

MAE 0325 - Aula 2

MODELOS PARA SÉRIES TEMPORAIS

Suponha que queiramos medir a temperatura do ar, de dado local, durante 24 horas; podemos obter um gráfico semelhante ao da Figura 1.1.

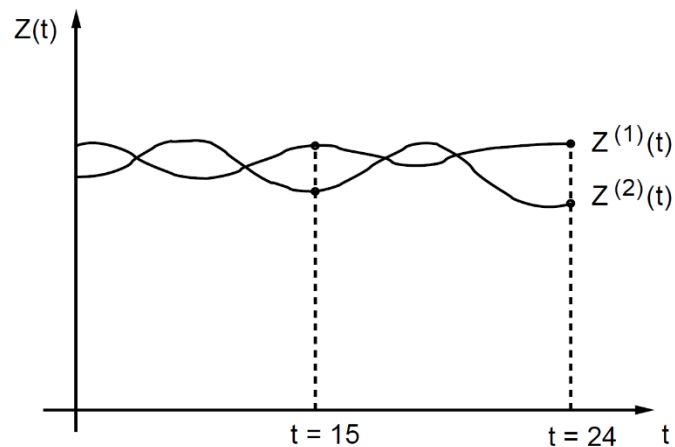


Figura 1.1: Temperatura do ar, de dado local, durante 24 horas

$Z(t)$: a temperatura no instante t (dado em horas, por exemplo).

Notamos que para dois dias diferentes obtemos duas curvas que **não são**, em geral, **as mesmas**. Estas curvas são chamadas **trajetórias** do processo físico que está sendo observado e este (o processo estocástico) nada mais é do que o conjunto de todas as possíveis trajetórias que poderíamos observar.

Cada trajetória é também chamada uma **série temporal** ou função amostral.

Designando-se por $Z^{(1)}(15)$ o valor da temperatura no instante $t = 15$, para a primeira trajetória (primeiro dia de observação), teremos um número real; para o segundo dia, teremos outro número real, $Z^{(2)}(15)$. Em geral, denotaremos uma trajetória qualquer por $Z^{(i)}(t)$. Para **cada t fixo**, teremos os valores de **uma variável aleatória $Z(t)$** , que terá certa distribuição de probabilidades.

Na realidade, o que chamamos de **série temporal** é uma parte de uma trajetória, dentre muitas que poderiam ter sido observadas.

Em algumas situações (como em Oceanografia, por exemplo), quando temos dados experimentais, é possível observar algumas trajetórias do processo sob consideração, mas na maioria dos casos (como em Economia ou Astronomia), quando não é possível fazer experimentações, temos **uma só trajetória para análise**.

1. Processos estocásticos

Definição 1. Seja T um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família $X = \{X(t), t \in T\}$, tal que, para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.

Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade (Ω, A, P) .

Para $t \in T$, $X(t)$ é uma v.a. definida sobre Ω , na realidade $X(t)$ é uma função de dois argumentos, $X(t, w)$, $t \in T$, $w \in \Omega$.

Para **cada t fixo**, $X(t, w)$ é uma v.a. com uma distribuição de probabilidade. É possível que a função de densidade de probabilidade (fdp) no instante t_1 seja diferente da fdp no instante t_2 , mas a situação usual é aquela que a fdp de $X(t, w)$ é mesma, para todos os t .

