabela 3.1 (Energia) usando a função lowess da biblioteca stats do Repositório R, com $f = 2/3$ e $1/3$, iter=3. Esta rotina executa o procedimento robusto com três iterações ("default").

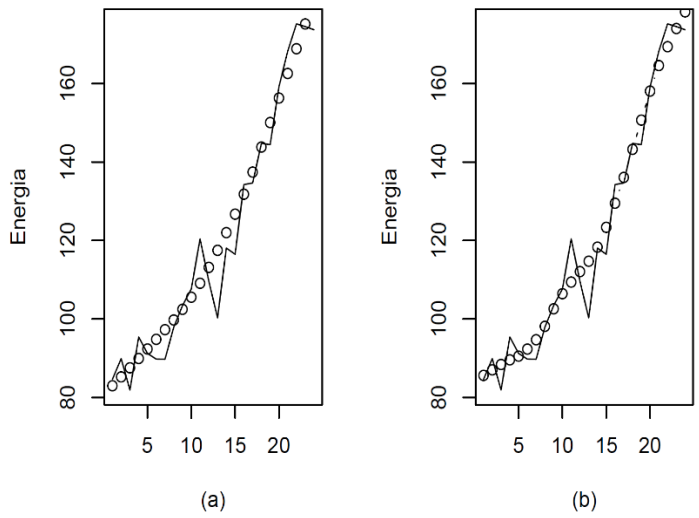


Figura 3.5: Uso do *lowess* com (a) $p = 2/3$ e (b) $p = 1/3$ para a Série Energia. Série (linha cheia), *lowess* (círculos)

4) Diferenças

Considere T_t representada por um polinômio, então tomando-se um número apropriado de diferenças obteremos uma constante.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} T_t &= \beta_0 + \beta_1 t, \\ \Delta T_t &= T_t - T_{t-1} = (\beta_0 + \beta_1 t) - [\beta_0 + \beta_1 (t-1)] = \beta_1. \end{aligned}$$

Ou seja, uma diferença elimina uma tendência linear.

É fácil ver que se T_t for dada por (3.4), então

$$\Delta^d T_t = \begin{cases} d!\beta_d & , \text{se } m = d \\ 0 & , \text{se } m < d. \end{cases} \tag{3.29}$$

Ou seja, dado o modelo (3.3), tomando-se d diferenças, obtemos

$$\Delta^d Z_t = \Delta^d T_t + \Delta^d a_t, \tag{3.30}$$

onde $\Delta^d T_t$ é dado por (3.29) se T_t for um polinômio de grau m. Temos que, neste caso,

$$E(\Delta^d Z_t) = \begin{cases} \Delta^d T_t = \text{ constante}, & \text{se } m = d \\ 0, & \text{se } m < d, \end{cases} \tag{3.31}$$

Consideremos, por exemplo,

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t,$$

onde a_t é ruído branco. Então,

$$\Delta Z_t = \beta_1 + a_t - a_{t-1}.$$

Se o número de diferenças for menor que m, então ainda resultará um processo com tendência, que será não estacionário. Por exemplo, se

$$\begin{aligned} Z_t &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + a_t, \\ \Delta Z_t &= \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_2 t + a_t - a_{t-1} = \beta_0' + \beta_1 t + a_t - a_{t-1}, \end{aligned}$$

que tem uma tendência linear. A segunda diferença $\Delta^2 Z_t$ será estacionária.

Chamando $a_t^* = \Delta^d a_t$, pode-se demonstrar (veja Anderson, 1971) que

$$\mathrm{Var}(a_t^*) = \sigma_a^2 \binom{2d}{d} = \sigma_a^2 \frac{(2d)!}{(d!)^2}, \tag{3.32}$$

$$\mathrm{Cov}(a_t^*, a_{t+s}^*) = \begin{cases} \sigma_a^2 (-1)^s \binom{2d}{d+s} & , s = 0, 1, \ldots, d, \\ 0 & , s = d+1, \ldots \end{cases} \tag{3.33}$$

o que mostra que, tomando-se diferenças, introduz-se correlação nos resíduos.

Concluímos que, tomando-se uma diferença, elimina-se uma tendência linear, se o modelo for aditivo (e elimina-se uma tendência exponencial, se o modelo for multiplicativo, da forma $Z_t = T_t a_t$). Como séries econômicas geralmente têm um crescimento exponencial, frequentemente o procedimento mais adequado para estas séries é tomar

$$\Delta Z_t^* = \Delta \log Z_t, \tag{3.34}$$

isto é, a diferença do logaritmo da série original.

