Probabilidades

Exemplo 5.1. Queremos estudar as frequências de ocorrências das faces de um dado. Um procedimento a adotar seria lançar o dado certo número de vezes, n, e depois contar o número n_i de vezes em que ocorre a face i, $i = 1, 2, ..., 6$. As proporções n_i/n determinam a distribuição de frequências do experimento realizado. Lançando o dado um número $n'(n' \neq n)$ de vezes, teríamos outra distribuição de frequências, mas com um padrão que esperamos ser muito próximo do anterior.

Tabela 5.1 Modelo para lançamento de um dado.

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência teórica	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Exemplo 5.2 De um grupo de duas mulheres (M) e três homens (H), uma pessoa será sorteada para presidir uma reunião. Queremos saber as probabilidades de o presidente ser do sexo masculino ou feminino. Observamos que: (i) só existem duas possibilidades: ou a pessoa sorteada é do sexo masculino (H) ou é do sexo feminino (M); (ii) supondo que o sorteio seja honesto e que cada pessoa tenha igual chance de ser sorteada, teremos o modelo probabilístico da Tabela 5.2 para o experimento.

Tabela 5.2 Modelo teórico para o Exemplo 5.2.

Sexo	*M*	*H*	Total
Frequência teórica	2/5	3/5	1

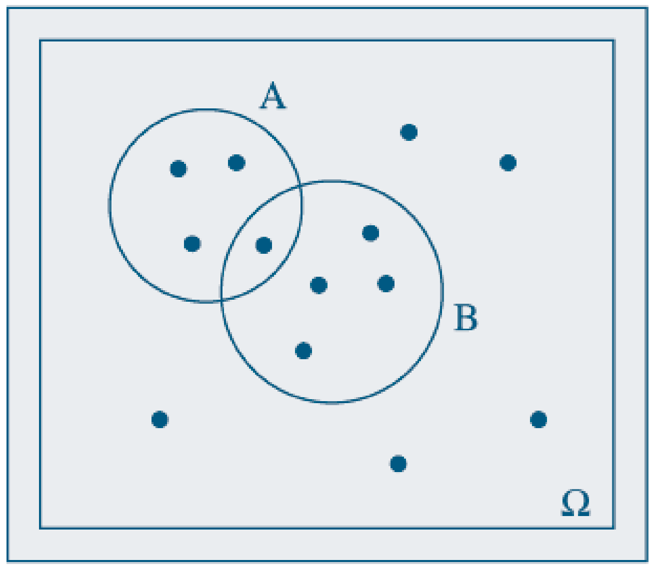
(a) um *espaço amostral*, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento em questão:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$$

(os elementos de Ω são os *pontos amostrais* ou *eventos elementares*);

(b) uma *probabilidade*, $P(\omega)$, para cada ponto amostral, de tal sorte que seja possível encontrar a probabilidade $P(A)$ de qualquer subconjunto A de Ω, isto é, a probabilidade do que chamaremos de um *evento aleatório* ou simplesmente *evento*.

Figura 5.1 Espaço amostral e eventos aleatórios.



Exemplo 5.3 Lançamos uma moeda duas vezes. Se C indicar cara e R indicar coroa, então um espaço amostral será

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

em que $\omega_1 = (C, C)$, $\omega_2 = (C, R)$, $\omega_3 = (R, C)$, $\omega_4 = (R, R)$. É razoável supor que cada ponto ω_i tenha probabilidade 1/4, se a moeda for perfeitamente simétrica e homogênea.

Se designarmos por A o evento que consiste na obtenção de faces iguais nos dois lançamentos, então

$$P(A) = P\{\omega_1, \omega_4\} = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

De modo geral, se A for qualquer evento de Ω, então

$$P(A) = \sum_j P(\omega_j), \tag{5.1}$$

em que a soma é estendida a todos os pontos amostrais $\omega_j \in A$.

Exemplo 5.4 Uma fábrica produz determinado artigo. Da linha de produção são retirados três artigos, e cada um é classificado como bom (B) ou defeituoso (D). Um espaço amostral do experimento é

$$\Omega = \{\text{BBB, BBD, BDB, DBB, DDB, DBD, BDD, DDD}\}.$$

Se A designar o evento que consiste em obter dois artigos defeituosos, então $A = \{\text{DDB, DBD, BDD}\}$.

Exemplo 5.5 Considere o experimento que consiste em retirar uma lâmpada de um lote e medir seu "tempo de vida" antes de se queimar. Um espaço amostral conveniente é

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\},$$

isto é, o conjunto de todos os números reais não negativos. Se A indicar o evento "o tempo de vida da lâmpada é inferior a 20 horas", então $A = \{t : 0 \leq t < 20\}$. Esse é um exemplo de um espaço amostral *contínuo*, contrastado com os anteriores, que são *discretos*.

