MAE 229 - Introdução à Probabilidade e Estatística II
Resolução Lista 3

Professor: Pedro Morettin

Exercício 1

(a) A hipótese nula H_0 é de que a média de vendas μ permanece inalterada, enquanto que a hipótese alternativa H_1 é de que houve melhora nas vendas, i.e.:

$$H_0 : \mu = 320$$

$$H_1 : \mu > 320$$

(b) Neste teste a estatística considerada é a média amostral $\bar{X}$. A região crítica do teste é: $RC = \{\bar{X} \quad k\}$, em que k é tal que $P(\bar{X} \quad k|\mu = 320) = 0,05$. Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 5%.

Sob H_0, temos que $\bar{X} \quad N(\mu, \frac{2}{n})$ para n suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso, , e . Assim, sob $_0$ temos que:

Assim, e rejeitamos , se .

(c) Para calcular o nível descritivo do teste temos calcular a probabilidade de se observar valores mais extremos do que o encontrado na amostra, supondo que a hipótese nula seja verdadeira:

Assim, temos que o valor-p é de 3,04%, sendo menor que o nível de significância do teste . Com isso, rejeitamos . Logo, há evidências de que as vendas melhoraram. Chegaríamos a mesma conclusão usando o valor de encontrado na letra (b), uma vez que .

Exercício 2

(a) A hipótese nula é de que a proporção de pares defeituosos continua em 10%, enquanto que a hipótese alternativa é de que houve piora, i.e:

(b) Neste teste a estatística considerada é a proporção amostral . A região crítica do teste é: , em que é tal que . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 9%.

Sob , temos que para suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso, . Assim, sob temos que:

Assim, e rejeitamos , se .

(c) As remessas cujas proporções são 25%, 16%, 24% e 21% devem ser rejeitadas, uma vez que há evidências de que o processo piorou.

Exercício 3

A região crítica do teste é: , em que . Ou seja, estamos querendo encontrar a probabilidade de erro tipo I dada esta região crítica, sendo que agora , ou seja, .

Assim, para esta região crítica temos um nível de significância para o teste de 14,6%.

Exercício 4

(a) A hipótese nula é de que a altura média continua em até 8,5, enquanto que a hipótese alternativa é de aumentou, i.e:

Neste teste a estatística considerada é a média amostral . A região crítica do teste é: , em que é tal que . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 5%.

Sob , temos que para suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso, , e . Assim, sob temos que:

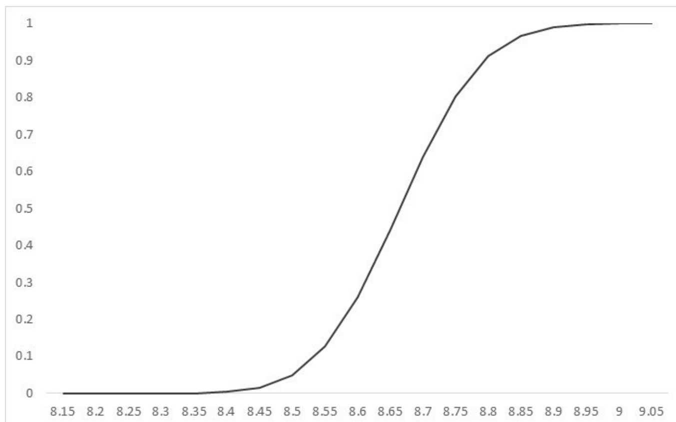
Assim, e rejeitamos , se .

(b) Sim, rejeitamos a hipótese nula, uma vez que , concluindo que há evidências do aumento na altura média, dado este valor de .

(c) A função poder do teste é definida como sendo:

sendo o parâmetro a ser testado e a estatística do teste. Neste teste específico, temos que desenhar o gráfico de:

para diferentes valores de , sendo .