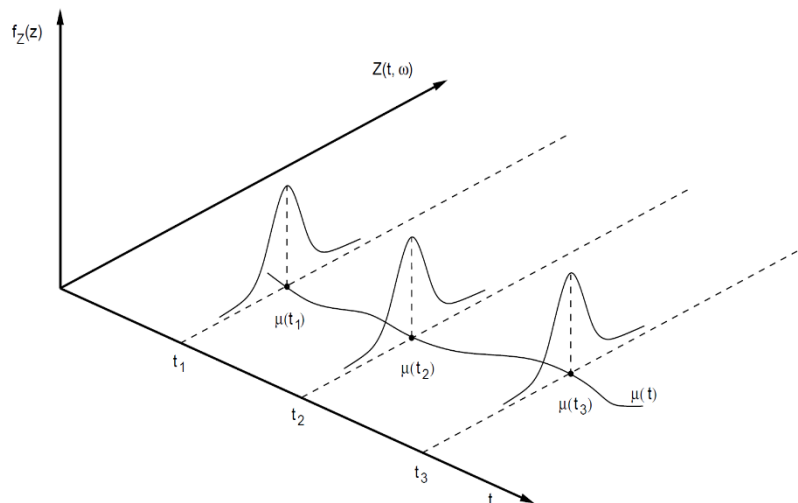


Figura 2.1: Um processo estocástico interpretado como uma família de variáveis aleatórias.

Para **cada w fixo**, uma função de t , ou seja, uma realização ou trajetória do processo, uma série temporal.

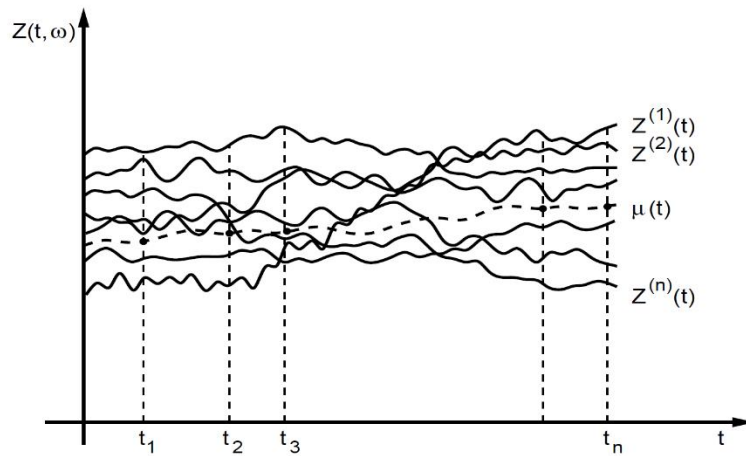


Figura 2.2: Um processo estocástico interpretado como uma família de trajetórias.

2. Especificação de um processo estocástico

A função média:

$$\mu(t) = E(X(t))$$

A função de autocovariância (facv) de X é:

$$\gamma(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}$$

se $t_1 = t_2 = t$,

$$\gamma(t, t) = \text{var}\{X(t)\} = E\{X(t)^2\} - E^2\{X(t)\}$$

A função de auto-correlação (fac) de X é:

$$\rho(t_1, t_2) = \gamma(t_1, t_2) / (\gamma(t_1, t_1) \gamma(t_2, t_2))^{1/2}$$

A função de covariância cruzada entre X e Y é:

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\} - E\{X(t_1)\}E\{Y(t_2)\}$$

A função de correlação cruzada entre X e Y é:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(t_1, t_2) / (\gamma_x(t_1, t_1) \gamma_y(t_2, t_2))^{1/2}$$

3. Processos estacionários

Séries estacionárias são aquelas que desenvolvem no tempo ao redor de uma média constante.

Definição 2: Um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ diz-se **estritamente estacionário** se todas as distribuições finito-dimensionais permanecem as mesmas sob translações no tempo, ou seja,

$$F(X_1, \dots, X_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n)$$

Definição 3: Um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ diz-se **fracamente estacionário** ou **estacionário de segunda ordem** se e somente se

a) $E\{X(t)\} = \mu(t) = \mu$, constante;

b) $E\{X(t)^2\}$ finita

c) $\gamma(t_1, t_2) = \text{Cov}\{X(t_1)X(t_2)\}$ é uma função de $|t_1 - t_2|$.

Definição 4: Um processo estocástico $X = \{X(t), t \in T\}$ diz-se **Gaussiano** se, para qualquer conjunto $t_1, t_2, \dots, t_n$ de T , as v.a. $X(t_1), \dots, X(t_n)$ têm distribuição **normal n-variada**.

Definição 5: As séries $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ são **conjuntamente estacionárias** se a covariância cruzada depende apenas de $|t_1 - t_2|$, isto é, $\gamma_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(|t_1 - t_2|)$.

