Medidas-Resumo

Tipos de Variáveis

Exemplo 2.1 **Um pesquisador está interessado em fazer um levantamento sobre alguns aspectos socioeconômicos dos empregados da seção de orçamentos da Companhia MB. Usando informações obtidas do departamento pessoal, ele elaborou a Tabela 2.1.**

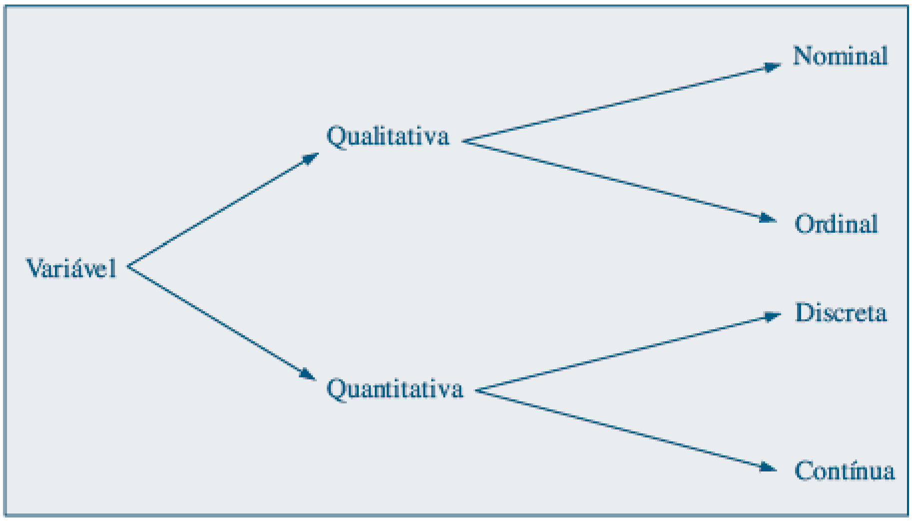
Tabela 2.1 Informações sobre estado civil, grau de instrução, número de filhos, salário (expresso como fração do salário mínimo), idade (medida em anos e meses) e procedência de 36 empregados da seção de orçamentos da Companhia MB.

Nº	Estado civil	Grau de instrução	Nº de filhos	Salário (x sal. mín.)	Idade		Região de procedência
					anos	meses	
1	solteiro	ensino fundamental	–	4,00	26	03	interior
2	casado	ensino fundamental	1	4,56	32	10	capital
3	casado	ensino fundamental	2	5,25	36	05	capital
4	solteiro	ensino médio	–	5,73	20	10	outra
5	solteiro	ensino fundamental	–	6,26	40	07	outra
6	casado	ensino fundamental	0	6,66	28	00	interior
7	solteiro	ensino fundamental	–	6,86	41	00	interior
8	solteiro	ensino fundamental	–	7,39	43	04	capital
9	casado	ensino médio	1	7,59	34	10	capital
10	solteiro	ensino médio	–	7,44	23	06	outra
11	casado	ensino médio	2	8,12	33	06	interior
12	solteiro	ensino fundamental	–	8,46	27	11	capital
13	solteiro	ensino médio	–	8,74	37	05	outra
14	casado	ensino fundamental	3	8,95	44	02	outra
15	casado	ensino médio	0	9,13	30	05	interior
16	solteiro	ensino médio	–	9,35	38	08	outra
17	casado	ensino médio	1	9,77	31	07	capital
18	casado	ensino fundamental	2	9,80	39	07	outra
19	solteiro	superior	–	10,53	25	08	interior
20	solteiro	ensino médio	–	10,76	37	04	interior
21	casado	ensino médio	1	11,06	30	09	outra
22	solteiro	ensino médio	–	11,59	34	02	capital
23	solteiro	ensino fundamental	–	12,00	41	00	outra
24	casado	superior	0	12,79	26	01	outra
25	casado	ensino médio	2	13,23	32	05	interior
26	casado	ensino médio	2	13,60	35	00	outra
27	solteiro	ensino fundamental	–	13,85	46	07	outra
28	casado	ensino médio	0	14,69	29	08	interior
29	casado	ensino médio	5	14,71	40	06	interior
30	casado	ensino médio	2	15,99	35	10	capital
31	solteiro	superior	–	16,22	31	05	outra
32	casado	ensino médio	1	16,61	36	04	interior
33	casado	superior	3	17,26	43	07	capital
34	solteiro	superior	–	18,75	33	07	capital
35	casado	ensino médio	2	19,40	48	11	capital
36	casado	superior	3	23,30	42	02	interior

Variável: Qualquer característica associada a uma população.

