PROBABILIDADE

Espaço Amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado.
   Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

2. Doador de sangue (tipo sangüíneo) .
   $\Omega = \{A, B, AB, O\}$

3. Hábito de fumar.
   Ω = {Fumante, Não fumante}

4. Tempo de duração de uma lâmpada.
   $\Omega = \{t: t \geq 0\}$

Eventos: ocorrências do experimento aleatório / subconjuntos do espaço amostral Ω

Notação: A, B, C, ...

$\varnothing$ (conjunto vazio): ***evento impossível***

Ω: ***evento certo***

Exemplo: Lançamento de um dado.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A: sair face par $\Rightarrow$ $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

B: sair face maior que 3 $\Rightarrow$ $B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

C: sair face 1 $\Rightarrow$ $C = \{1\} \subset \Omega$

Composição de eventos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

$A \cup B$: união dos eventos A e B.

Representa a ocorrência de <u>pelo menos um</u> dos eventos, A ou B.

$A \cap B$: interseção dos eventos A e B.

Representa a ocorrência <u>simultânea</u> dos eventos A e B.

- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \varnothing$$

- A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

O evento complementar de A, representado por A^c, é o evento em que A não ocorre.

Probabilidade

- Medida da incerteza associada aos eventos / resultados do experimento aleatório

No **caso discreto**, todo experimento aleatório tem seu ***modelo probabilístico*** especificado quando estabelecemos:

- O *espaço amostral* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- A *probabilidade $P(\omega)$ para cada ponto amostral* de tal forma que:

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1.$$

- Neste caso, dado um evento $\boldsymbol{A}$ do experimento aleatório (lembre que $\boldsymbol{A} \subset \Omega$), temos

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\omega_j)$$

Observação: Na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados são iguais, temos:

$$P(A) = \frac{n^o.\ de\ elementos\ de\ A}{n^o.\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

Atenção: Sem equiprobabilidade, a expressão acima NÃO é válida.

Exemplo: A tabela a seguir apresenta a distribuição de alunos diplomados em 2002, segundo nível de ensino e tipo de instituição, no município de São Paulo.

Nível	Instituição		Total
	Pública	Privada	
Fundamental	144.548	32.299	176.847
Médio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.159	56.124	61.283
Total	267.652	117.845	385.497

Fonte: Min. Educação/INEP-Inst.Nacion. Estudos e Pesq. Educacionais; Fundação SEADE

Um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo.

Definimos os eventos

M: aluno se formou no ensino médio;
F: aluno se formou no ensino fundamental;
S: aluno se formou no ensino superior;
G: aluno se formou em instituição pública.

ir para a tabela

Temos

$$P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0{,}382 \qquad P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0{,}459$$

$$P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0{,}159 \qquad P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0{,}694$$

• *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio **e** numa instituição pública?*

• $M \cap G$: aluno formado no ensino médio **e** em inst.pública

$$P(M \cap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0,306$$

• *Qual é a probabilidade do aluno ter se formado no ensino médio **ou** numa instituição pública?*

ir para a tabela

$M \cup G$: aluno formado no ensino médio **ou** em inst. pública

$$P(M \cup G) = (147.367 + 267.652 - 117.945\ ) \ /\ 385.497$$

$$= \frac{297.074}{385.497} = 0,771$$

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Casos particulares:

- Se A e B forem *eventos disjuntos*, então
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Para qualquer evento A de Ω,
  $P(A) = 1 - P(A^c)$.

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por P(A | B) e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 .$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a regra do produto de probabilidades

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B).}$$

e

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) .}$$

• *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ser formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?*

Olhando diretamente a tabela,

temos $P(M|G) = \dfrac{117.945}{267.652} = 0,441$

Pela **definição**,

ir para a tabela

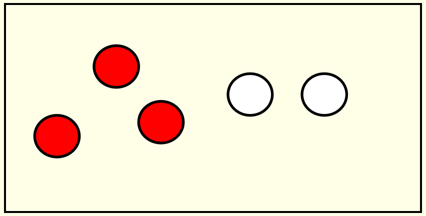
$$P(M \mid G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{\dfrac{117.945}{385.497}}{\dfrac{267.652}{385.497}} = 0,441$$

Exemplo: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *sem reposição*.

