

# MAE 229 - Introdução à Probabilidade e Estatística II

## Resolução Lista 3

Professor: Pedro Morettin

### Exercício 1

- (a) A hipótese nula  $H_0$  é de que a média de vendas  $\mu$  permanece inalterada, enquanto que a hipótese alternativa  $H_1$  é de que houve melhora nas vendas, i.e.:

$$H_0 : \mu = 320$$

$$H_1 : \mu > 320$$

- (b) Neste teste a estatística considerada é a média amostral  $\bar{X}$ . A região crítica do teste é:  $RC = \{\bar{X} \geq k\}$ , em que  $k$  é tal que  $P(\bar{X} \geq k | \mu = 320) = 0,05$ . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 5%.

Sob  $H_0$ , temos que  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  para  $n$  suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso,  $\bar{x} = 320$ ,  $\sigma = 10$  e  $n = 100$ . Assim, sob  $H_0$  temos que:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{320 - 320}{\frac{10}{\sqrt{100}}} = 0$$

Assim,  $z = 0$  e rejeitamos  $H_0$ , se  $z \geq z_{0,05}$ .

- (c) Para calcular o nível descritivo do teste temos calcular a probabilidade de se observar valores mais extremos do que o encontrado na amostra, supondo que a hipótese nula seja verdadeira:

$$P(\bar{X} \geq 320)$$

Assim, temos que o valor-p é de 3,04%, sendo menor que o nível de significância do teste  $\alpha = 5\%$ . Com isso, rejeitamos  $H_0$ . Logo, há evidências de que as vendas melhoraram. Chegaríamos a mesma conclusão usando o valor de  $z = 1,64$  encontrado na letra (b), uma vez que  $z = 1,64 > z_{0,05} = 1,64$ .

### Exercício 2

- (a) A hipótese nula  $H_0$  é de que a proporção de pares defeituosos  $p$  continua em 10%, enquanto que a hipótese alternativa é de que houve piora, i.e:

(b) Neste teste a estatística considerada é a proporção amostral  $\hat{p}$ . A região crítica do teste é:  $\hat{p} > p_0 + z_{\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)}$ , em que  $z_{\alpha}$  é tal que  $P(Z > z_{\alpha}) = \alpha$ . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 9%.

Sob  $H_0$ , temos que  $\hat{p} \sim N(p_0, \sqrt{p_0(1-p_0)})$  para  $n$  suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso,  $\hat{p} = 0,14$ . Assim, sob  $H_0$  temos que:

$$P(\hat{p} > 0,14) = P\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} > \frac{0,14 - 0,14}{\sqrt{0,14(1-0,14)}}\right) = P(Z > 0) = 0,5$$

Assim,  $\hat{p} = 0,14$  e rejeitamos  $H_0$ , se  $0,14 > 0,14 + z_{0,09} \sqrt{0,14(1-0,14)}$ .

(c) As remessas cujas proporções são 25%, 16%, 24% e 21% devem ser rejeitadas, uma vez que há evidências de que o processo piorou.

### Exercício 3

A região crítica do teste é:  $\bar{x} > \mu_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , em que  $z_{\alpha}$  é tal que  $P(Z > z_{\alpha}) = \alpha$ . Ou seja, estamos querendo encontrar a probabilidade de erro tipo I dada esta região crítica, sendo que agora  $\bar{x} = 14,6$ , ou seja,  $\frac{14,6 - 14}{\frac{1,5}{\sqrt{100}}} > z_{\alpha}$ .

$$\frac{14,6 - 14}{\frac{1,5}{\sqrt{100}}} = z_{\alpha} \Rightarrow z_{\alpha} = 13,33$$

Assim, para esta região crítica temos um nível de significância para o teste de 14,6%.

### Exercício 4

(a) A hipótese nula  $H_0$  é de que a altura média continua em até 8,5, enquanto que a hipótese alternativa é de aumentou, i.e:

Neste teste a estatística considerada é a média amostral  $\bar{x}$ . A região crítica do teste é:  $\bar{x} > \mu_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , em que  $z_{\alpha}$  é tal que  $P(Z > z_{\alpha}) = \alpha$ . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 5%.