Se a série temporal sob consideração não tiver um comportamento explosivo (sua não estacionariedade for do tipo homogêneo, como definido anteriormente), uma ou duas diferenças será suficiente para se obter estabilidade ou estacionariedade.

Exemplo 3.6. Retomemos o Exemplo 3.1 e calculemos a série de diferenças, ou seja, $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$. Os valores estão na Tabela 3.3 e o gráfico de ΔZ_t na Figura 3.6. Observe-se o caráter "mais estacionário" de ΔZ_t.

Notemos que, tomando-se uma diferença da série Z_t, estamos na realidade utilizando um filtro do tipo descrito na seção anterior, onde os coeficientes c_j são dados por

$$c_j = \begin{cases} -1 & , j = -1 \\ 1 & , j = 0 \\ 0 & , \text{para os demais valores de } j. \end{cases}$$

O mesmo pode ser dito de $\Delta^2 Z_t$ e, em geral, de $\Delta^d Z_t$, para um d inteiro positivo qualquer.

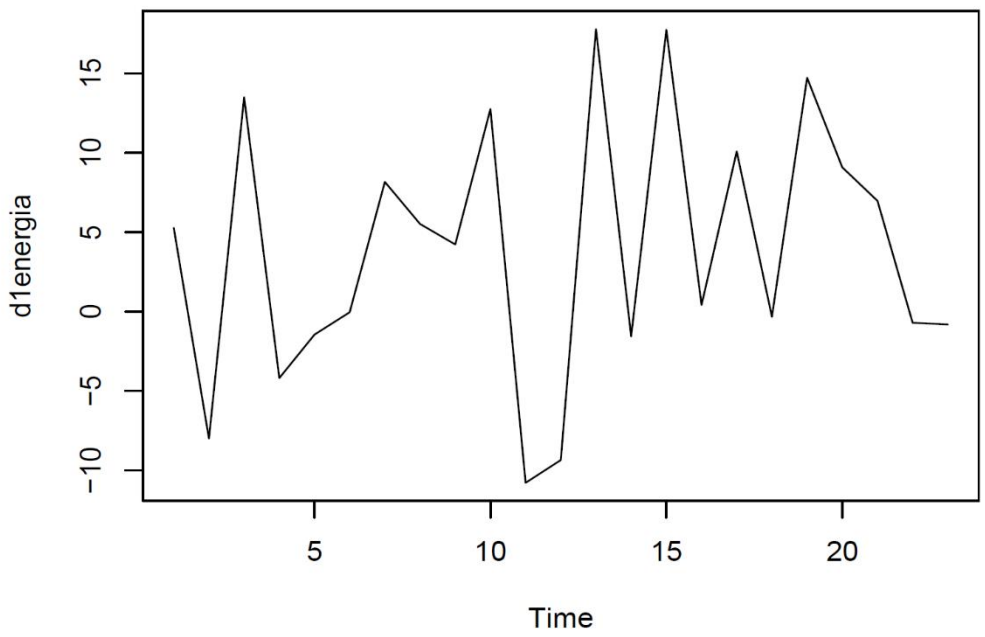


Figura 3.6: Primeira diferença da Série Energia, jan./77 a dez./78.

Tabela 3.3: Estimativas da tendência (Z_t^*) e da série livre de tendência, para os dados da Tabela 3.1, utilizando o método de suavização. ΔZ_t é a primeira diferença, $Z_t^{(12)}$ é a média móvel centrada de 12 meses e $Z_t^{(5)}$ é a mediana móvel centrada de 11 meses.

