Teste para a Variância de uma Normal

Teorema 12.1. Seja $(Z_1, ..., Z_n)$ uma amostra aleatória simples retirada de uma população $N(0,1)$. Então:

(i) $\bar{Z}$ tem distribuição $N(0,1/n)$;

(ii) as variáveis $\bar{Z}$ e $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$ são independentes; e

(iii) $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$ tem distribuição $\chi^2(n-1)$.

Corolário 12.1. A variável aleatória $(n-1)S^2/\sigma^2$ tem distribuição $\chi^2(n-1)$.

Voltemos ao nosso problema original. Queremos testar

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2,$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

Nossas suposições são que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, ..., n$ e os X_i são independentes. A estatística do teste será, sob H_0,

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1). \tag{12.5}$$

Como temos um teste bilateral, a região crítica será da forma $RC = (0, \chi_1^2] \cup [\chi_2^2, +\infty)$, tal que

$$P(\chi^2 \in RC|H_0) = P(0 < \chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 > \chi_2^2) = \alpha,$$

sendo α o nível de significância do teste, fixado *a priori*.

Observado o valor s_0^2 da estatística S^2, obteremos o valor $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2}$. Se $\chi_0^2 \in RC$, rejeitamos H_0; caso contrário, aceitamos H_0.

Exemplo 12.8. Uma das maneiras de manter sob controle a qualidade de um produto é controlar sua variabilidade. Uma máquina de encher pacotes de café está regulada para enchê-los com média de 500 g e desvio padrão de 10 g. O peso de cada pacote X segue uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Colheu-se uma amostra de 16 pacotes e observou-se uma variância de $S^2 = 169$ g². Com esse resultado, você diria que a máquina está desregulada com relação à variância?

Estamos interessados em testar, então,

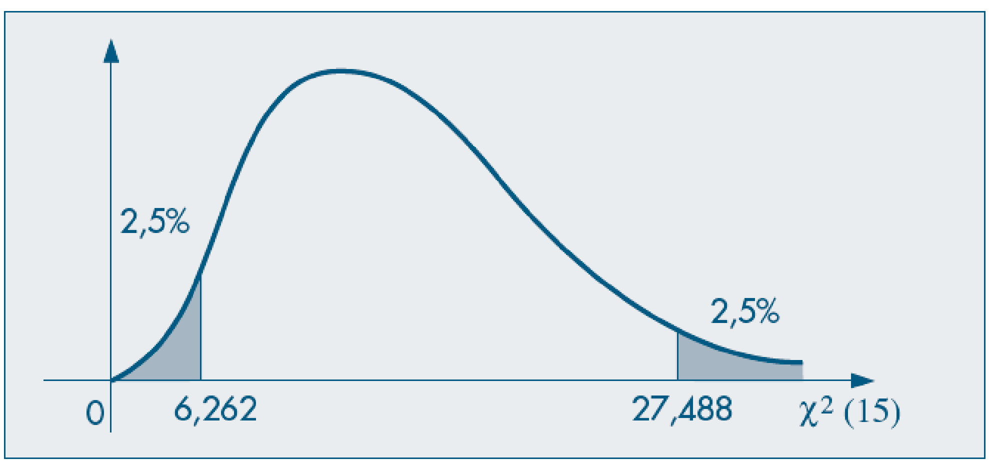
$$H_0 : \sigma^2 = 100,$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq 100.$$

A estatística para realizar o teste é (12.5), com $n = 16$. Fixado o nível de significância α em 5%, teremos da Tabela IV que a região crítica é dada por $RC = \{\chi^2 : 0 \leqslant \chi^2 \leqslant 6{,}262$ ou $\chi^2 \geqslant 27{,}488\}$. Veja a Figura 12.12. O valor observado da estatística é

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15)(169)}{100} = 25{,}35.$$

Como $\chi_0^2 \notin RC$, somos levados a aceitar H_0, isto é, a máquina está sob controle quanto à variância.

Figura 12.12: Região crítica para o teste do Exemplo 12.8.



A construção do IC(σ^2; γ) é feita a partir da expressão

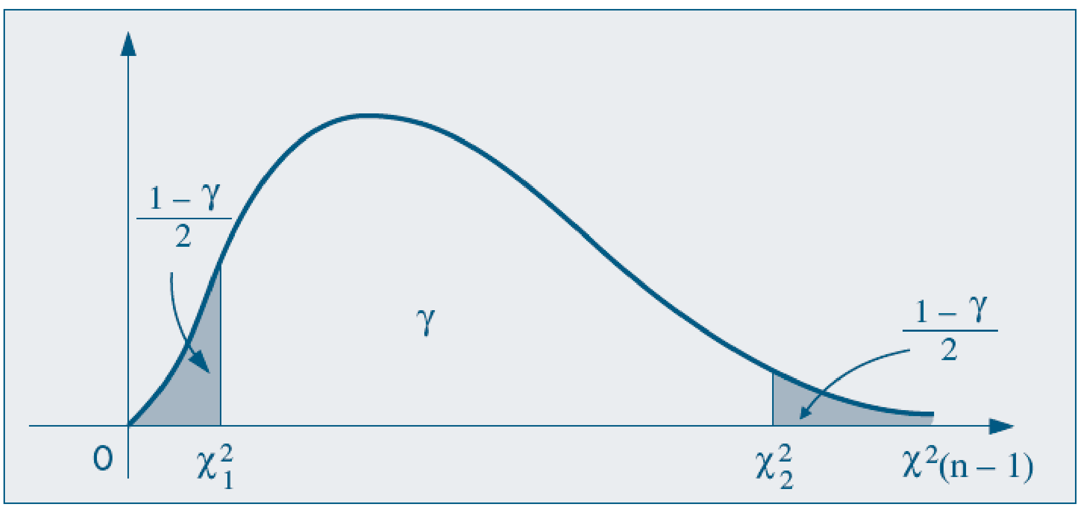
$$P\left(\chi_1^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi_2^2\right) = \gamma, \tag{12.6}$$

que permite obter a seguinte desigualdade:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}, \tag{12.7}$$

que será o IC procurado. Veja a Figura 12.13.