4. Função de autocovariância

Definição 6: Uma função real K é **não negativa definida** se e somente se

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K(T_i - T_j) \geq 0$$

para quaisquer números reais $a_1, \dots, a_n$ e $T_1, \dots, T_n \in \mathbb{R}$.

Seja $\{X(t), t \in T\}$ um processo estacionário real discreto, de média zero e facv $\gamma_\tau = E\{X_t X_{t+\tau}\}$.

Proposição 1: A facv γ_τ satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\gamma_0 > 0$;

b) $\gamma_\tau = \gamma_{-\tau}$;

c) $|\gamma_\tau| \leq \gamma_0$

d) γ_τ é não negativa definida, no sentido que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma_{\tau_i - \tau_j} \geq 0$$

para quaisquer números reais $a_1, \dots, a_n$ e $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}$.

Observação: a recíproca da propriedade d) também é verdadeira, isto é, dada uma função γ_τ , tendo a propriedade d), existe um processo estocástico $X(t)$, tendo γ_τ como facv.

Tipicamente, a facv de um processo estacionário tende a zero, para $|\tau| \rightarrow \infty$.

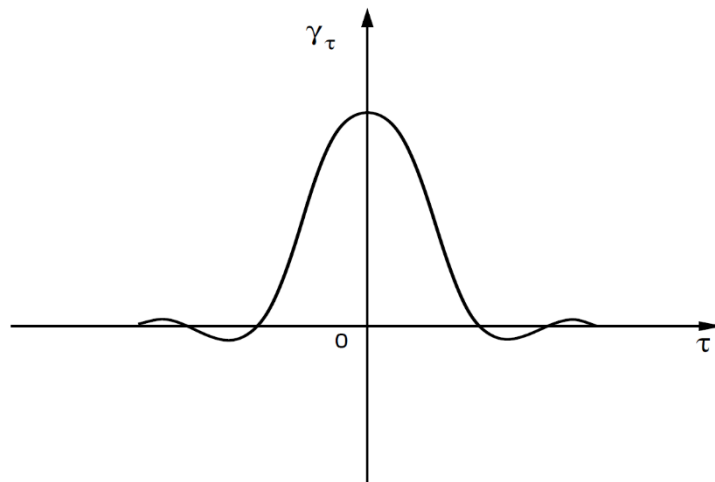


Figura 2.3: Função de autocovariância típica.

Teorema: uma função real definida sobre Z é a função de autocovariância de um processo estacionário se e somente se ela for não **negativa definida e par**.

Exemplos:

Exemplo 2.1. Sequência aleatória

Consideremos $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ uma sequência de v.a. definidas no mesmo espaço amostral Ω . Aqui, $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots\}$ e temos um processo com parâmetro discreto, ou uma sequência aleatória. Para todo $n \geq 1$, podemos escrever

$$P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\}P\{X_2 = a_2|X_1 = a_1\} \\ \times \dots \times P\{X_n = a_n|X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}\}.$$

Aqui, os a_j 's representam estados do processo e o espaço dos estados pode ser tomado como o conjunto dos reais. O caso mais simples é aquele em que temos uma sequência $\{X_n, n \geq 1\}$ de v.a. **mutuamente independentes** e neste caso temos

$$P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \dots P\{X_n = a_n\}. \quad (2.18)$$

Se as v.a. $X_1, X_2, \dots$ tiverem todas a mesma distribuição, teremos, então, uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas (**i.i.d.**, brevemente). Neste caso, o processo X_n é estacionário. Se $E\{X_n\} = \mu$, $\text{Var}\{X_n\} = \sigma^2$, para todo $n \geq 1$, então

$$\gamma_\tau = \text{Cov}\{X_n, X_{n+\tau}\} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{se } \tau = 0 \\ 0, & \text{se } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Segue-se que $\rho_\tau = 1$, para $\tau = 0$ e $\rho_\tau = 0$, caso contrário.

