VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Variável Aleatória

Uma função X que associa a cada elemento ω do espaço amostral Ω um valor $x \in R$ é denominada uma ***variável aleatória***.

Experimento: jogar 1 dado duas vezes e observar o resultado
(P = par e I= impar)

X: número de vezes que saiu par em 2 lances do dado

$X = 0 \Leftrightarrow$ II
$X = 1 \Leftrightarrow$ IP ou PI
$X = 2 \Leftrightarrow$ PP

Variável Aleatória

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

Exemplos:

1) Observa-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino).

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}$$

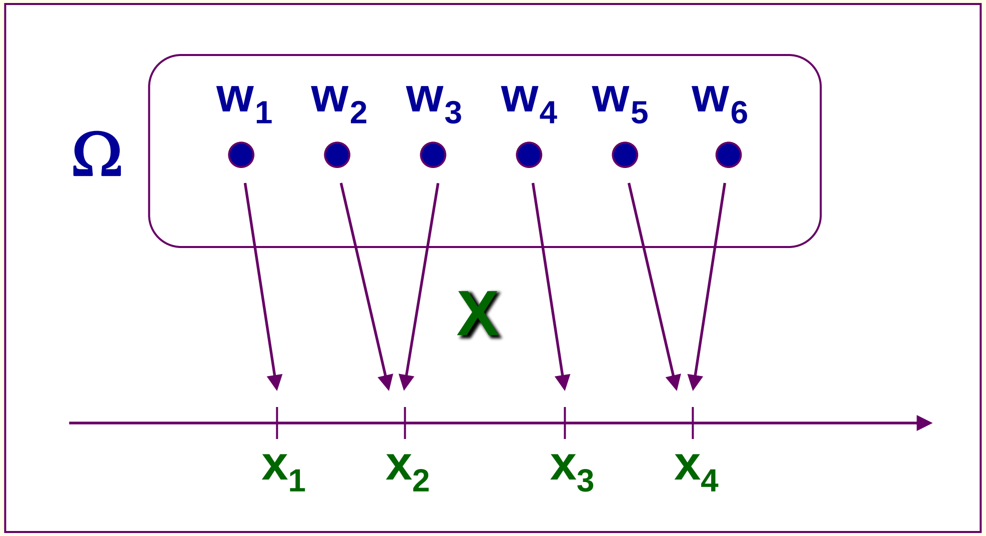
$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4 \quad \omega_5 \quad \omega_6 \quad \omega_7 \quad \omega_8$$

Defina X: nº. de crianças do sexo masculino (M).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

$\rightarrow$ Então X assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, logo é uma **variável aleatória discreta**.

Variável Aleatória Discreta



Uma função X, definida no espaço amostral Ω e com valores num conjunto enumerável de pontos da reta é dita uma variável aleatória discreta.

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Caracterização

Função de probabilidade: É a função que atribui a **cada valor x_i da v. a. discreta X** sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função de probabilidade deve satisfazer:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Exemplo 1:

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.
Qual é a probabilidade da comissão ser formada por *pelo menos duas mulheres*?

Vamos definir a v.a.

X: nº. de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que X pode assumir?

Espaço amostral	Probabilidade	X
(HHH)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$	0
(HHM)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$	1
(HMH)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(MHH)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(HMM)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MHM)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MMH)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$	2
(MMM)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$	3

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, $P(X \geq 2)$ = P(X=2) + P(X=3) = 0,291 + 0,056 = 0,347.

Exemplo 2:

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes (A e B), e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade de seu empreendimento, o empresário quer ter uma ideia da distribuição do lucro por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como bom, longo ou curto, conforme sua medida esteja dentro da especificação, maior ou menor que a especificada, respectivamente. Além disso, foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente ($5,00) e as probabilidades de produção de cada componente com as características bom, longo e curto.

Exemplo 2:

Tabela 6.1 Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

Produto		Fábrica A Cilindro	Fábrica B Esfera
Dentro das especificações	bom (B)	0,80	0,70
Maior que as especificações	longo (L)	0,10	0,20
Menor que as especificações	curto (C)	0,10	0,10

Fonte: Retirada das especificações técnicas das fábricas A e B.

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C (curto), ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de $5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de $5,00. Se o preço de venda de cada unidade for de $25,00, como seria a distribuição de frequências da variável *X:* lucro por conjunto montado?

Figura 6.1 Diagrama em árvore para o Exemplo 6.1.

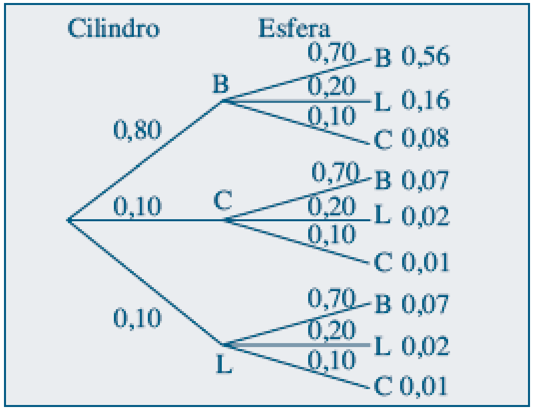


Tabela 6.2 Distribuição de probabilidade das possíveis composições das montagens.

Produto	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	–5
LB	0,07	10
LL	0,02	5
LC	0,01	–5
CB	0,07	–5
CL	0,02	–5
CC	0,01	–5

Fonte: Figura 5.1 e informações no texto.

15, se ocorrer o evento $A_1 = \{BB\}$;
10, se ocorrer o evento $A_2 = \{BL, LB\}$;
5, se ocorrer o evento $A_3 = \{LL\}$;
–5, se ocorrer o evento $A_4 = \{BC, LC, CB, CL, CC\}$.

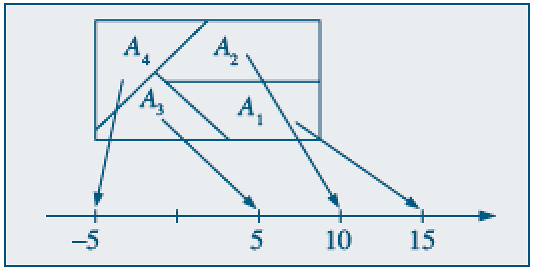
Cada um desses eventos tem uma probabilidade associada, ou seja,

$$P(A_1) = 0{,}56, \quad P(A_2) = 0{,}23,$$
$$P(A_3) = 0{,}02, \quad P(A_4) = 0{,}19,$$

Tabela 6.3 Distribuição da v.a. X.

x	$p(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
–5	0,19
Total	1,00

Figura 6.2 Função de probabilidade da v.a. X = lucro por montagem.



Exemplo 3:

Se considerarmos *Y como sendo a variável "custo de recuperação de cada* conjunto produzido", verificaremos que *Y irá assumir os valores*

0, se ocorrer o evento $B_1 = \{BB, BC, LC, CB, CL, CC\}$;

5, se ocorrer o evento $B_2 = \{BL, LB\}$;

10, se ocorrer o evento $B_3 = \{LL\}$.

Figura 6.3 Função de probabilidade da v.a. Y = custo de recuperação.

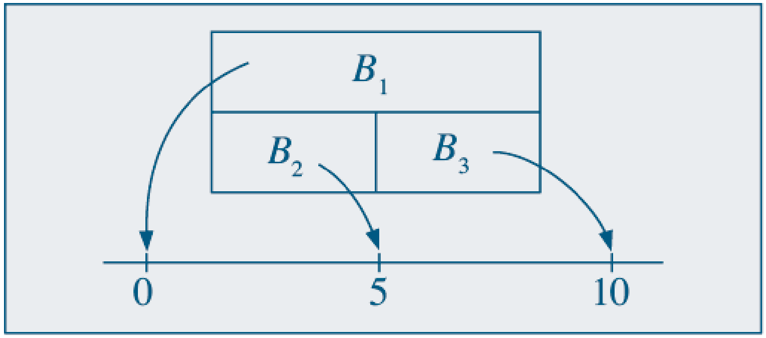


Tabela 6.4 Distribuição da v.a. Y.

y	$p(y)$
0	0,75
5	0,23
10	0,02
Total	1,00

Exemplo 4:

consideramos duas extrações, sem reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas.