Variável	Representação
Estado civil	X
Grau de instrução	Y
Número de filhos	Z
Salário	S
Idade	U
Região de procedência	V

Figura 2.1 Classificação de uma variável.



- **Variável qualitativa nominal, para a qual não existe nenhuma ordenação nas possíveis realizações: a região de procedência, sexo, cor dos olhos, estado civil;**

- **Variável qualitativa ordinal, para a qual existe uma ordem nos seus resultados: grau de instrução, classe social;**

- **Variáveis quantitativas discretas, cujos possíveis valores formam um conjunto finito ou enumerável de números, e que resultam, frequentemente, de uma contagem, como número de filhos (0, 1, 2, ...);**

- **Variáveis quantitativas contínuas, cujos possíveis valores pertencem a um intervalo de números reais e que resultam de uma mensuração, como por exemplo peso, altura, salário, idade.**

Técnicas para estudar e apresentar descritivamente um conjunto de dados:

- **Distribuições de Frequências**
- **Gráficos**
- **Medidas-Resumo**

Medidas de Posição

Medidas de posição para <u>um conjunto de dados</u>

- **A *moda*** é definida como a realização mais frequente do conjunto de valores observados.

Tabela 2.5 Frequências e porcentagens dos empregados da seção de orçamentos da Companhia MB, segundo o número de filhos.

Nº de filhos z_i	Frequência n_i	Porcentagem $100 f_i$
0	4	20
1	5	25
2	7	35
3	3	15
5	1	5
Total	20	100

Fonte: Tabela 2.1.

Moda =2

- **A mediana é a realização que ocupa a posição central da série de observações, quando estão ordenadas em ordem crescente.**

Exemplo:

i) 3, 4, 7, 8 e 8, a mediana = 7;

ii) 3, 4, 7, 8, 8 e 9, a mediana = (7+8)/2 = 7,5.

- **A média aritmética, é a soma das observações dividida pelo número delas. Assim, a média aritmética de 3, 4, 7, 8 e 8 é**

  (3 + 4 + 7 + 8 + 8)/5 = 6.

Exemplo 3.1 Usando os dados da Tabela 2.5, já encontramos que a moda da variável *Z* é 2. Para a mediana, constatamos que esta também é 2, média aritmética entre a décima e a décima primeira observações.

Tabela 2.5 Frequências e porcentagens dos empregados da seção de orçamentos da Companhia MB, segundo o número de filhos.

Nº de filhos z_i	Frequência n_i	Porcentagem $100 f_i$
0	4	20
1	5	25
2	7	35
3	3	15
5	1	5
Total	20	100

Fonte: Tabela 2.1.

A média aritmética será

$$\frac{4\times 0+5\times 1+7\times 2+3\times 3+5\times 1}{20}=\frac{33}{20}=1{,}65.$$

Vamos formalizar os conceitos introduzidos acima. Se $x_1, ..., x_n$ são os n valores (distintos ou não) da variável X, a média aritmética, ou simplesmente média, de X pode ser escrita

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3.1}$$

Agora, se tivermos n observações da variável X, das quais n_1 são iguais a x_1, n_2 são iguais a x_2 etc., n_k iguais a x_k, então a média de X pode ser escrita

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i. \tag{3.2}$$

Se $f_i = n_i/n$ representar a frequência relativa da observação x_i, então (3.2) também pode ser escrita

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i. \tag{3.3}$$

Consideremos, agora, as observações ordenadas em ordem crescente. Vamos denotar a menor observação por $x_{(1)}$, a segunda por $x_{(2)}$, e assim por diante, obtendo-se

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n-1)} \le x_{(n)}. \tag{3.4}$$

Por exemplo, se $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 6$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, então $-2 \le 1 \le 3 \le 3 \le 6$, de modo que $x_{(1)} = -2$, $x_{(2)} = 1$, $x_{(3)} = 3$, $x_{(4)} = 3$ e $x_{(5)} = 6$.

As observações ordenadas como em (3.4) são chamadas *estatísticas de ordem*.

Com essa notação, a mediana da variável X pode ser definida como

$$\mathrm{md}(X) = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ ímpar;} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ par.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Exemplo:

Tabela 2.6 Distribuição de frequências da variável S, salário dos empregados da seção de orçamentos da Companhia MB.