(d) Queremos saber a probabilidade de não rejeitar ( ) dado um certo valor para , ou seja, queremos saber . Usando os valores para a função poder do teste obtidos e colocados em um gráfico na letra (c), temos que essas probabilidades são aproximadamente e respectivamente: (i) 0,558; (ii) 0,088 e (iii) 0. Note que quanto maior a média populacional, menor é a chance de não detectar uma melhora na altura média.

Exercício 5

A hipótese nula é de que a proporção de pessoas que achou a pílula de açúcar (placebo) mais eficiente do que o medicamento é menor ou igual a 50 %, enquanto que a hipótese alternativa é de que esta proporção é maior que 50%, i.e:

Neste teste a estatística considerada é a proporção amostral . A região crítica do teste é: , em que é tal que . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 5%.

Sob , temos que para suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso, . Assim, sob temos que:

Assim, e rejeitamos , se . No caso, , logo rejeitamos . Temos evidência, portanto, para a favor da afirmação do psiquiatra.

Exercício 6

Neste caso, queremos testar:

Sabemos que , e , sendo a variância amostral. Neste caso, a variância populacional é desconhecida, portanto, usamos a seguinte estatística de teste:

Usando a tabela da distribuição t de Student com 35 graus de liberdade, temos:

Assim, , e a região crítica do teste é . Como , rejeitamos , concluindo que há evidências para dizer que o conteúdo médio líquido é menor que 225 ml.

Exercício 7

(a) Denotando por o consumo de gasolina em km/l, a hipótese a ser testada é:

Em particular, se é verdadeira, e . A região crítica deste teste é do tipo . Assim, a probabilidade do erro tipo I é:

Portanto, temos . Como , não rejeitamos a este nível de significância.

(b) A probabilidade de erro tipo II é a probabilidade de não rejeitar , enquanto é falsa, i.e.:

Exercício 8

Neste caso, queremos testar:

Sabemos que , e , sendo a variância amostral. Neste caso, a variância populacional é desconhecida, portanto, usamos a seguinte estatística de teste:

Usando a tabela da distribuição t de Student com 7 graus de liberdade, temos:

Assim, , e a região crítica do teste é . Como , rejeitamos , concluindo que há evidências para dizer que houve aumento da produtividade com o novo fertilizante.

Exercício 9

Neste caso, queremos testar:

Sob , a resistência dos cabos denotada por e . A região crítica deste teste é do tipo . Dado o nível de significância de 2%, temos que:

Assim, e e . Como , rejeitamos . Temos evidência, portanto, que a resistência média é diferente de 13 Kgf.

Exercício 10

Neste caso, queremos testar:

Sabemos que , e , sendo a variância amostral. Neste caso, a variância populacional é desconhecida, portanto, usamos a seguinte estatística de teste:

Usando a tabela da distribuição t de Student com 15 graus de liberdade, temos:

Assim, , e a região crítica do teste é . Como , rejeitamos , concluindo que há evidências para dizer que houve melhora no processo a este nível de significância.

O IC para , considerando é:

em que .

Substituindo pelos valores de , , e , temos que o .

Exercício 11

(a) Usando a região crítica do enunciado, temos que:

Usando a aproximação normal, sob , e temos que:

Assim, o nível de significância ou probabilidade de erro tipo I .

(b) Temos que calcular a probabilidade de , dado que é verdadeira:

Usando a aproximação normal, sob , e temos que:

Assim, a probabilidade de erro tipo II .

(c) Para que teríamos que ter:

ou ainda

O valor aproximado de que satisfaz a equação acima é , ou seja, Neste caso, .

Exercício 12

Queremos testar:

A estatística considerada é a média amostral . A região crítica do teste é: , em que é tal que . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em .

Conforme enunciado, e . Logo, , uma vez que .

Também foi enunciado que . Note que esta equivale à probabilidade de erro tipo II. Temos, assim, que o poder do teste é .

Conforme já visto, sabemos que , sob , e , sob . Assim, temos duas equações com 2 incógnitas: n e k:

Segue que:

Resolvendo o sistema, temos que e .