Sob  $H_0$ , temos que  $\bar{x} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  para  $n$  suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso,  $\bar{x} = 8,5$ ,  $\sigma = 1,5$  e  $n = 100$ . Assim, sob  $H_0$  temos que:

$$P(\bar{x} > 8,5) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{8,5 - 8,5}{\frac{1,5}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z > 0) = 0,5$$

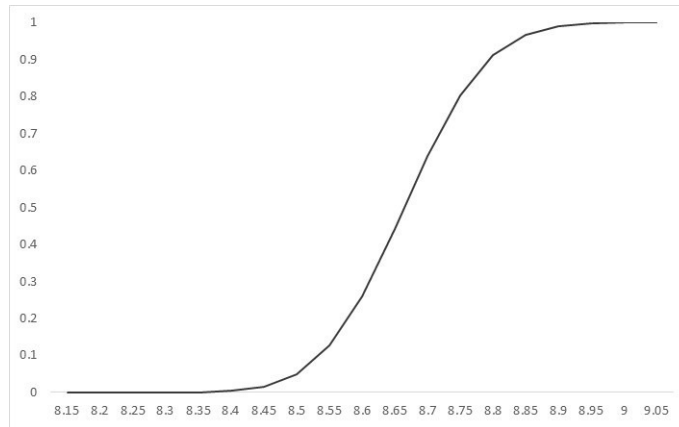
Assim,  $\bar{x} = 8,5$  e rejeitamos  $H_0$ , se  $8,5 > 8,5 + z_{0,05} \frac{1,5}{\sqrt{100}}$ .

(b) Sim, rejeitamos a hipótese nula, uma vez que  $\bar{x} = 8,5 > 8,5 + z_{0,05} \frac{1,5}{\sqrt{100}}$ , concluindo que há evidências do aumento na altura média, dado este valor de  $\bar{x}$ .

(c) A função poder do teste é definida como sendo:

sendo  $\mu$  o parâmetro a ser testado e  $T$  a estatística do teste. Neste teste específico, temos que desenhar o gráfico de:

para diferentes valores de  $\mu$ , sendo  $\mu_0 = 8.5$ .



(d) Queremos saber a probabilidade de não rejeitar  $H_0$  ( ) dado um certo valor para  $\mu$ , ou seja, queremos saber  $1 - \text{poder}$ . Usando os valores para a função poder do teste obtidos e colocados em um gráfico na letra (c), temos que essas probabilidades são aproximadamente e respectivamente: (i) 0,558; (ii) 0,088 e (iii) 0. Note que quanto maior a média populacional, menor é a chance de não detectar uma melhora na altura média.

### Exercício 5

A hipótese nula  $H_0$  é de que a proporção  $p$  de pessoas que achou a pílula de açúcar (placebo) mais eficiente do que o medicamento é menor ou igual a 50 %, enquanto que a hipótese alternativa é de que esta proporção é maior que 50%, i.e:

Neste teste a estatística considerada é a proporção amostral  $\hat{p}$ . A região crítica do teste é:  $\hat{p} > c$ , em que  $c$  é tal que  $P(\hat{p} > c | H_0) = 0.05$ . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em 5%.

Sob  $H_0$ , temos que  $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$  para  $n$  suficientemente grande (aproximação normal). Neste caso,  $c = 0.50$ . Assim, sob  $H_1$  temos que:

Assim,  $\hat{p} > c$  e rejeitamos  $H_0$ , se  $\hat{p} > 0.50$ . No caso,  $\hat{p} \leq 0.50$ , logo rejeitamos  $H_0$ . Temos evidência, portanto, para a favor da afirmação do psiquiatra.

### Exercício 6

Neste caso, queremos testar:

Sabemos que  $\mu = 225$ ,  $\sigma^2 = 100$  e  $n = 36$ , sendo  $s^2$  a variância amostral. Neste caso, a variância populacional é desconhecida, portanto, usamos a seguinte estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Usando a tabela da distribuição t de Student com 35 graus de liberdade, temos:

$$t_{0.05, 35} = 1.690$$

Assim,  $t_{0.05, 35} = 1.690$ , e a região crítica do teste é  $T > 1.690$ . Como  $t = 1.2$ , rejeitamos  $H_0$ , concluindo que há evidências para dizer que o conteúdo médio líquido é menor que 225 ml.

### Exercício 7

(a) Denotando por  $X$  o consumo de gasolina em km/l, a hipótese a ser testada é:

Em particular, se  $H_0$  é verdadeira,  $T \sim t_{35}$  e  $\mu = 22.5$ . A região crítica deste teste é do tipo  $T > c$ . Assim, a probabilidade do erro tipo I é:

$$P(T > c | H_0)$$

Portanto, temos  $P(T > c | H_0) = 0.05$ . Como  $c = 1.690$ , não rejeitamos  $H_0$  a este nível de significância.

