Covariância entre Duas Variáveis Aleatórias

Definição. Se X e Y são duas v.a., a covariância entre elas é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))],$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y).$$

Exemplo 8.6. Para as v.a. X e Y do Exemplo 8.1 (veja a Tabela 8.5), obtemos

$$E(X) = 1{,}5,\ E(Y) = 0{,}5,\ E(XY) = 1{,}0,$$

de modo que

$$\text{Cov}(X, Y) = 1{,}0 - (1{,}5)\,(0{,}5) = 0{,}25.$$

Definição. Quando $\boxed{\text{Cov}(X, Y) = 0,}$ dizemos que as variáveis aleatórias X e Y são *não correlacionadas*.

Tabela 8.12: Distribuição conjunta para o Exemplo 8.7.

Y \ X	0	1	2	$p(y)$
1	3/20	3/20	2/20	8/20
2	1/20	1/20	2/20	4/20
3	4/20	1/20	3/20	8/20
$p(x)$	8/20	5/20	7/20	1,00

$$E(X) = 0 \times \frac{8}{20} + 1 \times \frac{5}{20} + 2 \times \frac{7}{20} = 0{,}95,$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{8}{20} + 2 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{8}{20} = 2{,}00,$$

$$E(XY) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{3}{20} + 2 \times \frac{2}{20} + 0 \times \frac{1}{20} + 2 \times \frac{1}{20}$$
$$+ 4 \times \frac{2}{20} + 0 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{1}{20} + 6 \times \frac{3}{20} = 1{,}90,$$

do que obtemos

$$\text{Cov}(X, Y) = 1{,}90 - (0,\ 95)(2{,}00) = 0.$$

Portanto, as v.a. X e Y desse exemplo são não-correlacionadas.

Proposição 8.1. Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, então $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Em outras palavras, se X e Y forem independentes, então elas serão não-correlacionadas. A recíproca não é verdadeira, isto é, se tivermos $\text{Cov}(X, Y) = 0$, isso não implica que X e Y sejam independentes. De fato, para as v.a. do Exemplo 8.7, a covariância entre X e Y é zero, mas X e Y não são independentes, como podemos facilmente verificar.

Podemos agora demonstrar o

Teorema 8.3. *(a)* Para duas v.a. X e Y quaisquer, temos

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y);$$

(b) se X e Y forem independentes, então

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Definição. O coeficiente de correlação entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Teorema 8.4. O coeficiente de correlação entre X e Y satisfaz a desigualdade

$$-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1.$$

O coeficiente de correlação é uma medida da relação *linear* entre X e Y. Quandc $\rho(X, Y) = \pm 1$, existe uma correlação perfeita entre X e Y, pois $Y = aX + b$. Se $\rho(X, Y) = 1$ $a > 0$, e se $\rho(X, Y) = -1$, $a < 0$. O grau de associação linear entre X e Y varia à medida que $\rho(X, Y)$ varia entre -1 e $+1$.

Tabela 8.13: Distribuição conjunta de X e W para o Exemplo 8.10.

$W \backslash X$	0	1	2	3	$p(w)$
0	0	0	0	1/8	1/8
1	0	0	3/8	0	3/8
2	0	3/8	0	0	3/8
3	1/8	0	0	0	1/8
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

É fácil ver que

$$E(X) = E(W) = 1{,}5,$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(W) = 0{,}75,$$
$$E(XW) = 1{,}5,$$

do que segue que $\mathrm{Cov}(X, W) = -0{,}75$ e portanto $\rho(X, W) = -1$.