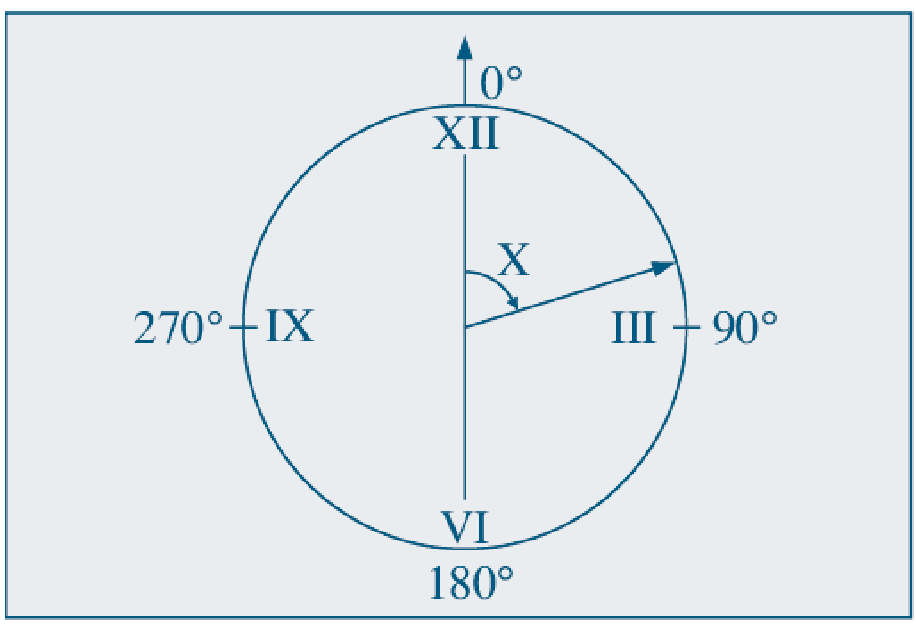
Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição Uma função *X*, definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma *variável aleatória contínua.*

Exemplo O ponteiro dos segundos de um relógio mecânico pode parar a qualquer instante, devido a algum defeito técnico, ou término da bateria, e vamos indicar por *X* o ângulo que esse ponteiro forma com o eixo imaginário passando pelo centro do mostrador e pelo número XII, conforme mostra a Figura 7.1.

Figura 7.1 Ilustração de uma v.a. X discreta.



Medindo esse ângulo X em graus e lembrando que:

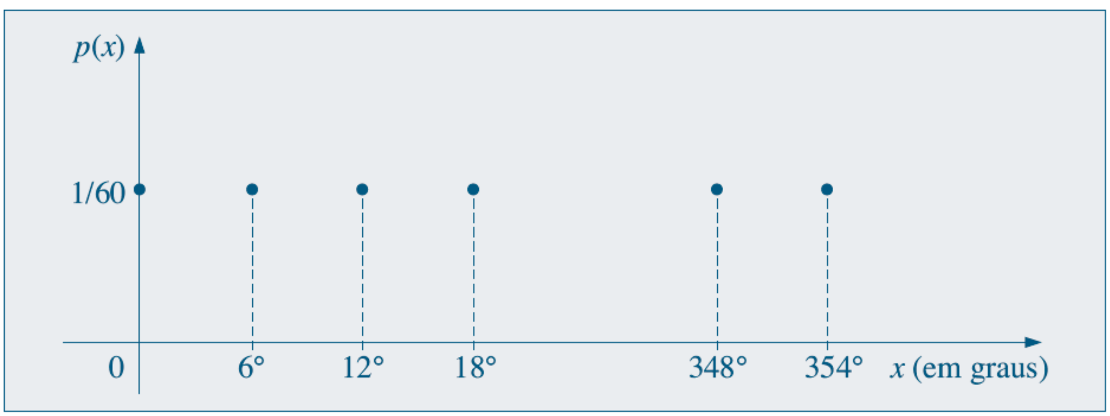
(i) o ponteiro deve dar 60 “saltos” (ele dá um salto em cada segundo) para completar uma volta;

(ii) acreditamos que o ponteiro tenha probabilidade igual de parar em qualquer ponto, então, a v.a. X tem distribuição uniforme discreta, com função de probabilidade dada pela Tabela 7.1 e representada graficamente na Figura 7.2.

Tabela 7.1 Distribuição uniforme discreta.

x	0°	6°	12°	18°	...	348°	354°
$p(x)$	1/60	1/60	1/60	1/60	...	1/60	1/60

Figura 7.2 Distribuição uniforme discreta.