(b) A probabilidade de erro tipo II é a probabilidade de não rejeitar  $H_0$ , enquanto  $H_1$  é falsa, i.e.:

$$P(T \leq c | H_1)$$

### Exercício 8

Neste caso, queremos testar:

Sabemos que  $\bar{x}$ ,  $s^2$  e  $n$ , sendo  $\sigma^2$  a variância amostral. Neste caso, a variância populacional é desconhecida, portanto, usamos a seguinte estatística de teste:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Usando a tabela da distribuição t de Student com 7 graus de liberdade, temos:

$$t_{\alpha/2, 7} = t_{0.025, 7} = 2.365$$

Assim,  $t_{\alpha/2, 7} = 2.365$ , e a região crítica do teste é  $t > 2.365$ . Como  $t = 2.365$ , rejeitamos  $H_0$ , concluindo que há evidências para dizer que houve aumento da produtividade com o novo fertilizante.

### Exercício 9

Neste caso, queremos testar:

Sob  $H_0: \mu = 13$ , a resistência dos cabos denotada por  $X$  e  $\sigma^2 = 100$ . A região crítica deste teste é do tipo  $t > t_{\alpha, n-1}$ . Dado o nível de significância de 2%, temos que:

$$t_{0.02, 15} = 2.131$$

Assim,  $t_{\alpha, n-1} = 2.131$  e  $t = 2.131$ . Como  $t = 2.131$ , rejeitamos  $H_0$ . Temos evidência, portanto, que a resistência média é diferente de 13 Kgf.

### Exercício 10

Neste caso, queremos testar:

Sabemos que  $\bar{x}$ ,  $s^2$  e  $n$ , sendo  $\sigma^2$  a variância amostral. Neste caso, a variância populacional é desconhecida, portanto, usamos a seguinte estatística de teste:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Usando a tabela da distribuição t de Student com 15 graus de liberdade, temos:

$$t_{\alpha/2, 15} = t_{0.025, 15} = 2.131$$

Assim,  $\bar{x} = 100$ , e a região crítica do teste é  $\bar{x} > 100 + 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 101.645$ . Como  $\bar{x} = 100 < 101.645$ , rejeitamos  $H_0$ , concluindo que há evidências para dizer que houve melhora no processo a este nível de significância.

O IC para  $\mu$ , considerando  $n = 100$  é:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

em que

Substituindo pelos valores de  $\bar{x} = 100$ ,  $s = 10$  e  $n = 100$ , temos que o

### Exercício 11

(a) Usando a região crítica do enunciado, temos que:

Usando a aproximação normal, sob  $H_0$ ,  $\bar{x} = 100$  e temos que:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Assim, o nível de significância ou probabilidade de erro tipo I é  $\alpha = 0.05$ .

(b) Temos que calcular a probabilidade de  $\bar{x} > 100 + 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}}$ , dado que  $H_0$  é verdadeira:

Usando a aproximação normal, sob  $H_0$ ,  $\bar{x} = 100$  e temos que:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Assim, a probabilidade de erro tipo II é  $\beta = 0.05$ .

(c) Para que  $\beta = 0.05$  teríamos que ter:

ou ainda

$$z_{1-\beta} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

O valor aproximado de  $\bar{x}$  que satisfaz a equação acima é  $\bar{x} = 101.645$ , ou seja,

Neste caso,  $\beta = 0.05$ .

## Exercício 12

Queremos testar:

A estatística considerada é a média amostral  $\bar{X}$ . A região crítica do teste é:  $\bar{X} > \bar{x}_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , em que  $\alpha$  é tal que  $P(Z > z_{\alpha}) = \alpha$ . Ou seja, estamos fixando a probabilidade de erro tipo I em  $\alpha$ .

Conforme enunciado,  $\mu = \mu_0$  e  $\sigma = \sigma_0$ . Logo,  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ , uma vez que  $\bar{X}$  é a média amostral de  $n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Também foi enunciado que  $\mu = \mu_0$ . Note que esta equivale à probabilidade de erro tipo II. Temos, assim, que o poder do teste é  $1 - \beta$ .

Conforme já visto, sabemos que  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma_0^2}{n})$ , sob  $H_0$ , e  $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_0^2}{n})$ , sob  $H_1$ . Assim, temos duas equações com 2 incógnitas:  $n$  e  $k$ :

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} &= \mu_1 \\ \bar{x}_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} &= \mu_0 + z_{\beta} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} z_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} &= z_{\beta} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ z_{\alpha} &= z_{\beta} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos que  $n = \left(\frac{z_{\alpha} \sigma_0}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2$  e  $k = \bar{x}_0 + z_{\alpha} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ .

