MAE116 – Noções de Estatística

Farmácia - II semestre de 2017

Lista de Exercícios 11 - Teste de Hipóses II – C A S A (gabarito)

Exercício 1.
(25 pontos). Sabe-se que, historicamente, 18% dos estudantes ingressantes em certa universidade cursaram o ensino médio em escola pública. Com o objetivo de verificar se essa porcentagem se alterou, foi coletada uma amostra aleatória de 400 calouros (ingressantes em 2016). Seja p a proporção de estudantes, ingressantes nessa universidade em 2016, que cursaram o ensino médio em escola pública.

(a) (5 pontos). Defina as hipóteses estatísticas adequadas ao problema. Lembre-se que as hipóteses são estabelecidas antes de os dados serem coletados.
Resposta:
O parâmetro de interesse é a proporção (p) de estudantes da universidade que cursaram o ensino médio em escola pública **em 2016**.

Como o objetivo é verificar se, em 2016, houve alteração na porcentagem de estudantes oriundos de escola pública que ingressaram na universidade, note que esta alteração pode ser maior ou menor que 18%, logo temos como hipóteses estatísticas

$H_0 : p = 0,18$ *(a proporção de ingressantes, em 2016, que cursaram ensino médio em escola pública é igual à proporção histórica)*
$H_1 : p \neq 0,18$ *(a proporção de ingressantes, em 2016, que cursaram ensino médio em escola pública é diferente da proporção histórica)*

□

(b) (10 pontos). Suponha que entre os 400 estudantes, observou-se que 54 cursaram o ensino médio em escola pública. Calcule o nível descritivo do teste e conclua adotando $\alpha = 5\%$.
Resposta:
Observamos 54 de 400 estudantes $\Rightarrow \hat{p}_{obs} = \dfrac{54}{400} = 0,135$ *(proporção amostral).*

Note que $\hat{p}_{obs} < p_0 = 0,18$ *e a hipótese alternativa é bilateral. Então, o nível descritivo, P, é calculado por:*

$$\begin{aligned}
P &= 2 \times P(\hat{p} \leqslant \hat{p}_{obs} \mid H_0 \text{ verd.}) = 2 \times P(\hat{p} \leqslant 0,135 \mid p = 0,18) \\
&= 2 \times P\left(Z \leqslant \frac{\hat{p}_{obs} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 2 \times P\left(Z \leqslant \frac{0,135 - 0,18}{\sqrt{\frac{0,18(1-0,18)}{400}}}\right) \\
&= 2 \times P\left(Z \leqslant \frac{-0,045}{0,0192}\right) = 2 \times P(Z \leqslant -2,34) = 2 \times P(Z \geqslant 2,34) \\
&= 2 \times [1 - A(2,34)] = 2 \times [1 - 0,9904] = 2 \times 0,0096 = 0,0192.
\end{aligned}$$

Como $P < \alpha$, então rejeitamos a hipótese nula H_0, logo concluímos que há evidência suficiente para se afirmar que houve uma mudança na proporção de alunos ingressantes oriundos do ensino público, ao nível de significância de 5%. □

(c) (10 pontos). Construa um intervalo de confiança para a proporção de alunos ingressantes em 2016 que cursaram o ensino médio em escola pública. Use coeficiente de confiança de 95%.
Resposta:

Para um coeficiente de confiança $\gamma = 0,95$, temos que $z = 1,96$ e $\hat{p}_{obs} = 0,135$, o intervalo de confiança (IC) é dado por:

$$IC(p;\gamma) = \left[\hat{p}_{obs} - z \times \sqrt{\frac{\hat{p}_{obs}(1-\hat{p}_{obs})}{n}}; \hat{p}_{obs} + z \times \sqrt{\frac{\hat{p}_{obs}(1-\hat{p}_{obs})}{n}}\right]$$

$$IC(p;0,95) = \left[0,135 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,135(1-0,135)}{400}}; 0,135 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,135(1-0,135)}{400}}\right]$$

$$= [0,135 - 0,0335; 0,135 + 0,0335] = [0,1015; 0,1685]$$

Temos então que a estimativa intervalar para p é $[0,1015; 0,1685]$ com 95% de confiança. □

Exercício 2.
(25 pontos). Os registros do serviço de saúde de uma cidade indicam que a proporção de mães que amamentam após o terceiro mês de idade da criança é de 60%. Para aumentar esta proporção, vem sendo realizado um programa educativo entre as gestantes. Para averiguar a eficácia do programa, acompanhou-se mães submetidas ao programa.

