Distribuição Hipergeométrica

Essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas sem reposição de uma população dividida segundo dois atributos.

Para ilustrar, considere uma população de N objetos, r dos quais têm o atributo A e N - r têm o atributo B. Um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, sem reposição. Estamos interessados em calcular a probabilidade de que esse grupo contenha k elementos com o atributo A. Pode-se ver facilmente, utilizando o princípio multiplicativo, que essa probabilidade é dada por

$$p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

em que $\max(0, n - N + r) \leq k \leq \min(r, n)$.

Os pares (k, p_k) constituem a distribuição hipergeométrica de probabilidades.

notação: $\boldsymbol{X} \sim \mathbf{hip}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$.

Se definirmos a v.a. X como sendo o número de elementos na amostra que têm o atributo A, então $P(X = k) = p_k$.

Exemplo Em problemas de controle de qualidade, suponha que num lote de N = 100 peças, r = 10 sejam defeituosas. Escolhendo n = 5 peças sem reposição,

a) a probabilidade de não se obter peças defeituosas é

$$p_0 = \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \simeq 0,584,$$

b) a probabilidade de se obter pelo menos uma defeituosa é

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_5 = 1 - p_0 \simeq 0,426.$$

$$E(X) = np,$$

$$\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)\frac{N - n}{N - 1},$$

$$p = r/N$$

Observação: Se N for grande, quando comparado com n, então extrações com ou sem reposição serão praticamente equivalentes,

$$p_k \simeq b(k; n, p).$$

Distribuição de Poisson

Para uma distribuição Binomial, Para n grande e p pequeno, podemos aproximar essas probabilidades por

$$b(k; n, p) \simeq \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \quad , \quad \lambda = np$$

A aproximação é boa se n for grande e p pequeno e de tal sorte que np $\leq$ 7.

Exemplo Consideremos aproximar b(2; 1.000, 0,0001. Temos que np = 0,1, logo

$$b(2; 1.000, 0, 0001) \simeq \frac{e^{-0,1}(0,1)^2}{2!} = 0, 0045.$$

Outra Aplicação:

A distribuição de Poisson é largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo, ou superfície ou volume.São exemplos:

(a) número de chamadas recebidas por um telefone durante cinco minutos;

(b) número de falhas de um computador num dia de operação;

(c) número de relatórios de acidentes enviados a uma companhia de seguros numa semana.

De modo geral, dizemos que a v.a. N tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ se

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.24)$$

$$E(N) = \mathrm{Var}(N) = \lambda$$

Notação: $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

λ representa o número médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado.

Exemplo Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o telefone não receba chamadas durante um intervalo de um minuto.

Segue-se que $\lambda = 5$ e

$$P(N = 0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0,0067.$$

se quisermos a probabilidade de obter no máximo duas chamadas em quatro minutos, teremos λ = 20 chamadas em quatro minutos, logo

$$P(N \leq 2) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) = e^{-20}(1 + 20 + 200) = 221e^{-20},$$

Tabela 6.14 Modelos para variáveis discretas.

Modelo	$P(X = x)$	Parâmetros	$E(X)$, $\text{Var}(X)$
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$	p	$p, p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, x = 0, \ldots, n$	n, p	$np, np(1-p)$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$	λ	λ, λ
Geométrica	$p(1-p)^{x-1}, x = 1, 2, \ldots$	p	$\frac{1}{p}, \frac{(1-p)}{p^2}$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{n}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, a \leq x \leq b^{(1)}$	N, r, n	$\frac{nr}{N}, n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

$^{(1)}a = \max(0, n - N + r), b = \min(r, n)$.

Geométrica (conta o número ensaios para se obter um sucesso.)

Seja X a variável aleatória que fornece o número de ensaios de Bernoulli realizados até a obtenção do primeiro sucesso. A variável X tem distribuição Geométrica com parâmetro p, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(1-p)^{x-1}, x = 1, 2, \ldots$$

Exemplo: Um pesquisador está realizando um experimentos químico independentes e sabe que a probabilidade de que cada experimento apresente uma reação positiva é $0,3$. Qual é a probabilidade de que menos de 5 reações negativas ocorram antes da primeira positiva?