Classes de salários	Ponto médio s_i	Frequência n_i	Porcentagem $100 f_i$
4,00 ⊢ 8,00	6,00	10	27,78
8,00 ⊢ 12,00	10,00	12	33,33
12,00 ⊢ 16,00	14,00	8	22,22
16,00 ⊢ 20,00	18,00	5	13,89
20,00 ⊢ 24,00	22,00	1	2,78
Total	—	36	100,00

Fonte: Tabela 2.4.

A moda, mediana e média para os dados da Tabela 2.6 são, respectivamente,

$$\mathrm{mo}(S) \simeq 10{,}00,$$

$$\mathrm{md}(S) \simeq 10{,}00,$$

$$\bar{s} \simeq \frac{10 \times 6{,}00 + 12 \times 10{,}00 + 8 \times 14{,}00 + 5 \times 18{,}00 + 1 \times 22{,}00}{36} = 11{,}22.$$

Medidas de posição para variáveis aleatórias discretas

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Caracterização

Função de probabilidade: É a função que atribui a **cada valor x_i da v. a. discreta X** sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função de probabilidade deve satisfazer:

$$\boxed{0 \leq P(X=x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1}$$

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Valor Esperado ("média"): Dada a v.a. X, assumindo os valores x_1, x_2, ..., x_n, chamamos de ***valor médio,*** ou ***valor esperado,*** ou ***esperança matemática*** da distribuição **de X** o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X=x_1) + \ldots + x_n \times P(X=x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X=x_i)$$

Notação: $\mu = E(X)$

Exemplo

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes (A e B), e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade de seu empreendimento, o empresário quer ter uma ideia da distribuição do lucro por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como bom, longo ou curto, conforme sua medida esteja dentro da especificação, maior ou menor que a especificada, respectivamente. Além disso, foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente ($5,00) e as probabilidades de produção de cada componente com as características bom, longo e curto.

Tabela 6.1 Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

Produto		Fábrica A Cilindro	Fábrica B Esfera
Dentro das especificações	bom (B)	0,80	0,70
Maior que as especificações	longo (L)	0,10	0,20
Menor que as especificações	curto (C)	0,10	0,10

Fonte: Retirada das especificações técnicas das fábricas A e B.

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C (curto), ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de $5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de $5,00. Se o preço de venda de cada unidade for de $25,00, como seria a distribuição de frequências da variável *X:* lucro por conjunto montado?

Figura 6.1 Diagrama em árvore para o Exemplo

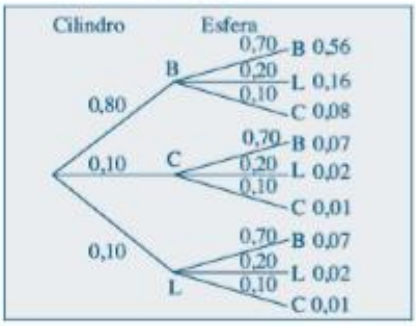


Tabela 6.2 Distribuição de probabilidade das possíveis composições das montagens.

Produto	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	–5
LB	0,07	10
LL	0,02	5
LC	0,01	–5
CB	0,07	–5
CL	0,02	–5
CC	0,01	–5

Fonte: Figura 5.1 e informações no texto.

$$
\begin{aligned}
&15, \text{ se ocorrer o evento } A_1 = \{BB\};\\
&10, \text{ se ocorrer o evento } A_2 = \{BL, LB\};\\
&5, \text{ se ocorrer o evento } A_3 = \{LL\};\\
&-5, \text{ se ocorrer o evento } A_4 = \{BC, LC, CB, CL, CC\}.
\end{aligned}
$$

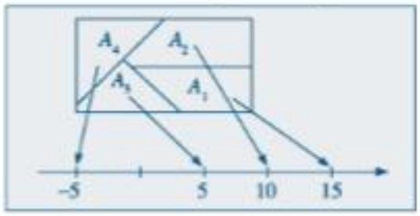
Cada um desses eventos tem uma probabilidade associada, ou seja,

$$P(A_1) = 0{,}56, \quad P(A_2) = 0{,}23,$$
$$P(A_3) = 0{,}02, \quad P(A_4) = 0{,}19,$$

Tabela 6.3 Distribuição da v.a. X.

x	$p(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
–5	0,19
Total	1,00

Figura 6.2 Função de probabilidade da v.a. X = lucro por montagem.



No exemplo qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir.

