Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Distribuição Conjunta

Exemplo: Suponha que estamos interessados em estudar a composição de famílias com três crianças, quanto ao sexo. Definamos:

X = número de meninos,

$$Y = \begin{cases} 1, \text{ se o primeiro filho for homem} \\ 0, \text{ se o primeiro filho for mulher,} \end{cases}$$

Z = número de vezes em que houve variação do sexo entre um nascimento e outro, dentro da mesma família.

Tabela 8.1: Composição de famílias com três crianças, quanto ao sexo.

Eventos	Probabilidade	X	Y	Z
HHH	1/8	3	1	0
HHM	1/8	2	1	1
HMH	1/8	2	1	2
MHH	1/8	2	0	1
HMM	1/8	1	1	1
MHM	1/8	1	0	2
MMH	1/8	1	0	1
MMM	1/8	0	0	0

Tabela 8.2: Distribuições de probabilidades unidimensionais.

(a)

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

(b)

y	0	1
$p(y)$	1/2	1/2

(c)

z	0	1	2
$p(z)$	1/4	1/2	1/4

A Tabela 8.3 apresenta as probabilidades associadas aos pares de valores nas variáveis X e Y. Nessa tabela, $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ denota a probabilidade do evento $\{X = x \text{ e } Y = y\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$. Essa tabela é denominada *distribuição conjunta* de X e Y.

Tabela 8.3: Distribuição bidimensional da v.a. (X, Y).

(x, y)	$p(x, y)$
(0, 0)	1/8
(1, 0)	2/8
(1, 1)	1/8
(2, 0)	1/8
(2, 1)	2/8
(3, 1)	1/8

A partir da Tabela 8.1 podemos formar também as distribuições conjuntas de X e Z, de Y e Z, bem como a distribuição conjunta de X, Y e Z, que está dada na Tabela 8.4.

Tabela 8.4: Distribuição conjunta das v.a. X, Y e Z.

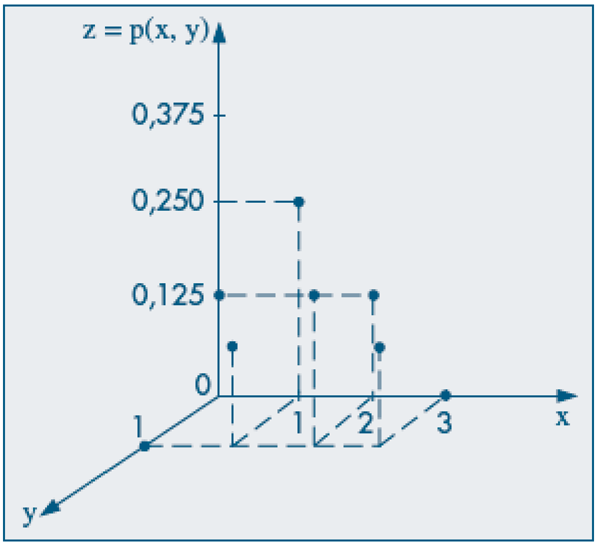
(x, y, z)	$p(x, y, z)$
(0, 0, 0)	1/8
(1, 0, 1)	1/8
(1, 0, 2)	1/8
(1, 1, 1)	1/8
(2, 0, 1)	1/8
(2, 1, 1)	1/8
(2, 1, 2)	1/8
(3, 1, 0)	1/8

No caso de duas variáveis X e Y:

Tabela 8.5: Distribuição conjunta de X e Y, como uma tabela de dupla entrada.

Y \ X	0	1	2	3	$p(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	1/2
1	0	1/8	2/8	1/8	1/2
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Figura 8.1: Representação gráfica da v.a. (X, Y) da Tabela 8.5.



Distribuições Marginais

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 2/8 + 1/8 = 3/8$$

$$P(Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = 0)$$
$$= 1/8 + 2/8 + 1/8 + 0 = 1/2.$$

Distribuições Condicionais

$$P(X = x|Y = 1) = \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} = p(x|Y = 1),$$

$$p(2|Y = 1) = P(X = 2|Y = 1) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{2/8}{1/2} = 1/2.$$

Tabela 8.6: Distribuição condicional de X, dado que $Y = 1$.

x	1	2	3
$p(x\|Y = 1)$	1/4	1/2	1/4

Observe que $\sum_x p(x|Y = 1) = p(0|Y = 1) + ... + p(3|Y = 1) = 1$.