Definamos a v.a. ***X: número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações.***

Figura 6.4 Diagrama em árvore

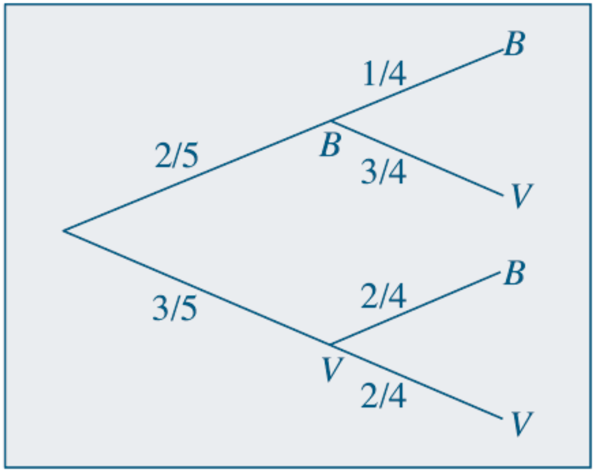


Tabela 6.5 Extrações sem reposição de urna com duas bolas brancas e três bolas vermelhas.

Resultados	Probabilidades	X
BB	1/10	0
BV	3/10	1
VB	3/10	1
VV	3/10	2

Fonte: Figura 6.4.

Tabela 6.6 Distribuição de probabilidades da v.a. X = número de bolas vermelhas.

x	$p(x)$
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Fonte: Tabela 6.5.

Exemplo 5:

consideramos o lançamento de uma moeda duas vezes. Definamos a v.a. *Y: número de caras obtidas nos dois lançamentos.*

Figura 6.5 Diagrama em árvore

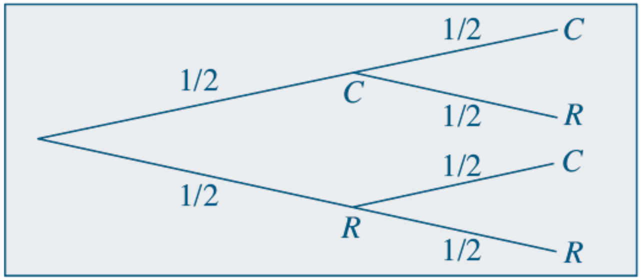


Tabela 6.7 Lançamento de duas moedas.

Resultados	Probabilidades	Y
CC	1/4	2
CR	1/4	1
RC	1/4	1
RR	1/4	0

Fonte: Figura 6.5.

Tabela 6.8 Distribuição da v.a. Y = número de caras.

y	$p(y)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Fonte: Tabela 6.7.

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Valor Esperado ("média"): Dada a v.a. X, assumindo os valores x_1, x_2, ..., x_n, chamamos de ***valor médio***, ou ***valor esperado***, ou ***esperança matemática*** da distribuição **de** X o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Notação: $\boldsymbol{\mu = E(X)}$

No exemplo 2: qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir.

Tabela 6.3 Distribuição da v.a. X.

x	$p(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
–5	0,19
Total	1,00

lucro médio = (0,56)(15) + (0,23)(10) + (0,02)(5) + (0,19)(–5) = 9,85.

Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Da relação acima, segue que

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = \mathrm{DP}(X)$.

(i) $\text{Var}(X) = 57{,}23$;

(ii) $DP(X) = 7{,}57$;

(iii) gráfico de $(x, p(x))$: Figura 6.7.

Figura 6.7 Gráfico de $p(x)$: distribuição da v.a. X = lucro por montagem.