Considerando esse mesmo problema com um relógio elétrico, para o qual o ponteirodos segundos move-se continuamente, necessitamos de um outro modelo para representar a v.a. X.

- X pode assumir qualquer valor do intervalo $[0,360) = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 360\}$.
- como no caso do relógio mecânico, continuamos a acreditar que não exista uma região de preferência para o ponteiro parar.
- Como existem infinitos pontos nos quais o ponteiro pode parar, cada um com igual probabilidade, se fôssemos usar o mesmo método usado para a v.a. discreta uniforme, cada ponto teria probabilidade de ocorrer igual a zero.
- Assim não tem muito sentido falar na probabilidade de que o ângulo X seja igual a certo valor, pois essa probabilidade sempre será igual a zero.
- Entretanto, podemos determinar a probabilidade de que X esteja compreendido entre dois valores quaisquer.
- Por exemplo, a probabilidade de o ponteiro parar no intervalo compreendido entre os números XII e III é 1/4, pois esse intervalo corresponde a 1/4 do intervalo total.

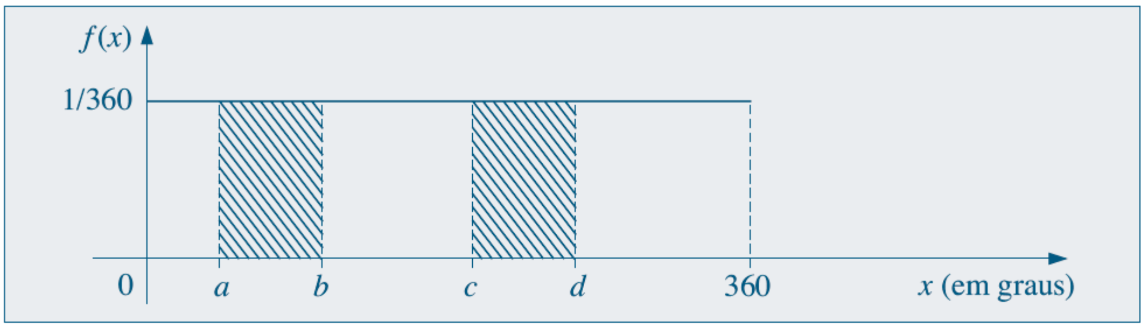
$$P(0^{o} \leq X \leq 90^{o}) = \frac{1}{4}.$$

$$P(120^{o} \leq X \leq 150^{o}) = 1/12.$$

Dados dois números *a* e *b*, tais que $0^o \leq a < b < 360^o$, a probabilidade de $X \in [a, b)$ é

$$P(a \leq X < b) = \frac{b-a}{360^o}$$

Figura 7.3 Histograma alisado: distribuição uniforme contínua.



O histograma alisado da Figura 7.3 corresponde à seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0^o \\ 1/360, & \text{se } 0^o \leq x < 360^o \\ 0, & \text{se } x \geq 360^o. \end{cases}$$

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{360}\,dx = \frac{b-a}{360},$$

A função $f(x)$ é chamada *função densidade de probabilidade* (f.d.p.) da v.a. X.

Propriedades dos Modelos Contínuos

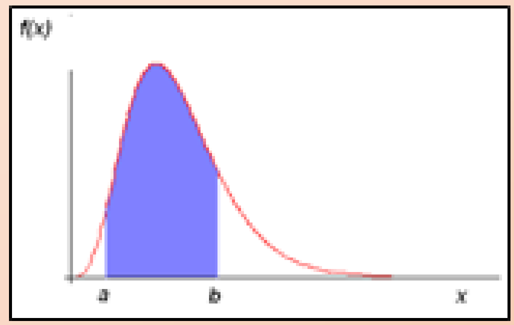
Uma v.a. X contínua é caracterizada por sua *função densidade de probabilidade* $f(x)$ com as propriedades:

(i) A área sob a curva de densidade é 1;

(ii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade $f(x)$ e acima do eixo x, entre os pontos a e b;

(iii) $f(x) \geq 0$, para todo x;

(iv) $P(X = x_0) = 0$, para x_0 fixo.

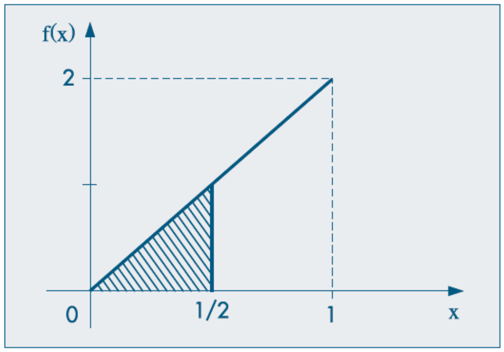


Assim, $P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$

$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$.