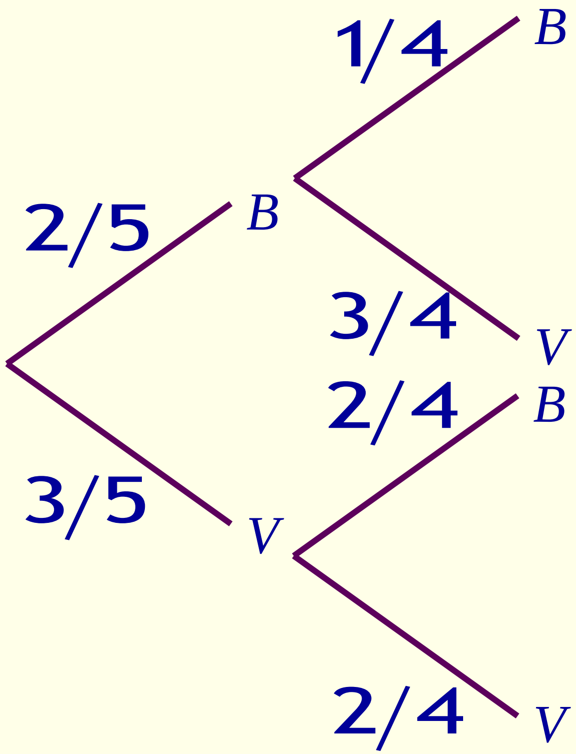
A: 2ª. bola sorteada é branca

C: 1ª. bola sorteada é branca

$P(A)$ = ???



Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como *diagrama de árvores* ou *árvore de probabilidades.*



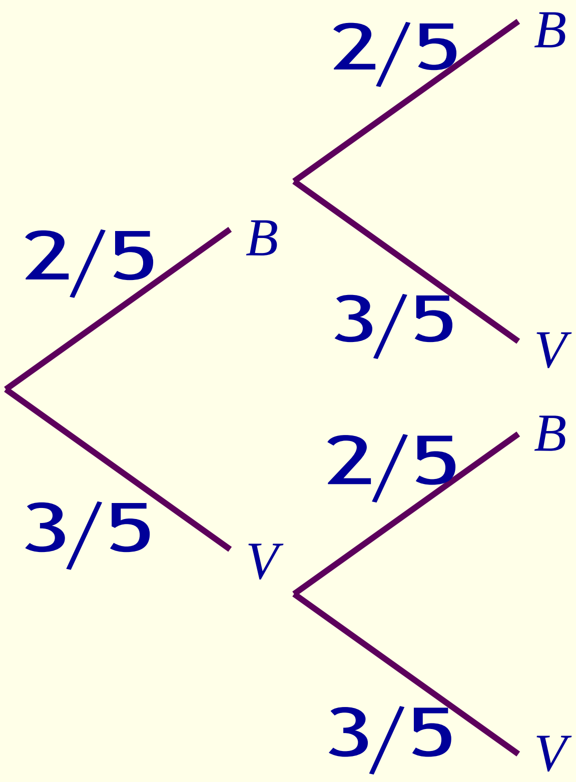
Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
VV	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
Total	1

Temos

$$P(A)=\frac{2}{20}+\frac{6}{20}=\frac{2}{5} \quad \text{e}$$

$$P(A\,|\,C)=\frac{1}{4}\ .$$

Considere agora que as extrações são feitas ***com reposição***, ou seja, a 1ª. bola sorteada é reposta na urna antes da 2ª. extração. Nesta situação, temos



Resultados	**Probabilidade**
BB	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
BV	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
VB	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
VV	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
Total	1

Neste caso,

$P(A)$ = P(branca na 2ª.) = $\dfrac{4}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{2}{5}$ e

$P(A \mid C)$ = P(branca na 2ª.| branca na 1ª.) = $\dfrac{2}{5}=P(A)$

$P(A \mid C^c)$ = P(branca na 2ª.| vermelha na 1ª.) = $\dfrac{2}{5}=P(A)$

ou seja, o resultado na 2ª. extração *independe* do que ocorre na 1ª. extração.

Independência de eventos:

Dois eventos A e B são <u>independentes</u> se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

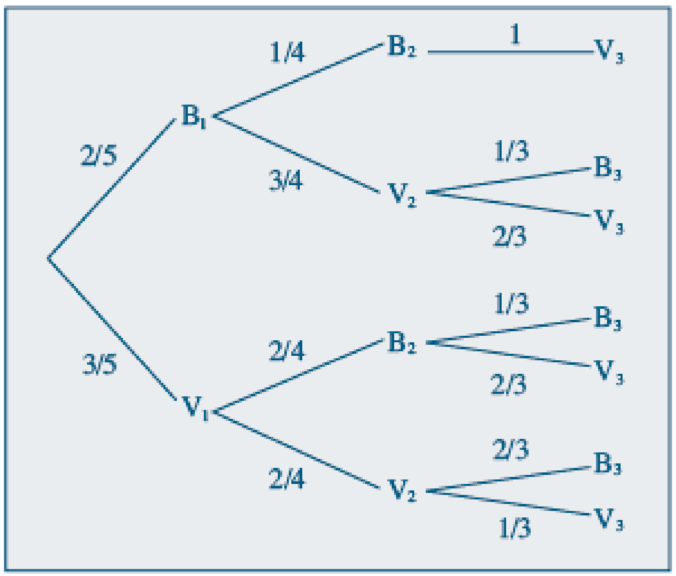
$$\boxed{P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.}$$

