Distribuição Qui-Quadrado

Considere

$Z \sim N(0, 1)$ e $Y = Z^2$,

então $Y \sim \chi^2(1)$.

Distribuição F

Sejam U e V duas v.a. independentes, cada uma com distribuição qui-quadrado, com v_1 e v_2 graus de liberdade, respectivamente. Então a v.a.

$$W = (U/v_1)/(V/v_2)$$

tem distribuição F de Snedecor, com v_1 e v_2 graus de liberdade.

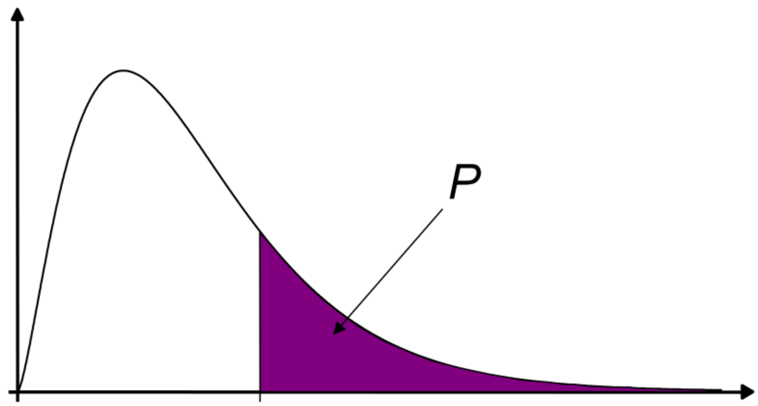
Temos: $F(v_1, v_2) = 1/F(v_2, v_1)$.

Notação:

$$W \sim F(v_1, v_2).$$

Na tabela de F: $P(F(v_1, v_2)>f_0)=\alpha$

Graficamente:



Exemplo:

Considere, por exemplo, W ~F(5, 7). a Tabela de F.

$P(F > 3{,}97)= 0{,}05$, ou então $P(F <= 3{,}97) = 0{,}95$.

Digamos, agora, que desejamos encontrar o valor f_0 tal que $P(F < f_0) = 0{,}05$.

$0{,}05 = P(F(5, 7) < f_0) = P(1/F(7, 5) < f_0) =$

$= P(F(7, 5) > 1/f_0)$.

Pela Tabela, para F(7, 5), obtemos $1/f_0 = 4{,}88$ e, portanto, $f_0= 0{,}205$.

Comparação das variâncias

de duas populações Normais

Suponha que temos duas amostras independentes, de tamanho n1 e n2, retiradas de duas populações normais com a mesma variância σ^2. Indiquemos os estimadores de σ^2 obtidos das amostras por S_1^2 e S_2^2, respectivamente.

Temos:

$$U = (n_1-1)\, S_1^2/\, \sigma^2 \sim \chi^2(n_1-1).$$

$$V = (n_2-1)\, S_2^2/\, \sigma^2 \sim \chi^2(n_2-1).$$

portanto,

$$S_1^2/\, S_2^2 = (U/n_1-1)/(V/(n_2-1) \sim F(n_1-1,\, n_2-1)$$

Teste:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Sob a suposição de H ser verdadeira, temos que:

$$W = S_1^2 / S_2^2 \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

Fixando α, encontramos dois números f1 e f2 da Tabela F, tais que

$$P(W € RC) = P(W < f1 \text{ ou } W > f2) = \alpha$$

Os valores f1 e f2 são determinados de modo que $P(W<f1)=P(W>f2) = \alpha/2$. Na prática, consideramos o W de tal sorte que

$$S_1^2 / S_2^2 > 1$$

A: 145, 127, 136, 142, 141, 137

B: 143, 128, 132, 138, 142, 132.

$RC =]0, (5{,}05)^{-1}[\cup]5{,}05; +\infty[$;

$S_A^2 = 40$ e $S_B^2 = 37$, $W_{obs} = 40/37 = 1{,}08$

como esse valor não pertence à região crítica, aceitamos H_0, ou seja, as máquinas produzem com a mesma homogeneidade quanto à variabilidade.

o IC$(\sigma_2^2/\sigma_1^2;\ \gamma)$ será dado por

$$f_1 \frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_2 \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

Exemplo 13.3. Suponha que para outras seis medidas para as máquinas A e B do Exemplo 13.2 tivéssemos $S_A^2 = 85$ e $S_B^2 = 8$. Como $w_0 = 85/8 = 10{,}62$, rejeitaríamos H_0. Então, o IC dado por (13.5) ficaria, com $\gamma = 0{,}90$,

$$\frac{1}{5{,}05}\ \frac{8}{85} < \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} < 5{,}05\ \frac{8}{85},$$

ou seja,

$$0{,}019 < \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} < 0{,}475.$$

Invertendo-se, obtemos, também,

$$2{,}10 < \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < 52{,}6,$$

que indica a variação possível, no nível fixado, da razão entre as duas variâncias. Note que, sob H_0, temos $\sigma_A^2/\sigma_B^2 = 1$, que não pertence a esse intervalo.