

Funções de Variáveis Aleatórias

Tabela 8.9: Funções de variáveis aleatórias.

(x_i, y_j)	$X + Y$	XY	$p(x_i, y_j)$
(0, 0)	0	0	1/8
(0, 1)	1	0	0
(1, 0)	1	0	2/8
(1, 1)	2	1	1/8
(2, 0)	2	0	1/8
(2, 1)	3	2	2/8
(3, 0)	3	0	0
(3, 1)	4	3	1/8

A partir dessa tabela, obtemos as distribuições de $X + Y$ e XY , ilustradas nas Tabelas 8.10 e 8.11.

Tabela 8.10: Distribuição de $X + Y$.

$x + y$	0	1	2	3	4
$p(x + y)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

Tabela 8.11: Distribuição de XY .

xy	0	1	2	3
$p(xy)$	4/8	1/8	2/8	1/8

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1,5,$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0,5.$$

Da Tabela 8.10, obtemos

$$E(X + Y) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

Notamos que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. Poderia ser uma simples coincidência, mas essa relação é de fato verdadeira.

Se $g(X, Y)$ for uma função de X e Y , então,

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i, y_j) p(x_i, y_j). \quad (8.8)$$

Exemplo 8.4. Da Tabela 8.9 temos

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times \frac{1}{8} + 0 \times 0 + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 0 \times 0 \\ &\quad + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1. \end{aligned}$$

É claro que o mesmo valor pode ser obtido da Tabela 8.11, isto é, se $Z = XY$ e $p(z) = p(xy)$, então

$$E(Z) = E(XY) = 0 \times \frac{4}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1.$$

Observamos que, neste caso,

$$E(Z) = E(XY) = 1 \neq E(X)E(Y) = (1,5)(0,5) = 0,75,$$

Se X e Y são **variáveis aleatórias independentes**, então

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

(i) Se tivermos um número finito de v.a. $X_1, \dots, X_n$,

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n).$$

(ii) Se $X_1, \dots, X_n$ forem v.a. independentes, então

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = E(X_1) E(X_2) \dots E(X_n).$$

Exemplo:

Dada a distribuição conjunta de X e Y abaixo, determine a média e a variância de:

(a) $X+Y$.

(b) XY .

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	1	2	3
1	5/27	1/27	3/27
2	4/27	3/27	4/27
3	2/27	3/27	2/27

Covariância entre Duas Variáveis Aleatórias

Definição. Se X e Y são duas v.a., a covariância entre elas é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \quad (8.12)$$

ou seja, o valor médio do produto dos desvios de X e Y em relação às suas respectivas médias.

Suponha que X assumira os valores $x_1, \dots, x_n$, e Y os valores $y_1, \dots, y_m$, e que $P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j)$. Então, (8.12) pode ser escrita

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p(x_i, y_j). \quad (8.13)$$

A fórmula (8.12) pode ser escrita de uma forma mais simples. Note que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (8.14)$$

Exemplo:

Tabela 8.5: Distribuição conjunta de X e Y , como uma tabela de dupla entrada.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$p(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	1/2
1	0	1/8	2/8	1/8	1/2
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$E(X) = 1,5, E(Y) = 0,5, E(XY) = 1,0,$$

de modo que

$$\text{Cov}(X, Y) = 1,0 - (1,5)(0,5) = 0,25.$$

Definição. Quando $\text{Cov}(X, Y) = 0$, dizemos que as variáveis aleatórias X e Y são *não correlacionadas*.

Exemplo:

Tabela 8.12: Distribuição conjunta para o Exemplo

$\begin{matrix} Y \\ \backslash X \end{matrix}$	0	1	2	$p(y)$
1	$3/20$	$3/20$	$2/20$	$8/20$
2	$1/20$	$1/20$	$2/20$	$4/20$
3	$4/20$	$1/20$	$3/20$	$8/20$
$p(x)$	$8/20$	$5/20$	$7/20$	1,00

Temos que:

$$E(X) = 0 \times \frac{8}{20} + 1 \times \frac{5}{20} + 2 \times \frac{7}{20} = 0,95,$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{8}{20} + 2 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{8}{20} = 2,00,$$

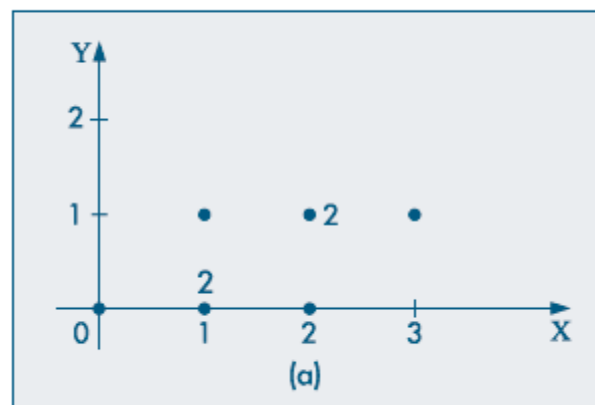
$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{3}{20} + 2 \times \frac{2}{20} + 0 \times \frac{1}{20} + 2 \times \frac{1}{20} \\ &+ 4 \times \frac{2}{20} + 0 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{1}{20} + 6 \times \frac{3}{20} = 1,90, \end{aligned}$$

do que obtemos

$$\text{Cov}(X, Y) = 1,90 - (0,95)(2,00) = 0.$$

Portanto, as v.a. X e Y desse exemplo são não-correlacionadas

X e Y



Proposição 8.1. Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, então $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Em outras palavras, se X e Y forem independentes, então elas serão não-correlacionadas. A recíproca não é verdadeira, isto é, se tivermos $\text{Cov}(X, Y) = 0$, isso não implica que X e Y sejam independentes.

(a) Para duas v.a. X e Y quaisquer, temos

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y);$$

(b) se X e Y forem independentes, então

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Definição. O coeficiente de correlação entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

. O coeficiente de correlação entre X e Y satisfaz a desigualdade

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

O coeficiente de correlação é uma medida da relação linear entre X e Y . Quando $\rho(X, Y) = \pm 1$, existe uma correlação perfeita entre X e Y , pois $Y = aX + b$. Se $\rho(X, Y) = 1$, $a > 0$, e se $\rho(X, Y) = -1$, $a < 0$. O grau de associação linear entre X e Y varia à medida que $\rho(X, Y)$ varia entre -1 e $+1$.

Exemplo:

Defina a v.a. W como sendo o “número de meninas”. A distribuição conjunta de X e W está na Tabela 8.13.

Tabela 8.13: Distribuição conjunta de X e W para o Exemplo

$W \backslash X$	0	1	2	3	$p(w)$
0	0	0	0	1/8	1/8
1	0	0	3/8	0	3/8
2	0	3/8	0	0	3/8
3	1/8	0	0	0	1/8
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

É fácil ver que

$$E(X) = E(W) = 1,5,$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(W) = 0,75,$$

$$E(XW) = 1,5,$$

do que segue que $\text{Cov}(X, W) = -0,75$ e portanto $\rho(X, W) = -1$. Esse é um resultado esperado, pois sabemos que $X = 3 - W$.

Figura 8.5: Diagrama de dispersão para as v.a. X e W