Tabela 6.3 Distribuição da v.a. X.

x	$p(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
–5	0,19
Total	1,00

lucro médio = $(0{,}56)(15) + (0{,}23)(10) + (0{,}02)(5) + (0{,}19)(-5) = 9{,}85.$

A mediana é o valor Md que satisfaz às seguintes condições:

$$P(X \geq Md) \geq ½ \text{ e } P(X \leq Md) \geq 1/2.$$

Em algumas situações, as desigualdades são satisfeitas por qualquer valor num certo intervalo e, nesse caso, tomamos a mediana como o ponto médio do intervalo.

A moda é o valor (ou valores) da variável que tem maior probabilidade de ocorrência:

$$P(X = Mo) = Max(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

em que $p_1 = P(X = x_1), \ldots, p_n = P(X = x_n)$.

No exemplo:
Mo = 15 (maior probabilidade = 0,56)
Mediana = 15

Tabela 4.1: Medidas de tendência central.

	Conjunto de Dados	Variável aleatória
Valores	$\begin{array}{c\|cccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \hline \text{freq.} & n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{array}$	$\begin{array}{c\|cccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{array}$
Média	$\overline{x}_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$	$\mu = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$
Mediana	md_{obs} = valor central	Md: $P(X \geq Md) \geq 0{,}5$ e $P(X \leq Md) \geq 0{,}5$
Moda	mo_{obs} = valor c/ maior freq.	Mo = valor c/maior probab.

Medidas de Dispersão: um valor que resuma a variabilidade de um conjunto de dados.

Por exemplo, suponhamos que cinco grupos de alunos submeteram-se a um teste, no qual obtiveram as seguintes notas:

Grupo A (variável X):	3, 4, 5, 6, 7.
Grupo B (variável Y):	1, 3, 5, 7, 9.
Grupo C (variável Z):	5, 5, 5, 5, 5.
Grupo D (variável W):	3, 5, 5, 7.
Grupo E (variável V):	3, 5, 5, 6, 6.

$$\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = \overline{w} = \overline{v} = 5{,}0$$

Duas medidas são as mais usadas: **desvio médio e variância.**

O princípio básico é analisar os desvios das observações em relação à média dessas observações.

Para o grupo A teríamos, respectivamente,

$$\sum_{i=1}^{5} |x_i - \overline{x}| = 2 + 1 + 0 + 1 + 2 = 6,$$

$$\sum_{i=1}^{5} (x_i - \overline{x})^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10.$$

O uso desses totais pode causar dificuldades quando comparamos conjuntos de dados com números diferentes de observações, como os conjuntos A e D acima. Desse modo, é mais conveniente exprimir as medidas como médias, isto é, o desvio médio e a variância são definidos por

$$\mathrm{dm}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}, \tag{3.7}$$

respectivamente. Para o grupo A temos

$$\mathrm{dm}(X) = 6/5 = 1,2,$$
$$\mathrm{var}(X) = 10/5 = 2,0,$$

enquanto para o grupo D temos

$$\mathrm{dm}(W) = 4/4 = 1,0,$$
$$\mathrm{var}(W) = 8/4 = 2,0.$$

Sendo a variância uma medida de dimensão igual ao quadrado da dimensão dos dados (por exemplo, se os dados são expressos em cm, a variância será expressa em cm^2), pode causar problemas de interpretação. Costuma-se usar, então, o desvio padrão, que é definido como a raiz quadrada positiva da variância.

Ambas as medidas de dispersão (dm e dp) indicam, em média, qual será o "erro"(desvio) cometido ao tentar substituir cada observação pela medida resumo do conjunto de dados (no caso, a média).

Exemplo 3.3 Calcular as medidas de dispersão acima para a variável Z = número de filhos, resumida na Tabela 2.5.

Tabela 2.5 Frequências e porcentagens dos empregados da seção de orçamentos da Companhia MB, segundo o número de filhos.

Nº de filhos z_i	Frequência n_i	Porcentagem 100 f_i
0	4	20
1	5	25
2	7	35
3	3	15
5	1	5
Total	20	100

Fonte: Tabela 2.1.

A média aritmética será

$$\frac{4\times 0+5\times 1+7\times 2+3\times 3+5\times 1}{20}=\frac{33}{20}=1,65.$$

Os desvios são $z_i-\bar{z}$: –1,65; –0,65; 0,35; 1,35; 3,35. Segue-se que

$$\mathrm{dm}(Z)=\frac{4\times(1,65)+5\times(0,65)+7\times(0,35)+3\times(1,35)+1\times(3,35)}{20}=0,98.$$

Também,

$$\mathrm{var}(Z)=\frac{4(-1,65)^2+5(-0,65)^2+7(0,35)^2+3(1,35)^2+1(3,35)^2}{20}=1,528.$$

Consequentemente, o desvio padrão de Z é

$$\mathrm{dp}(Z)=\sqrt{1,528}=1,24.$$

Suponha que observemos n_1 vezes os valores x_1 etc., n_k vezes o valor x_k da variável X. Então,

$$\mathrm{dm}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \bar{x}|}{n} = \sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|, \tag{3.8}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{dp}(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}. \tag{3.10}$$

Exemplo 3.4 Consideremos a variável S = salário.