(a) (5 pontos). Formule o problema como um problema de testes de hipóteses. Especifique o parâmetro de interesse.
Resposta:
O parâmetro de interesse é a proporção (p) de mães que amamentam após o terceiro mês de idade da criança, dentre as que **participam do programa educativo**.

O objetivo é verificar a eficácia do programa. Então, como hipóteses temos:

$H_0 : p = 0,60$ *(o programa educativo não se mostrou eficaz)*
$H_1 : p > 0,60$ *(o programa educativo foi eficaz)*

□

(b) (8 pontos). De 120 mães escolhidas ao acaso entre as submetidas ao programa, verificou-se que 81 ainda estavam amamentando após três meses do parto. Forneça uma estimativa do parâmetro de interesse. Calcule o nível descritivo do teste e conclua para um nível de significância de 4%.
Resposta:
A amostra fornece n=120 e $\hat{p}_{obs} = \frac{81}{120} = 0,675$, em que $\hat{p}_{obs}$ corresponde a uma estimativa pontual para p, e seja α=0,04.

O nível descritivo é calculado por

$$\begin{aligned} P &= P(\hat{p} \geq \hat{p}_{obs} \mid H_0 \text{ verd.}) = P(\hat{p} \geq 0,675 \mid p = 0,6) = P\left(Z \geq \frac{\hat{p}_{obs} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{0,675 - 0,6}{\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{120}}}\right) = P\left(Z \geq \frac{0,075}{0,04472}\right) = P(Z \geq 1,677) \\ &= 1 - A(1,677) = 1 - 0,9535 = 0,0465. \end{aligned}$$

Como o nível descritivo $P = 0,0465 > \alpha = 0,04$, então não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidências suficiente para afirmar que o programa educativo se mostrou eficaz.

□

(c) (12 pontos = 7 pontos pelo teste e 5 pontos pelos comentários).

Considere agora que se tomou uma amostra de 200 mães submetidas ao programa, e 135 delas amamentaram após três meses do parto. Refaça o item (b) para essa nova amostra. Compare os resultados das 2 amostras e comente.

Resposta:

Agora temos que, n=200, e $\hat{p}_{obs} = \frac{135}{200} = 0,675$. O nível descritivo é calculado por

$$\begin{aligned} P &= P(\hat{p} \geq \hat{p}_{obs} \mid H_0 \text{ verd.}) = P(\hat{p} \geq 0,675 \mid p = 0,6) = P\left(Z \geq \frac{\hat{p}_{obs} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{0,675 - 0,6}{\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{200}}}\right) = P\left(Z \geq \frac{0,075}{0,0346}\right) = P(Z \geq 2,165) \\ &= 1 - A(2,165) = 1 - 0,985 = 0,015. \end{aligned}$$

Como o nível descritivo $P = 0,015 < \alpha = 0,04$, então rejeitamos H_0, ou seja, há evidências suficiente para afirmar que o programa educativo se mostrou eficaz.

Comentários *Tanto no item (b) como no item (c), a proporção amostral, $\hat{p}_{obs}$, é igual a 0,675. Entretanto, no item (b) a hipótese nula não foi rejeitada e no item (c) ela foi rejeitada. A diferença na decisão é devido ao tamanho da amostra, que é maior no item (c). Um tamanho de amostra maior torna o teste mais sensível. Note que a conclusão no item (b) foi que* **não houveram evidências suficiente** *para concluir que o programa educativo foi eficaz; enquanto que no item (c), as evidências foram suficientes (pois a amostra é maior) para concluir que o programa educativo foi eficaz.* □

Exercício 3.