t	Z_t	Z_t^*	Y_t	$Z_t^{(12)}$	$Z_t^{(5)}$	ΔZ_t
1	84,6	-	-	-	-	-
2	89,9	85,5	4,4	-	-	5,3
3	81,9	89,1	-7,2	-	-	-8,0
4	95,4	89,5	5,9	-	-	13,5
5	91,2	92,1	-0,9	-	-	-4,2
6	89,8	90,2	-0,4	-	91,2	-1,4
7	89,7	92,5	-2,8	97,4	95,4	-0,1
8	97,9	97,0	0,9	99,3	97,9	8,2
9	103,4	103,0	0,4	101,9	100,3	5,5
10	107,6	110,5	-2,9	104,9	103,4	4,2
11	120,4	112,5	7,9	108,4	107,6	12,8
12	109,6	110,1	-0,5	112,5	109,6	-10,8
13	100,3	109,3	-9,0	117,0	116,5	-9,3
14	118,1	111,6	6,5	121,9	118,1	17,8
15	116,5	122,9	-6,4	127,1	120,4	-1,6
16	134,2	128,5	5,7	132,7	134,2	17,7
17	134,7	137,9	-3,2	137,7	134,7	0,5
18	144,8	141,3	3,5	142,6	144,4	10,1
19	144,4	149,5	-5,1	-	144,8	-0,4
20	159,2	157,3	1,9	-	-	14,8
21	168,2	167,5	0,7	-	-	9,0
22	175,2	172,6	2,6	-	-	7,0
23	174,5	174,5	0,0	-	-	-0,7
24	173,7	-	-	-	-	-0,8

Testes para tendência

Pode ser feito de 2 maneiras:

a) Antes da estimação de T_t ;
b) Depois de obter uma estimativa de T_t.

H0: $\beta_1 = 0,$ (não existe tendência);

Ha: $\beta_1 > 0,$ (existe tendência crescente)

Verificar se existe componente de tendência na série antes de aplicar qualquer procedimento para sua estimação.

Se existisse outra componente (como S_t) na série, além de T_t, teríamos de eliminá-la antes de testar a presença de T_t.

Esta observação também vale para o caso em que quisermos testar a presença de S_t: teremos de eliminar, antes, T_t.

Observação: testes devem ser utilizados com cautela e, em geral, são pouco poderosos para detectar alternativas de interesse.

Teste de sequências (Wald-Wolfowitz)

Considere as N observações Z_t, $t = 1, \ldots, N$, de uma série temporal e seja m a mediana destes valores. Atribuímos a cada valor Z_t o símbolo A, se ele for maior ou igual a m, e B se ele for menor que m. Teremos, então, $N = (n_1 \text{ pontos } A) + (n_2 \text{ pontos } B)$.

As hipóteses a serem testada são:

$$H_0\text{: não existe tendência,}$$
$$H_1\text{: existe tendência,}$$

e a estatística usada no teste é

$$T_1 = \text{ número total de sequências (isto é, grupos de símbolos iguais)}$$

Rejeitamos a hipótese nula H_0 se há poucas sequências, ou seja, se T_1 for pequeno. Para um dado α, rejeitamos H_0 se $T_1 < w_\alpha$, onde w_α é o α-quantil da distribuição de T_1, que é tabelado. Veja, por exemplo, Tabela 23 de Conover (1980).

TABLE B.10 (*Continued*)

One-tailed Alternative; $\alpha = 0.05$											
	n_2										
n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	–	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
	–	–	9	10	11	11	12	12	12	13	13
7	–	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6
	–	–	9	10	11	12	13	13	13	14	14
8	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6
	–	–	–	11	12	13	13	14	14	15	15
9	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7
	–	–	–	11	12	13	14	14	15	15	16
10	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7
	–	–	–	11	12	13	14	15	16	16	17
11	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	8
	–	–	–	–	13	14	15	15	16	17	17
12	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8
	–	–	–	–	13	14	15	16	17	17	18

Para n_1 ou n_2 maior que 20 podemos usar a aproximação normal, isto é, $T_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, onde

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2n_1n_2}{N} + 1, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - N)}{N^2(N-1)}}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Vamos considerar o teste de sequências para os dados da Tabela 3.1. A mediana é $m = 113,4$, $n_1 = n_2 = 12$ e $T_1 = 4$. Consultando uma tabela, encontramos $w_\alpha = 8$, logo rejeitamos H_0.

t	Zt		t	Zt		mediana
1	84,6	B	13	100,3	B	113,4
2	89,9	B	14	118,1	A	
3	81,9	B	15	116,5	A	
4	95,4	B	16	134,2	A	
5	91,2	B	17	134,7	A	
6	89,8	B	18	144,8	A	
7	89,7	B	19	144,4	A	
8	97,9	B	20	159,2	A	
9	103,4	B	21	168,2	A	
10	107,6	B	22	175,2	A	
11	120,4	A	23	174,5	A	
12	109,6	B	24	173,7	A	