Tabela 2.6 Distribuição de frequências da variável S, salário dos empregados da seção de orçamentos da Companhia MB.

Classes de salários	Ponto médio s_i	Frequência n_i	Porcentagem $100 f_i$
4,00 ⊢ 8,00	6,00	10	27,78
8,00 ⊢ 12,00	10,00	12	33,33
12,00 ⊢ 16,00	14,00	8	22,22
16,00 ⊢ 20,00	18,00	5	13,89
20,00 ⊢ 24,00	22,00	1	2,78
Total	—	36	100,00

Fonte: Tabela 2.4.

$$\bar{s} \simeq \frac{10 \times 6,00 + 12 \times 10,00 + 8 \times 14,00 + 5 \times 18,00 + 1 \times 22,00}{36} = 11,22.$$

$$\mathrm{var}(S) \simeq \Big[10(6,00 - 11,22)^2 + 12(10,00 - 11,22)^2 + 8(14 - 11,22)^2$$
$$+5(18,00 - 11,22)^2 + 1(22,00 - 11,22)^2\Big]/36 = 19,40$$

e, portanto,

$$\mathrm{dp}(S) \simeq \sqrt{19,40} = 4,40.$$

É fácil ver que $\mathrm{dm}(S) \simeq 3,72$.

Uma maneira computacionalmente mais eficiente de calcular a variância é

$$\operatorname{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2, \qquad (3.11)$$

e, no caso de observações repetidas,

$$\operatorname{var}(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{x}^2. \qquad (3.12)$$

Variância de uma variável aleatória discreta

Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X)$.

Da relação acima, segue a fórmula alternativa

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\operatorname{DP}(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = \operatorname{DP}(X)$.

Exemplo: **Uma pequena cirurgia dentária pode ser realizada por três métodos diferentes cujos tempos de recuperação (em dias) são modelados pelas variáveis X1, X2 e X3. Admita que suas funções de probabilidade são dadas por:**

X1	0	4	5	6	10
Pi	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

X2	1	5	9
Pi	1/3	1/3	1/3

X3	4	5	6
Pi	0,3	0,4	0,3

	X1	X2	X3
valor esperado	5	5	5
mediana	5	5	5
moda	5	5	5

Var(X1)= $(0-5)^2$x0,2 +$(4-5)^2$x0,2+...+ $(10-5)^2$x0,2 = 10,40

Var(X2) = 10,67 e Var(X3) = 0,60

Formula alternativa:

E($X1^2$) = 0x0,2 + 16x0,2 + ... + 100x 0,2 = 35,40

Var(X1) = 35,40 – 5^2 = 10,40

Tabela 4.2: Medidas de dispersão.

	Conjunto de Dados	Variável aleatória
Valores	$\begin{array}{c\|cccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \hline \text{freq.} & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}$	$\begin{array}{c\|cccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{array}$
Variância	$var_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x}_{obs})^2$	$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i - \mu)^2$
Variância (alternativa)	$var_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{x}_{obs}^2$	$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - \mu^2$

Tabela 4.3: Propriedades da média e da variância.

Conjunto de Dados	Variável aleatória
$Y = aX + b$	$Y = aX + b$
$\overline{y}_{obs} = a\,\overline{x}_{obs} + b$	$E(Y) = a\,E(X) + b$
$var_{obs}(Y) = a^2\, var_{obs}(X)$	$Var(Y) = a^2\, Var(X)$

Modelo	$P(X = x)$	Parâmetros	$E(X)$, Var(X)
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0, 1$	p	$p,\ p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x},\ x = 0, \dots, n$	n, p	$np,\ np(1-p)$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, \dots$	λ	λ, λ
Geométrica	$p(1-p)^{x-1},\ x = 1, 2, \dots$	p	$\frac{1}{p}, \frac{(1-p)}{p^2}$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{n}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ a \le x \le b^{(1)}$	N, r, n	$\frac{nr}{N},\ n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

[(1)] $a = \max(0, n - N + r)$, $b = \min(r, n)$.