Definição 2.6. Dizemos que $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é **um ruído branco discreto** se as v.a. ε_t são não correlacionadas, isto é, $\text{Cov}\{\varepsilon_t, \varepsilon_s\} = 0, t \neq s$.

Tal processo será **estacionário** se **$E\{\varepsilon_t\} = \mu_\varepsilon$ e $\text{Var}\{\varepsilon_t\} = \sigma_\varepsilon^2$** , para todo t . Segue-se que a facv de ε_t é dada por (2.19).

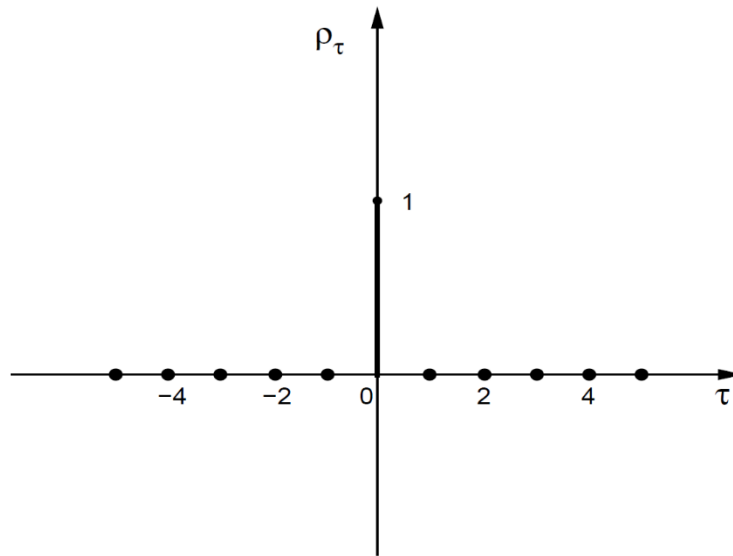


Figura 2.4: Fac de um ruído branco.

Obviamente, se as v.a. ε_t são independentes, elas também serão não correlacionadas. Uma sequência de v.a. *i.i.d.*, como definida acima, é chamada um *processo puramente aleatório*.

Ilustramos na Figura 2.4 a função de autocorrelação (fac) de um ruído branco. De agora em diante iremos supor que $\mu_\varepsilon = 0$. Escreveremos, brevemente,

$$\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

No caso de um processo puramente aleatório, escreveremos

$$\varepsilon_t \sim i.i.d. (0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Mean Function of a Moving Average Series

If w_t denotes a white noise series, then $\mu_{wt} = E(w_t) = 0$ for all t . The top series in Figure 1.8 reflects this, as the series clearly fluctuates around a mean value of zero. Smoothing the series as in Example 1.9 does not change the mean because we can write

$$\mu_{vt} = E(v_t) = \frac{1}{3}[E(w_{t-1}) + E(w_t) + E(w_{t+1})] = 0.$$

$$v_t = \frac{1}{3}(w_{t-1} + w_t + w_{t+1}),$$

Autocovariance of White Noise

The white noise series w_t has $E(w_t) = 0$ and

$$\gamma_w(s, t) = \text{COV}(w_s, w_t) = \begin{cases} \sigma_w^2 & s = t, \\ 0 & s \neq t. \end{cases} \quad (1.12)$$