Figura 12.13: Valores críticos para a construção de um intervalo de confiança para a variância.



Exemplo 12.9. Os dados abaixo referem-se às vendas diárias, em reais, durante uma semana, de carros de uma revendedora. Construir um IC(σ^2; 90%).

$$\text{Vendas} : 253, 187, 96, 450, 320, 105.$$

Inicialmente, calculamos a variância amostral, que é $s_0^2 = 18.460$; em seguida, os valores χ_1^2 e χ_2^2 que satisfaçam (12.6):

$$P(1{,}145 \leqslant \chi^2(5) \leqslant 11{,}070) = 0{,}90.$$

Substituindo em (12.7) obtemos

$$\text{IC}(\sigma^2; 0{,}90) = [8.338; 80.611].$$

Poder de um Teste

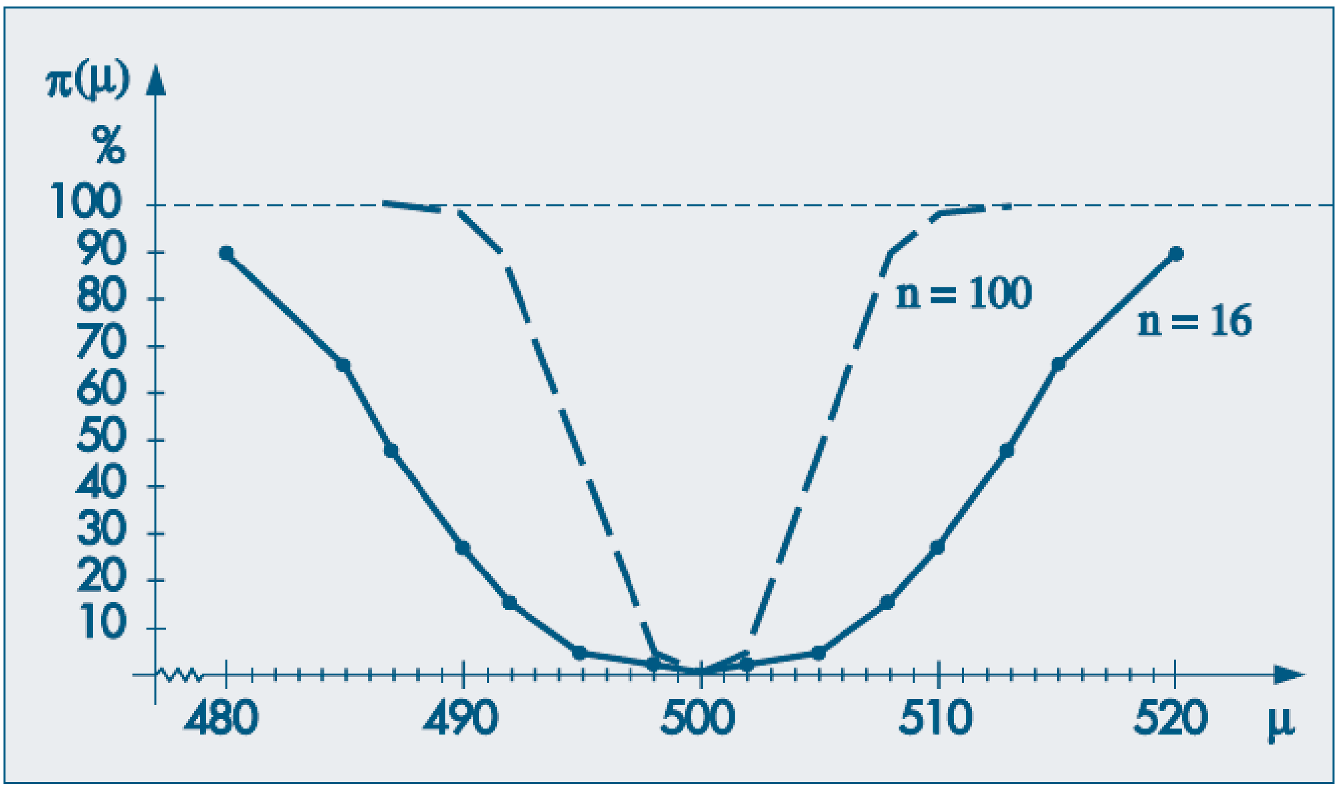
Definição. A função poder (ou potência) do teste de H_0 contra H_1 é definida por

$$\pi(\theta) = P(\hat{\theta} \in RC|\theta),$$

ou seja, é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula, como função de θ.

$$H_0 : \mu = 500 \text{ g},$$
$$H_1 : \mu \neq 500 \text{ g},$$

Figura 12.9: Curva de poder para o Exemplo 12.2.



Se tivermos hipóteses alternativas unilaterais, da forma $H_1 : \theta < \theta_0$ ou $H_1 : \theta > \theta_0$, obteremos os gráficos da Figura 12.10.

Figura 12.10: Curvas de poder para alternativas unilaterais.