Algumas Propriedades

Como a frequência relativa é um número entre 0 e 1, temos que

$$0 < P(A) < 1, \tag{5.2}$$

para qualquer evento A. Será útil considerar o espaço todo Ω e o conjunto vazio $\varnothing$ como eventos. O primeiro é denominado *evento certo* e o segundo, *evento impossível*, e temos

$$P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0. \tag{5.3}$$

Exemplo 5.6 Na Tabela 5.3, temos dados referentes a alunos matriculados em quatro cursos de uma universidade em dado ano.

Tabela 5.3 Distribuição de alunos segundo o sexo e escolha de curso.

Curso \ Sexo	Homens (H)	Mulheres (F)	Total
Matemática Pura (*M*)	70	40	110
Matemática Aplicada (*A*)	15	15	30
Estatística (*E*)	10	20	30
Computação (*C*)	20	10	30
Total	115	85	200

M: matemática pura;
A: matemática aplicada;
E: estatística;
C: computação;
H: homem;
F: mulher.

$$P(E) = 30/200;$$

$$P(H) = 115/200$$

Dados os eventos A e H, podemos considerar dois novos eventos:

- $A \cup H$, chamado a *reunião* de A e H, quando pelo menos um dos eventos ocorre;
- $A \cap H$, chamado a *intersecção* de A e H, quando A e H ocorrem simultaneamente.

$$P(A \cap H) = 15/200,$$

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \frac{30}{200} + \frac{115}{200} - \frac{15}{200} = \frac{130}{200}.$$

$$P(A \cup C) = 60/200 = P(A) + P(C).$$

Portanto, se U e V são dois eventos quaisquer, teremos a chamada *regra da adição de probabilidades*

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V), \tag{5.4}$$

que se reduz a

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V), \tag{5.5}$$

se U e V são eventos mutuamente exclusivos.

De modo geral, vamos indicar por A^c o complementar de um evento qualquer A, e teremos então

$$P(A) + P(A^c) = 1. \tag{5.6}$$

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(c) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \Omega = A$

(d) $\emptyset^c = \Omega$, $\Omega^c = \emptyset$

(e) $A \cap A^c = \emptyset$

(f) $A \cup A^c = \Omega$

(g) $A \cup \emptyset = A$, $A \cup \Omega = \Omega$

(h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exemplo 5.7 Consideremos um experimento aleatório e os eventos A e B associados, tais que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/4$. Então temos:

(a) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 1/2 = 1/2$;
$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 1/3 = 2/3$.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/3 - 1/4 = 7/12$.

(c) $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 7/12 = 5/12$.

(d) $P(A^c \cup B^c) = P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 1/4 = 3/4$.

(e) Calculemos $P(A^c \cap B)$, isto é, a probabilidade de que ocorra B e não ocorra A. Podemos escrever

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B),$$

ou seja, B pode ocorrer com A ou (exclusivo) com A^c. Logo,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B),$$

do que decorre

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 1/3 - 1/4 = 1/12.$$

Consideremos, agora, uma situação historicamente importante, a saber, aquela em que temos um espaço amostral finito, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, em que todos os pontos têm a mesma probabilidade $1/n$. Se A for um evento contendo m pontos amostrais, então

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Exemplo 5.9 O jogo da Megasena consiste em escolher 6 números dentre os 60 números (01, 02, ..., 59, 60). O jogador pode marcar num cartão de 6 a 15 números. Os custos (em reais) de cada jogo estão relacionados abaixo.

Números	Custo
6	2,00
7	14,00
8	56,00
9	168,00
10	420,00
11	924,00
12	1.848,00
13	3.432,00
14	6.010,00
15	10.010,00

Temos, ao todo, $\binom{60}{6} = 50.063.860$ possibilidades. Portanto, com um jogo único de R$ 2,00 (seis números), a probabilidade de ganhar o prêmio máximo é $1/\binom{60}{6}$, ou seja, aproximadamente, uma chance em 50 milhões. Por que o jogo com 7 números custa R$ 7,00? Porque com 7 números podemos formar $\binom{7}{6} = 7$ jogos de 6 números. Ou seja, fazer um jogo com 7 números ou 7 jogos com 6 números são ações equivalentes, em termos de probabilidade de ganhar. Do mesmo modo, um jogo de 15 dezenas custa R$ 10.010,00, porque com 15 números podemos formar $\binom{15}{6} = 5.005$ jogos de 6 números. Portanto, é mais fácil preencher um boleto com 15 números do que 5.005 boletos com 6 números, já que as probabilidades associadas são iguais.