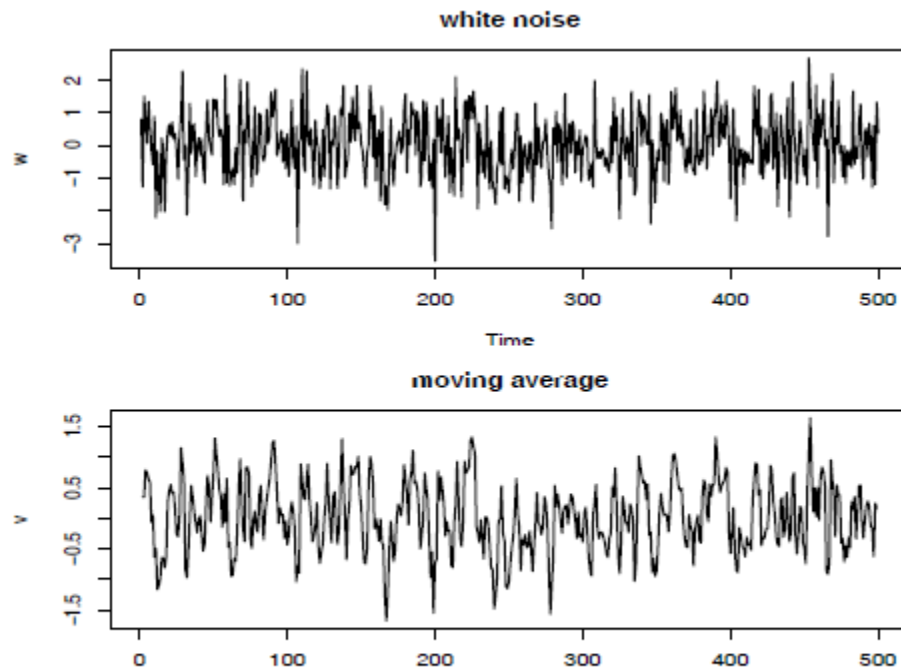


Fig. 1.8. Gaussian white noise series (top) and three-point moving average of the Gaussian white noise series (bottom).

Autocovariance of a Moving Average

Consider applying a three-point moving average to the white noise series w_t of the previous example as in Example 1.9. In this case,

$$\gamma_v(s, t) = \text{cov}(v_s, v_t) = \text{cov}\left\{\frac{1}{3}(w_{s-1} + w_s + w_{s+1}), \frac{1}{3}(w_{t-1} + w_t + w_{t+1})\right\}.$$

When $s = t$ we have³

$$\begin{aligned}\gamma_v(t, t) &= \frac{1}{9}\text{cov}\{(w_{t-1} + w_t + w_{t+1}), (w_{t-1} + w_t + w_{t+1})\} \\ &= \frac{1}{9}[\text{cov}(w_{t-1}, w_{t-1}) + \text{cov}(w_t, w_t) + \text{cov}(w_{t+1}, w_{t+1})] \\ &= \frac{3}{9}\sigma_w^2.\end{aligned}$$

When $s = t + 1$,

$$\begin{aligned}\gamma_v(t+1, t) &= \frac{1}{9}\text{cov}\{(w_t + w_{t+1} + w_{t+2}), (w_{t-1} + w_t + w_{t+1})\} \\ &= \frac{1}{9}[\text{cov}(w_t, w_t) + \text{cov}(w_{t+1}, w_{t+1})] \\ &= \frac{2}{9}\sigma_w^2,\end{aligned}$$

using (1.12). Similar computations give $\gamma_v(t-1, t) = 2\sigma_w^2/9$, $\gamma_v(t+2, t) = \gamma_v(t-2, t) = \sigma_w^2/9$, and 0 when $|t-s| > 2$. We summarize the values for all s and t as

$$\gamma_v(s, t) = \begin{cases} \frac{3}{9}\sigma_w^2 & s = t, \\ \frac{2}{9}\sigma_w^2 & |s - t| = 1, \\ \frac{1}{9}\sigma_w^2 & |s - t| = 2, \\ 0 & |s - t| > 2. \end{cases} \quad (1.13)$$

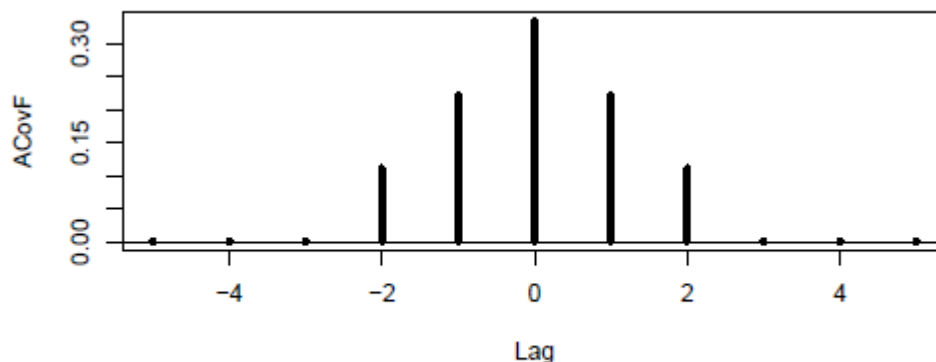


Fig. 1.12. Autocovariance function of a three-point moving average.