Temos a seguinte forma equivalente:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\ .}$$

Exemplo: **Considere ainda a urna dos dois exemplos anteriores, mas vamos fazer três extrações *sem reposição. Indiquemos por* V_i *ou* B_i *a obtenção de bola vermelha ou branca* na i-ésima extração, respectivamente, *i = 1, 2, 3.***

Figura 5.4 Diagrama em árvore para a extração de três bolas de uma urna, sem reposição.



Resultados	Probabilidades
$B_1B_2V_3$	$2/5 \times 1/4 \times 1 = 2/20 = 6/60$
$B_1V_2B_3$	$2/5 \times 3/4 \times 1/3 = 6/60$
$B_1V_2V_3$	$2/5 \times 3/4 \times 2/3 = 12/60$
$V_1B_2B_3$	$3/5 \times 2/4 \times 1/3 = 6/60$
$V_1B_2V_3$	$3/5 \times 2/4 \times 2/3 = 12/60$
$V_1V_2B_3$	$3/5 \times 2/4 \times 2/3 = 12/60$
$V_1V_2V_3$	$3/5 \times 2/4 \times 1/3 = 6/60$
Total	$60/60 = 1$

Observe que $P(B_2|B_1) = 1/4$, ao passo que $P(V_3|B_1 \cap B_2) = 1$; daí,

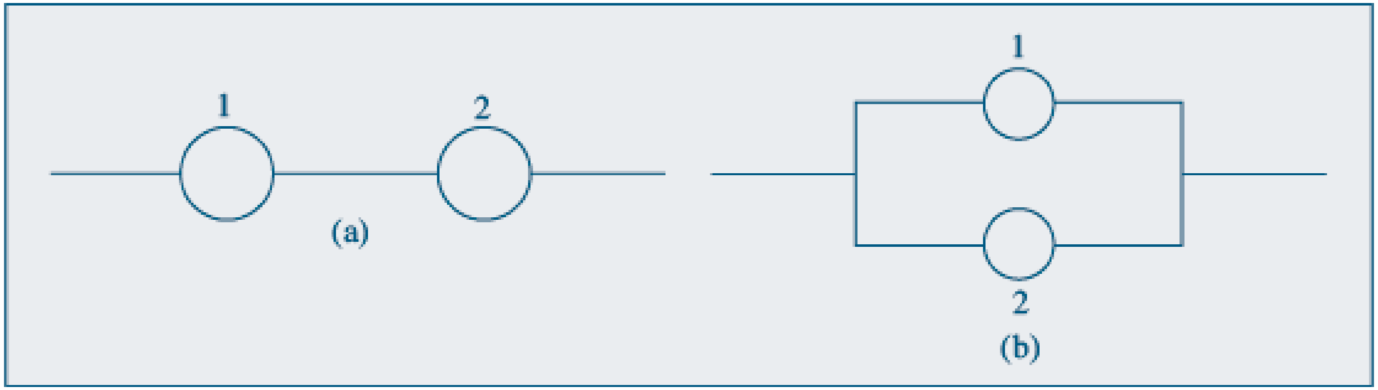
$$P(B_1 \cap B_2 \cap V_3) = P(B_1)\, P(B_2|B_1)\, P(V_3|B_1 \cap B_2) = 2/5 \times 1/4 \times 1 = 1/10.$$

De modo geral, dados três eventos A, B e C, temos que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|A \cap B). \qquad (5.10)$$

Exemplo: **A *teoria da confiabilidade estuda sistemas e seus componentes, por* exemplo, sistemas mecânicos e eletrônicos (um automóvel ou um computador) e sistemas biológicos, como o corpo humano. O objetivo da teoria é estudar as relações entre o funcionamento dos componentes e do sistema.**

Figura 5.5 Sistema com dois componentes (a) em série (b) em paralelo.