Tabela 8.7: Distribuição condicional de Y, dado que $X = 2$.

y	0	1
$p(y\|X = 2)$	1/3	2/3

Podemos generalizar o que foi dito acima para duas v.a. X e Y quaisquer, assumindo os valores $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_m$, respectivamente.

Definição. Seja x_i, um valor de X, tal que $P(X = x_i) = p(x_i) > 0$. A probabilidade

$$P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}, \quad j = 1, ..., m,$$

é denominada *probabilidade condicional* de $Y = y_j$, *dado que* $X = x_i$.

$$\sum_{j=1}^{m} P(Y = y_j | X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{P(X = x_i)}{P(X = x_i)} = 1.$$

$$E(X|Y = 1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2.$$

$$E(Y|X = 2) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Definição. A esperança condicional de X, dado que $Y = y_j$, é definida por

$$E(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i | Y = y_j).$$

Uma definição análoga vale para $E(Y|X = x_i)$.

$$P(Z = z | Y = y) = \frac{P(Z = z, Y = y)}{P(Y = y)} = P(Z = z)$$

$$P(Z = 1, Y = 1) = \frac{2}{8} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = P(Z = 1)P(Y = 1).$$

Tabela 8.8: Distribuição conjunta de Y e Z.

Y \ Z	0	1	2	$p(y)$
0	1/8	2/8	1/8	1/2
1	1/8	2/8	1/8	1/2
$p(z)$	1/4	2/4	1/4	1

Também é verdade que

$$P(Y = y | Z = z) = P(Y = y)$$

para todos os valores de y e z. Dizemos que Y e Z são independentes.

Definição. As variáveis aleatórias X e Y, assumindo os valores x_1, x_2, ... e y_1, y_2, ..., respectivamente, são $\boxed{\text{independentes}}$ se, e somente se, para $\boxed{\text{todo par}}$ de valores (x_i, y_j) de X e Y, tivermos que

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j). \tag{8.3}$$

Basta que (8.3) não se verifique para *um* par (x_i, y_j), para que X e Y *não* sejam independentes. Nesse caso diremos que X e Y são *dependentes*.

Tabela 8.9: Funções de variáveis aleatórias.

(x_i, y_j)	$X+Y$	XY	$p(x_i, y_j)$
(0, 0)	0	0	1/8
(0, 1)	1	0	0
(1, 0)	1	0	2/8
(1, 1)	2	1	1/8
(2, 0)	2	0	1/8
(2, 1)	3	2	2/8
(3, 0)	3	0	0
(3, 1)	4	3	1/8

Tabela 8.10: Distribuição de $X + Y$.

$x+y$	0	1	2	3	4
$p(x+y)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

Tabela 8.11: Distribuição de XY.

xy	0	1	2	3
$p(xy)$	4/8	1/8	2/8	1/8

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5,$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

$$E(X+Y) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

$$E(XY) = 0 \times \frac{1}{8} + 0 \times 0 + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 0 \times 0$$
$$+ 3 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

Teorema 8.1. Se X for uma v.a. com valores $x_1, \ldots, x_n$ e probabilidades $p(x_1), \ldots, p(x_n)$, Y for uma v.a. com valores $y_1, \ldots, y_m$ e probabilidades $p(y_1), \ldots, p(y_m)$, e se $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, então

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j) p(x_i, y_j).$$

Teorema 8.2. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$$E(XY) = E(X)\, E(Y).$$

Observações. (i) Se tivermos um número finito de v.a. $X_1, \ldots, X_n$, então (8.6) toma a forma

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n).$$

(ii) Se $X_1, \ldots, X_n$ forem v.a. independentes, então

$$E(X_1 X_2 \ldots X_n) = E(X_1)\, E(X_2) \ldots E(X_n).$$