Example 1.11 Random Walk with Drift

A model for analyzing trend such as seen in the global temperature data in Figure 1.2, is the random walk with drift model given by

$$x_t = \delta + x_{t-1} + w_t \quad (1.3)$$

for $t = 1, 2, \dots$, with initial condition $x_0 = 0$, and where w_t is white noise. The constant δ is called the drift, and when $\delta = 0$, (1.3) is called simply a random walk. The term random walk comes from the fact that, when $\delta = 0$, the value of the time series at time t is the value of the series at time $t - 1$ plus a completely random movement determined by w_t . Note that we may rewrite (1.3) as a cumulative sum of white noise variates. That is,

$$x_t = \delta t + \sum_{j=1}^t w_j \quad (1.4)$$

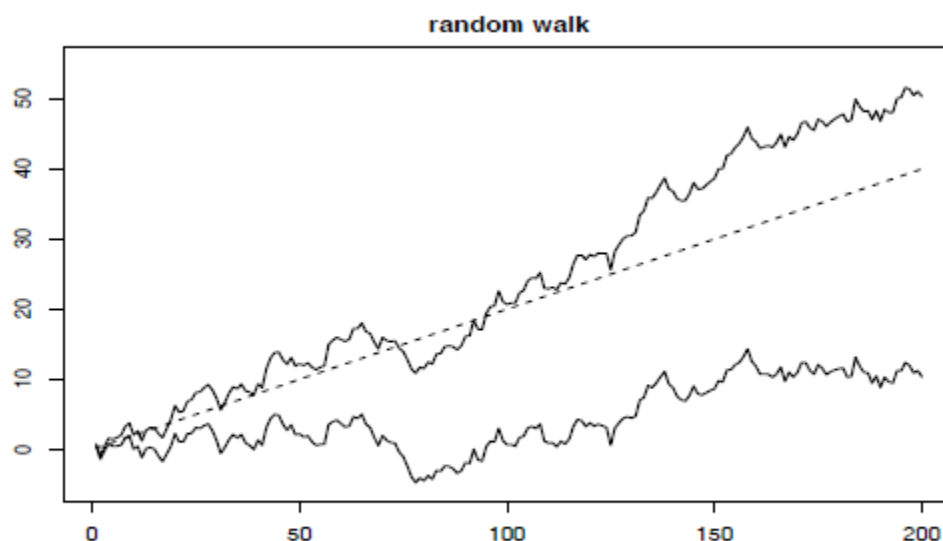


Fig. 1.10. Random walk, $\sigma_w = 1$, with drift $\delta = .2$ (upper jagged line), without drift, $\delta = 0$ (lower jagged line), and a straight line with slope .2 (dashed line).

Mean Function of a Random Walk with Drift

Consider the random walk with drift model given in (1.4),

$$x_t = \delta t + \sum_{j=1}^t w_j, \quad t = 1, 2, \dots$$

Because $E(w_t) = 0$ for all t , and δ is a constant, we have

$$\mu_{xt} = E(x_t) = \delta t + \sum_{j=1}^t E(w_j) = \delta t$$

Autocovariance of a Random Walk

For the random walk model, $x_t = \sum_{j=1}^t w_j$, we have

$$\gamma_x(s, t) = \text{cov}(x_s, x_t) = \text{cov}\left(\sum_{j=1}^s w_j, \sum_{k=1}^t w_k\right) = \min\{s, t\} \sigma_w^2,$$