$$P(F) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 p_2,$$

$$P(F) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

O conceito de independência para três eventos:

dizemos que os eventos *A, B e C são independentes se, e somente se,*

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)\, P(B), \\
P(A \cap C) &= P(A)\, P(C), \\
P(B \cap C) &= P(B)\, P(C), \qquad (5.11) \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A)\, P(B)\, P(C).
\end{aligned}
$$

Obs:

- **Se apenas as três primeiras relações de (5.11) estiverem satisfeitas, dizemos que os eventos *A, B e C são mutuamente independentes.***
- ***É possível que três eventos* sejam mutuamente independentes, mas não sejam completamente independentes.**

O Teorema de Bayes

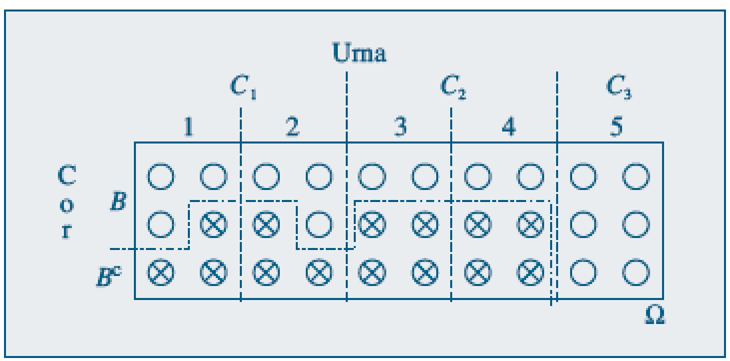
A versão mais simples desse teorema é dada pela fórmula (5.12):

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}. \qquad (5.12)$$

O Teorema de Bayes

Exemplo: Temos cinco urnas, cada uma com seis bolas. Duas dessas urnas (tipo *C1) têm* 3 bolas brancas, duas outras (tipo *C2) têm 2 bolas brancas, e a última urna (tipo C3) tem 6 bolas* brancas. Escolhemos uma urna ao acaso e dela retiramos uma bola. Qual a probabilidade de a urna escolhida ser do tipo *C3, sabendo-se que a bola sorteada é branca?*

Figura 5.6 Espaço amostral e eventos para o Exemplo 5.14.



Queremos encontrar $P(C_3|B)$, sabendo que

$$P(C_1) = 2/5, \ \ P(B|C_1) = 1/2,$$

$$P(C_2) = 2/5, \ \ P(B|C_2) = 1/3,$$

$$P(C_3) = 1/5, \ \ P(B|C_3) = 1.$$

Da definição de probabilidade condicional, temos

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)}.$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C_1 \cap B) + P(C_2 \cap B) + P(C_3 \cap B) \\ &= P(C_1)P(B|C_1) + P(C_2)P(B|C_2) + P(C_3)P(B|C_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

$$P(C_3|B) = \frac{1/5 \times 1}{8/15} = \frac{3}{8}.$$

Exemplo: Para selecionar seus funcionários, uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante uma semana. No final do curso, eles são submetidos a uma prova e 25% são classificados como bons (B), 50% como médios (M) e os restantes 25% como fracos (F). Para facilitar a seleção, a empresa pretende substituir o treinamento por um teste contendo questões referentes a conhecimentos gerais e específicos. Para isso, gostaria de conhecer qual a probabilidade de um indivíduo aprovado no teste ser considerado fraco, caso fizesse o curso. Assim, neste ano, antes do início do curso, os candidatos foram submetidos ao teste e receberam o conceito aprovado (A) ou reprovado (R). No final do curso, obtiveram-se as seguintes probabilidades condicionais:

$$P(A|B) = 0{,}80, \qquad P(A|M) = 0{,}50, \qquad P(A|F) = 0{,}20.$$

Queremos encontrar $P(F|A)$ e, pelo Teorema de Bayes, essa probabilidade é dada por

