NOÇÕES DE TESTE DE HIPÓTESES (II)

NÍVEL DESCRITIVO

Exemplo 1: Um industrial afirma que seu processo de fabricação produz 90% de peças dentro das especificações. O IPEM deseja investigar se este processo de fabricação ainda está sob controle.

Sendo p a proporção de peças dentro das especificações, as hipóteses de interesse são:

$$\boxed{\begin{array}{l} H\text{: } p = 0{,}9 \\ A\text{: } p < 0{,}9 \end{array}}$$

Ou seja,

H: o processo está sob controle

A: o processo não está sob controle

Selecionamos uma amostra aleatória de 15 itens e observamos o número de itens satisfatórios (X),

então $X \sim$ **b(15, p).**

Região crítica: RC= $\{ X \leq k \}$

$\Rightarrow$

Logo,

para α **= 6%** temos $k = 11$ e RC = $\{X \leq 11\}$.

Para α **= 1%** temos $k = 9$ e RC = $\{X \leq 9\}$.

Se observamos X = 10 peças satisfatórias, então

a) se α **= 6%** $\Rightarrow$ **10 $\in$ RC**

Rejeitamos *H* ao nível de significância de 6%.

b) se α **= 1%** $\Rightarrow$ **10 $\notin$ RC**

Não rejeitamos *H* ao nível de significância de 1%.

Crítica: arbitrariedade na escolha da RC (ou do nível de significância).

Sugestão: determinar o nível de significância associado à evidência experimental, que é denominado **nível descritivo**.

Binomial n = 15 e p = 0,90

x	P ($X = x$)
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0000
4	0,0000
5	0,0000
6	0,0000
7	0,0000
8	0,0003
9	0,0019
10	0,0105
11	0,0428
12	0,1285
13	0,2669
14	0,3432
15	0,2059

Binomial n = 15 e p = 0,90

x	P ($X = x$)
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0000
4	0,0000
5	0,0000
6	0,0000
7	0,0000
8	0,0003
9	0,0019
10	0,0105
11	0,0428
12	0,1285
13	0,2669
14	0,3432
15	0,2059

NÍVEL DESCRITIVO: *P* (ou *P*-valor ou "*P*-value")

Nesse exemplo, a região crítica é da forma

$$RC = \{ X \leq k \}$$

O nível descritivo é calculado por, para $x_{obs} = 10$,

$$P = P\,(X \leq 10 \mid p = 0{,}9) = 0{,}0127$$

"Essa probabilidade *P* mede a **força da evidência** contida nos dados, contra a hipótese nula *H*."

Como saber se essa evidência é suficiente para rejeitar H?

Se o valor de ***P*** é "pequeno", então é pouco provável observarmos valores iguais ou mais extremos que o da amostra, supondo a hipótese nula ***H*** verdadeira. Logo, há indícios que a hipótese nula não seja verdadeira e, tendemos a rejeitá-la.

Para valores "não tão pequenos" de ***P*** , não fica evidente que a hipótese nula ***H*** seja falsa, portanto, tendemos a não rejeitá-la.

Assim,

P "pequeno" $\Rightarrow$ rejeitamos ***H***

P "não pequeno" $\Rightarrow$ não rejeitamos ***H***

*Quão "pequeno" deve ser o valor de **P** para rejeitarmos **H** ?*

Lembrando que a idéia inicial de P era considerar um nível de significância associado à evidência amostral, então devemos compará-lo com o nível de significância α fixado, de modo que,

$$P \leq \alpha \Rightarrow \text{rejeitamos } H$$
$$P > \alpha \Rightarrow \text{não rejeitamos } H$$

Se $P \leq \alpha$, dizemos que a amostra forneceu evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula H.

No exemplo, $P = 0{,}0127$.

Adotando $\alpha = 0{,}05$, temos $P < \alpha$ e, portanto, rejeitamos H, ou seja, concluímos que o processo não está sob controle.

Observações:

- Quanto menor o valor de P maior é a evidência contra a hipótese nula H, contida nos dados.

- Quanto menor o nível de significância α fixado, mais forte deve ser a evidência contra a hipótese nula, para que ela seja rejeitada.