Example 1.12 Signal in Noise

Many realistic models for generating time series assume an underlying signal with some consistent periodic variation, contaminated by adding a random noise. For example, it is easy to detect the regular cycle fMRI series displayed on the top of Figure 1.6. Consider the model

$$x_t = 2 \cos(2\pi t/50 + .6\pi) + w_t \quad (1.5)$$

for $t = 1, 2, \dots, 500$, where the first term is regarded as the signal, shown in the upper panel of Figure 1.11. We note that a sinusoidal waveform can be written as

$$A \cos(2\pi\omega t + \phi), \quad (1.6)$$

where A is the amplitude, ω is the frequency of oscillation, and ϕ is a phase shift. In (1.5), $A = 2$, $\omega = 1/50$ (one cycle every 50 time points), and $\phi = .6\pi$.

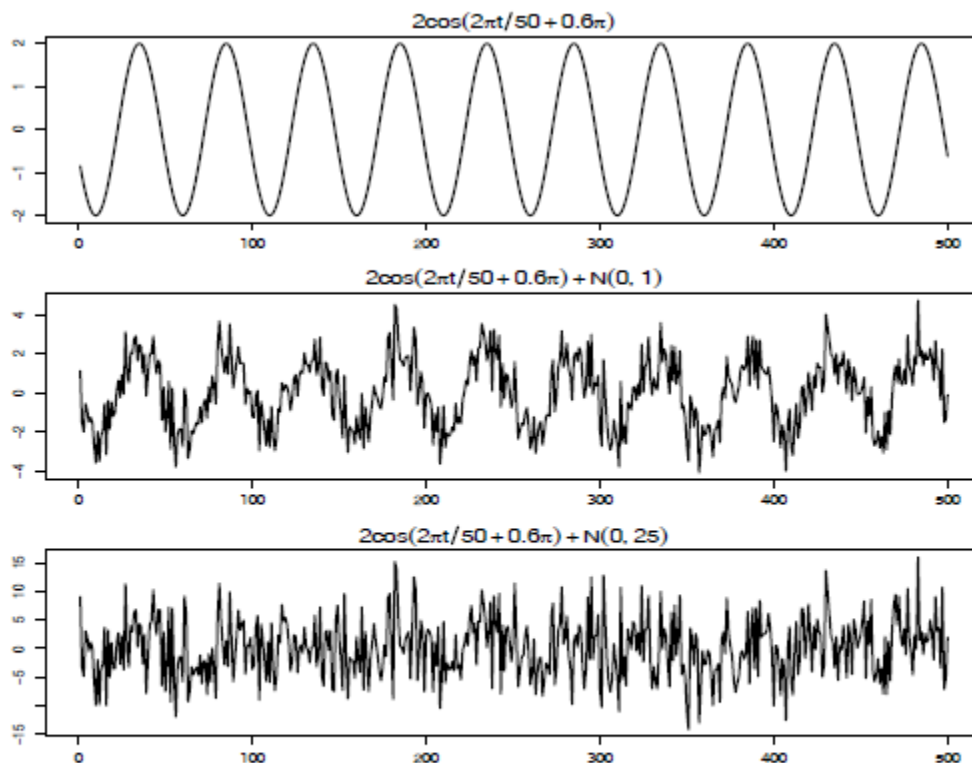


Fig. 1.11. Cosine wave with period 50 points (top panel) compared with the cosine wave contaminated with additive white Gaussian noise, $\sigma_w = 1$ (middle panel) and $\sigma_w = 5$ (bottom panel); see (1.5).

Example 1.15 Mean Function of Signal Plus Noise

A great many practical applications depend on assuming the observed data have been generated by a fixed signal waveform superimposed on a zero-mean noise process, leading to an additive signal model of the form (1.5). It is clear, because the signal in (1.5) is a fixed function of time, we will have

$$\begin{aligned}\mu_{xt} &= E(x_t) = E[2 \cos(2\pi t/50 + .6\pi) + w_t] \\ &= 2 \cos(2\pi t/50 + .6\pi) + E(w_t) \\ &= 2 \cos(2\pi t/50 + .6\pi),\end{aligned}$$

and the mean function is just the cosine wave.