$$P(F|A) = \frac{P(A|F)P(F)}{P(A|B)P(B) + P(A|M)P(M) + P(A|F)P(F)}$$

$$= \frac{(0,20)(0,25)}{(0,80)(0,25) + (0,50)(0,50) + (0,20)(0,25)} = 0{,}10.$$

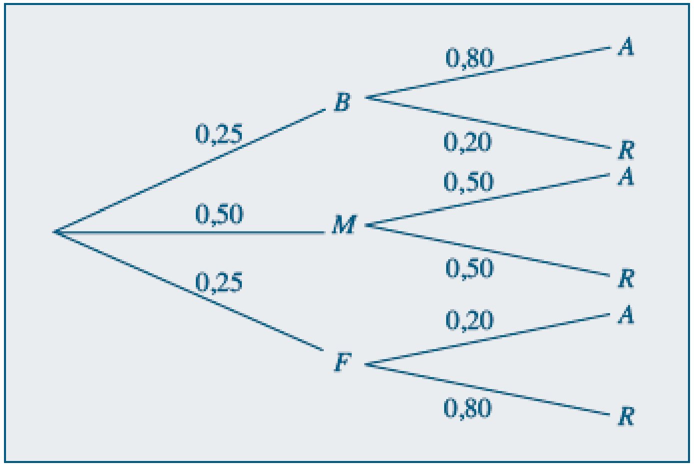
$$P(A|B) = 0{,}80, \qquad P(A|M) = 0{,}50, \qquad P(A|F) = 0{,}20.$$

Queremos encontrar $P(F|A)$ e, pelo Teorema de Bayes, essa probabilidade é dada por

$$P(F|A) = \frac{P(A|F)P(F)}{P(A|B)P(B) + P(A|M)P(M) + P(A|F)P(F)}$$

$$= \frac{(0,20)(0,25)}{(0,80)(0,25) + (0,50)(0,50) + (0,20)(0,25)} = 0{,}10.$$

Figura 5.8 Diagrama em árvore para o Exemplo 5.15.



Resultados	Probabilidades
BA	(0,25) (0,80) = 0,20*
BR	(0,25) (0,20) = 0,05
MA	(0,50) (0,50) = 0,25*
MR	(0,50) (0,50) = 0,25
FA	(0,25) (0,20) = 0,05* °
FR	(0,25) (0,80) = 0,20

Exemplo: A administração de um fundo de investimentos em ações pretende divulgar, após o encerramento do pregão, a probabilidade de queda de um índice da bolsa no dia seguinte, baseando-se nas informações disponíveis até aquele momento. Suponha que a revisão inicial seja de 0,10. Após encerrado o pregão, nova informação sugere uma alta do dólar frente ao real. A experiência passada indica que, quando houve queda da bolsa no dia seguinte, 20% das vezes foram precedidas por esse tipo de notícia, enquanto, nos dias em que a bolsa esteve em alta, apenas em 5% das vezes houve esse tipo de notícia no dia anterior.

***E* : *o evento que indica "queda da bolsa", probabilidade a priori* é *P(E) = 0,10*, *enquanto a probabilidade de alta é* *P(E^c) = 0,90*.**

***Se B indicar "alta do* dólar", então as verossimilhanças são dadas por**

$$P(B|E) = 0{,}20, \qquad P(B|E^c) = 0{,}05.$$

Logo, pelo Teorema de Bayes, teremos que

$$P(E|B) = \frac{P(E)\,P(B|E)}{P(E)P(B|E) + P(E^c)P(B|E^c)},$$

ou seja,

$$P(E|B) = \frac{(0,10)(0,20)}{(0,10)(0,20) + (0,90)(0,05)} = \frac{0,02}{0,065} = \frac{4}{13} = 0,31.$$

Portanto, a nova informação aumenta a probabilidade de que haja queda na bolsa de 10% para 31%.

Exemplo: Suponha, agora, que horas depois surja nova informação relevante: o Banco Central irá reduzir a taxa de juros vigente a partir do dia seguinte. Denotando-se, agora, por *B1 o* evento "alta do dólar" e por *B2 o evento "queda na taxa de juros", o interesse será saber* como essa nova informação, *B2, afetará a probabilidade calculada, P(E|B1). Segue-se que* essa é agora a probabilidade *a priori para E com respeito a B2.* Novamente, informações passadas mostram que, dado que tenha havido alta do dólar e queda da bolsa, 10% das vezes foram precedidas por notícias de queda de juros, enquanto, dado que tenha havido alta do dólar e alta da bolsa, 60% das vezes foram precedidas de queda dos juros. Então, as verossimilhanças agora serão dadas por

$$P(B_2|E, B_1) = 0{,}10, \qquad P(B_2|E^c, B_1) = 0{,}60.$$

O Teorema de Bayes fica escrito agora na forma

$$P(E|B_1, B_2) = \frac{P(E|B_1)\,P(B_2|E, B_1)}{P(E|B_1)\,P(B_2|E, B_1) + P(E^c|B_1)\,P(B_2|E^c, B_1)},$$

do que segue que

$$P(E|B_1, B_2) = \frac{(0,31)(0,10)}{(0,31)(0,10) + (0,69)(0,60)} = \frac{0,031}{0,445} = 0,07.$$