- Quando a hipótese nula é rejeitada para o nível de significância α fixado, diz-se também que a amostra é **significante ao nível de significância** α.

Exemplo 2: A diretoria de uma escola acredita que neste ano a proporção p de alunos usuários da Internet é maior que os 70% encontrados no ano anterior. Se uma pesquisa com 30 alunos, escolhidos ao acaso, mostrou que 26 são usuários da Internet, podemos concluir que a afirmação da diretoria é verdadeira?

(1) Hipóteses estatísticas:

$$\boxed{\begin{array}{l} H\text{: } p = 0{,}7 \\ A\text{: } p > 0{,}7 \end{array}}$$

(2) Nível de significância: adotando $\alpha = 0{,}05$.

(3) A evidência na amostra.

Sendo X o número de usuários em 30 entrevistados, observamos $x = 26$ usuários da Internet.

(4) Calcular o nível descritivo do teste.

$$P = \mathrm{P}\,(X \geq 26 \mid p = 0{,}7) \quad = \quad 0{,}0301$$

(5) Decisão e conclusão.

Como $P < \alpha \quad \Rightarrow$ decidimos por rejeitar H.

Logo, concluímos que há indícios suficientes para afirmar que a proporção de alunos usuários de internet aumentou neste ano.

Binomial com n = 30 e p = 0,70

x	P ($X = x$)
10	0,0000
11	0,0001
12	0,0005
13	0,0015
14	0,0042
15	0,0106
16	0,0231
17	0,0444
18	0,0749
19	0,1103
20	0,1416
21	0,1573
22	0,1501
23	0,1219
24	0,0829
25	0,0464
26	0,0208
27	0,0072
28	0,0018
29	0,0003
30	0,0000

Uso da aproximação normal

Exemplo 3: Pelo Anuário do IBGE de 1988, a proporção de analfabetos em uma cidade era de 15%. Em 1993, entre 200 entrevistados dessa cidade, 27 eram analfabetos. Esses dados suportam a tese de diminuição do analfabetismo na cidade de 1988 para 1993?

(1) Estabelecer hipóteses

Sendo p a proporção populacional de analfabetos na cidade em 1993, as hipóteses de interesse são:

$$\boxed{\begin{array}{l} H: p = 0{,}15 \\ A: p < 0{,}15 \end{array}}$$

(2) Fixar nível de significância

Por exemplo, $\alpha = 5\%$ ($\alpha = 0{,}05$).

(3) Observar a evidência na amostra

Seja X o número de analfabetos entre os 200 cidadãos entrevistados em 1993.

$$X \sim \mathbf{b}(200, p).$$

Foram observados 27 analfabetos $\Rightarrow x_{obs} = 27$

(4) Determinar o nível descritivo

$\boldsymbol{P} = \mathrm{P}\,(X \leq 27 \mid p = 0{,}15)$

Binomial com n = 200 e p = 0,15

x	P($X = x$)
12	0,0000
13	0,0001
14	0,0003
15	0,0006
16	0,0011
17	0,0022
18	0,0039
19	0,0066
20	0,0106
21	0,0160
22	0,0230
23	0,0314
24	0,0409
25	0,0508
26	0,0603
27	0,0686
28	0,0748
29	0,0783
30	0,0788
31	0,0762
32	0,0711
33	0,0638
34	0,0553
35	0,0463
36	0,0375

⇐

Cálculo exato (pela binomial): $\Rightarrow$

$$P = P(X \leq 27 \mid p = 0{,}15) = \mathbf{0{,}3164}$$

Usando a aproximação normal:

$E(X) = np = 200 \times 0{,}15 = 30$
$Var(X) = np(1-p) = 200 \times 0{,}15 \times 0{,}85 = 25{,}5$
$DP(X) = \sqrt{25{,}5} = 5{,}05$

$$P = P(X \leq 27 \mid p = 0{,}15)$$

$$\cong P\{Z \leq (27 - 30)/5{,}05\} = P(Z \leq -0{,}59) = 0{,}2776$$

(5) Decisão e conclusão

Como $P > \alpha$, decidimos por não rejeitar a hipótese nula H.

Portanto, ao nível de significância de 5%, não há evidências suficiente para concluir que o índice de analfabetismo na cidade diminuiu de 1988 para 1993.