Example 1.10 Autoregressions

Suppose we consider the white noise series w_t of Example 1.8 as input and calculate the output using the second-order equation

$$x_t = x_{t-1} - .9x_{t-2} + w_t \quad (1.2)$$

successively for $t = 1, 2, \dots, 500$. Equation (1.2) represents a regression or prediction of the current value x_t of a time series as a function of the past two values of the series, and, hence, the term autoregression is suggested

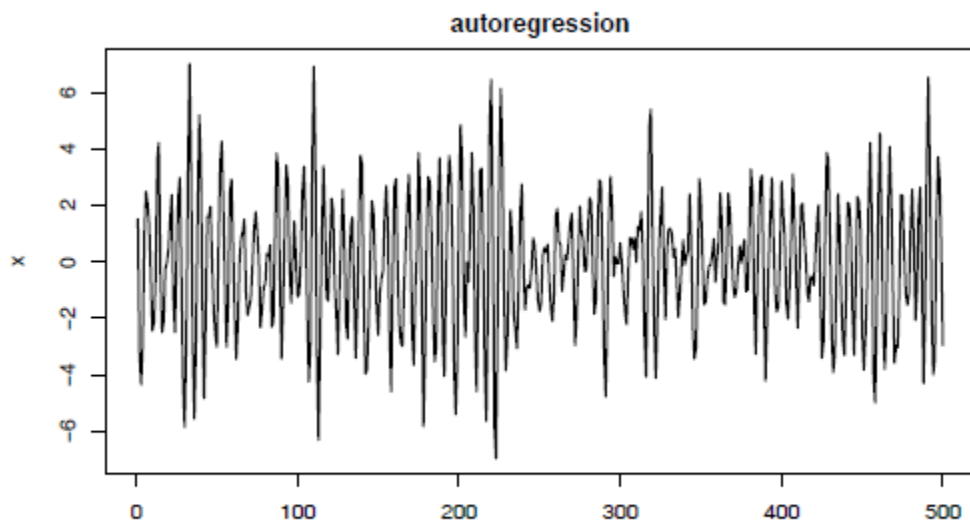


Fig. 1.9. Autoregressive series generated from model (1.2).

Example 1.21 Joint Stationarity

Consider the two series, x_t and y_t , formed from the sum and difference of two successive values of a white noise process, say,

$$x_t = w_t + w_{t-1}$$

and

$$y_t = w_t - w_{t-1},$$

where w_t are independent random variables with zero means and variance σ_w^2 . It is easy to show that $\gamma_x(0) = \gamma_y(0) = 2\sigma_w^2$ and $\gamma_x(1) = \gamma_x(-1) = \sigma_w^2$, $\gamma_y(1) = \gamma_y(-1) = -\sigma_w^2$. Also,

$$\gamma_{xy}(1) = \text{cov}(x_{t+1}, y_t) = \text{cov}(w_{t+1} + w_t, w_t - w_{t-1}) = \sigma_w^2$$

because only one term is nonzero (recall footnote 3 on page 20). Similarly, $\gamma_{xy}(0) = 0$, $\gamma_{xy}(-1) = -\sigma_w^2$. We obtain, using (1.27),

$$\rho_{xy}(h) = \begin{cases} 0 & h = 0, \\ 1/2 & h = 1, \\ -1/2 & h = -1, \\ 0 & |h| \geq 2. \end{cases}$$

Clearly, the autocovariance and cross-covariance functions depend only on the lag separation, h , so the series are jointly stationary.

5. Tipos de modelos

- a) **modelos paramétricos**: a análise é feita no domínio do tempo;
- os modelos de regressão
 - os modelos de auto-regressivos e de médias moveis(ARMA)
 - os modelos auto-regressivo integrados e de médias mpveis(ARIMA)
 - modelos de memória longa (ARFIMA)
 - modelos estruturais e modelos não lineares
- b) **modelos não paramétricos**: a análise é feita no domínio de frequência. A função de autocovariância e sua transformada de Fourier, o espectro.