Exemplo 7.2. Se $f(x) = 2x$, para $0 \leqslant x \leqslant 1$, e zero fora desse intervalo, vemos que $f(x) \geqslant 0$, para qualquer x, e a área sob o gráfico de $f(x)$ é unitária (verifique na Figura 7.4). Logo, a função f pode representar a função densidade de uma v.a. contínua X.

Figura 7.4: f.d.p. da v.a. X do Exemplo 7.2.



Valor Médio de uma Variável Aleatória Contínua

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx.$$

$$E(X) = \int_A^B xf(x)dx.$$

Exemplo 7.4 No caso do relógio elétrico do Exemplo 7.1, obtemos

$$E(X) = \int_0^{360} x\frac{1}{360}dx = \left[\frac{1}{360}\frac{x^2}{2}\right]_0^{360} = 180,$$

que é o valor esperado devido à distribuição uniforme das frequências teóricas.

Variância de uma Variável Aleatória Contínua

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx.$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Exemplo 7.5 Para os dois exemplos vistos anteriormente, teremos:

(i) para o caso do relógio,

$$\mathrm{Var}(X) = \int_0^{360} (x - 180)^2 \frac{1}{360} dx = \frac{1}{360}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{360x^2}{2} + 180^2 x\right]_0^{360} = 10.800;$$

(ii) para o Exemplo 7.2,

$$\mathrm{Var}(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2xdx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Como no caso de v.a. discretas, o desvio padrão de uma v.a. contínua X é definido como

$$DP(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}, \tag{7.7}$$

$$E(X) = \mu(X),$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X),$$
$$DP(X) = \sigma(X),$$

Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < \infty.$$

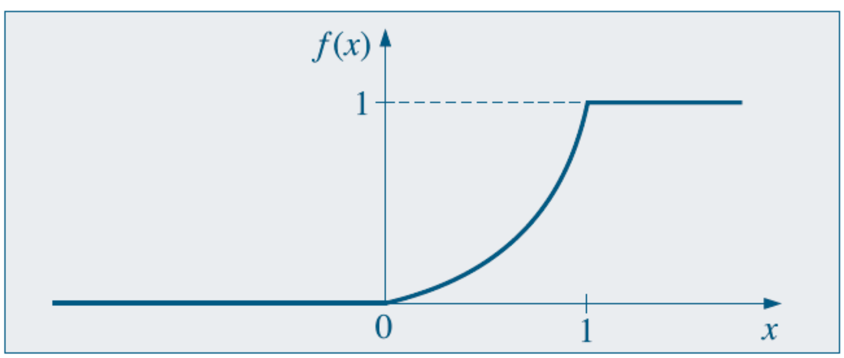
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$ para todo real x.

Exemplo 7.6 Retomemos o Exemplo 7.2. Temos

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x 2t\,dt = x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 2t\,dt + \int_1^x 0\,dt = 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

O gráfico de $F(x)$ está na Figura 7.7.

Figura 7.7 f.d.a. da v.a. X do Exemplo 7.6.



(i) $\lim_{x\to-\infty} F(X) = 0,$

(ii) $\lim_{x\to\infty} F(X) = 1.$

Proposição 7.1 Para todos os valores de x para os quais $F(x)$ é derivável temos

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

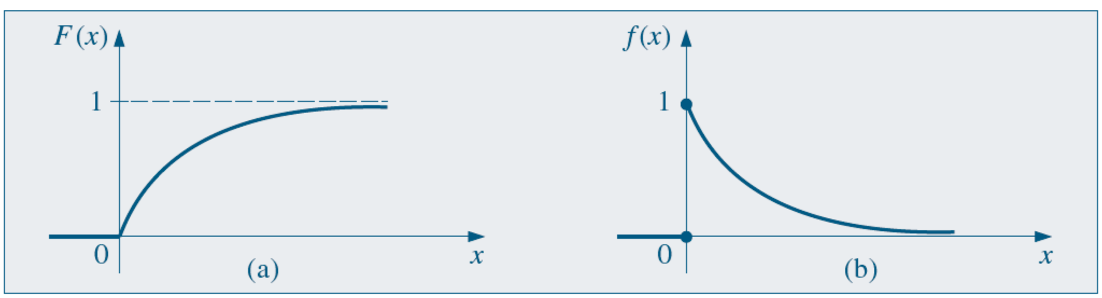
Exemplo 7.7 Suponha que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

seja a f.d.a. de uma v.a. X. Então,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Figura 7.8 Distribuição exponencial ($\beta = 1$) (a) f.d.a. (b) f.d.p.



Se a e b forem dois números reais quaisquer,

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \tag{7.11}$$