Nível descritivo para hipótese alternativa bilateral

Nos exemplos anteriores, as hipóteses alternativas eram unilaterais (**A**: $p > p_0$ ou **A**: $p < p_0$). Nesses casos, o nível descritivo mede a probabilidade de se observar valores iguais ou mais extremos do que o encontrado na amostra ($X \geq x_{obs}$ ou $X \leq x_{obs}$), ou equivalentemente, o desvio do valor amostral à direita ou à esquerda do valor esperado sob a hipótese nula.

Quando a hipótese alternativa é bilateral (**A**: $p \neq p_0$), o nível descritivo mede o quanto o valor amostral pode se distanciar do valor esperado em ambas as direções.

Exemplo 4: **(moeda)** Se em 100 arremessos independentes de uma moeda observarmos 65 caras, podemos afirmar que moeda não é honesta ?

(1) Estabelecer hipóteses

Sendo p a probabilidade de "cara" da moeda, as hipóteses de interesse são

$$H: p = 0{,}5$$

$$A: p \neq 0{,}5$$

ou seja, a moeda é honesta (H) ou é desequilibrada (A).

(2) Fixar nível de significância

Por exemplo, $\alpha = 5\%$ ($\alpha = 0{,}05$).

(3) Observar a evidência na amostra

Seja X o número de caras obtidas em 100 arremessos.

$$x_{obs} = 65 \text{ caras}$$

(4) Determinar o nível descritivo

Se a moeda fosse honesta, o número esperado de caras nos 100 arremessos seria 50. Observamos um desvio de $|65 - 50| = 15$ unidades em relação ao número esperado de caras.

$\boldsymbol{P} = P(X \geq 65 \text{ ou } X \leq 35 \mid \boldsymbol{p} = 0{,}5)$

(por simetria) $= 2\, P(X \geq 65 \mid \boldsymbol{p} = 0{,}5)$

Se a moeda é honesta,

$E(X) = np = 100 \times 0{,}5 = 50$
$Var(X) = np(1-p) = 100 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 25$
$DP(X) = \sqrt{25} = 5$

então, $\boldsymbol{P} = 2\, P(X \geq 65 \mid \boldsymbol{p} = 0{,}5)$

$\cong 2\, P\{ Z \geq (65-50)/5 \} = 2\, P(Z \geq 3) = 0{,}0027,$

com Z representando a distribuição Normal(0,1).

Como o valor de P é pequeno, um número de caras tão afastado da média como o que foi observado, dificilmente ocorre quando arremessamos uma moeda honesta 100 vezes.

Isso nos leva a duvidar da honestidade da moeda. Logo, a conclusão abaixo procede.

(5) Decisão e conclusão

Como $P < \alpha$, decidimos por rejeitar a hipótese nula H. Ou seja, concluímos que há evidências suficiente para se afirmar que a moeda é desequilibrada, ao nível de significância de 5%.

RESUMO

(1) Estabelecer as **hipóteses**:

$H: p = p_0$ contra uma das alternativas

$A: p \neq p_0$, $A: p > p_0$ ou $A: p < p_0$.

(2) Escolher um **nível de significância** α.

(3) Selecionar uma **amostra** casual simples e determinar o número x_{obs} de "indivíduos" na amostra portadores do atributo desejado.

(4) Determinar o **nível descritivo** P

Se A: $p > p_0$, $P = \mathrm{P}\,(X \geq x_{obs} \mid p = p_0)$.

Se A: $p < p_0$, $P = \mathrm{P}\,(X \leq x_{obs} \mid p = p_0)$.

Se A: $p \neq p_0$, $P = 2\,\mathrm{P}\,(X \leq x_{obs} \mid p = p_0)$ (se $x_{obs} \leq np_0$)

ou $2\,\mathrm{P}\,(X \geq x_{obs} \mid p = p_0)$ (se $x_{obs} \geq np_0$)

Para n grande, use a aproximação normal.

(5) **Decidir**, comparando P com o nível de significância α, e **concluir**.

Se $P \leq \alpha \Rightarrow$ rejeitamos H

Se $P > \alpha \Rightarrow$ não rejeitamos H