(20 pontos). Em uma fábrica, o tempo que um produto leva para ser montado tem distribuição normal com média igual a 30 min. O departamento de produção fez uma série de modificações para aprimorar

o processo de produção e a qualidade dos produtos, mas não sabe como essas modificações irão afetar o tempo médio de montagem.

(a) (5 pontos). Estabeleça as hipóteses estatísticas adequadas para o problema. Especifique o parâmetro a ser testado. Lembre-se que as hipóteses devem ser estabelecidas antes de os dados serem coletados.

<u>*Resposta:*</u>

Considere a variável X: o tempo que um produto leva para ser montado **após as modificações**. *Temos que $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Como o objetivo é verificar se as modificações afetam o tempo médio de montagem, então o parâmetro de interesse é $\boldsymbol{\mu}$: tempo médio de montagem* **após as modificações.**

As modificações têm como objetivo aprimorar o processo, mas não se sabe como tais modificações irão afetar o tempo médio de montagem, podendo aumentar ou diminuir o tempo médio. Portanto as hipóteses são:

$H_0 : \mu = 30$ *(as modificações não afetaram o tempo médio de montagem)*
$H_1 : \mu \neq 30$ *(as modificações afetaram o tempo médio de montagem)*

□

(b) (15 pontos). Foram anotados os tempos de montagem de 25 produtos sob o novo processo de produção, e obteve-se um tempo médio de montagem igual a 31,9 min. e variância igual a 31,7 min^2. Calcule o nível descritivo do teste e conclua ao nível de significância de 5%?

<u>*Resposta:*</u>

Note que, já sabemos que os tempos de montagem segue uma distribuição normal, mas tanto μ como σ^2 são desconhecidos, então usaremos a padronização

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{(n-1)} \,, \quad \text{neste caso com 24 graus de liberdade.}$$

Pela amostra temos que $\overline{x}_{obs} = 31,9$ min e $s^2 = 31,7$ min^2. Além disso, note que $\overline{x}_{obs} > \mu_0 = 30$, e o teste é bilateral, o que nos leva ao cálculo do nível descritivo, P, através de

$$\begin{aligned} P &= 2 \times P(\overline{X} \geq \overline{x}_{obs} \mid H_0 \text{ verd.}) = 2 \times P(\overline{X} \geq 31,9 \mid \mu = 30) = P\left(T \geq \frac{31,9 - 30}{\sqrt{\frac{31,7}{25}}}\right) \\ &= 2 \times P\left(T \geq \frac{1,9}{1,126}\right) = 2 \times P(T \geq 1,687) \approx 2 \times (1 - 0,94) = 0,12 \end{aligned}$$

(pela tabela t com 24 graus de liberdade, $t = 1,687$ está com $P(T \leq 1,687)$ entre 0,90 e 0,95; por isso consideramos 0,94).

Como o nível descritivo $P = 0,12 > \alpha = 0,05$, então não rejeitamos H_0. Portanto, não há evidências suficiente para afirmar que as modificações no processo de produção alteram o tempo médio de montagem. □

Exercício 4.
(30 pontos). O crescimento de bebês durante os 6 primeiros meses de vida pode ser modelado por uma distribuição Normal. O crescimento médio no período para bebês saudáveis é de 15 cm. Deseja-se verificar se o crescimento no 1º semestre de bebês com problemas de alergia diversos não segue o padrão esperado. Para tanto, 10 bebês alérgicos foram sorteados, e após 6 meses forneceram as seguintes medidas de crescimento em centímetros:

14,5 12,7 14,9 13,8 15,1 12,2 15,1 14,7 15,2 e 13,8.

(a) (5 pontos). Formule o problema como um problema de testes de hipóteses. Especifique o parâmetro a ser testado.

Resposta:

O parâmetro de interesse é μ = crescimento médio de bebês **alérgicos** *durante o primeiro semestre de vida.*

Note que queremos verificar se o crescimento de bebês segue, ou não, o padrão esperado. Logo, pode-se ter crescimentos que diferem de 15 cm, o que nos leva as seguintes hipóteses:

$H_0 : \mu = 15$ *(bebês alérgicos têm crescimento médio no 1º semestre igual ao padrão)*
$H_1 : \mu \neq 15$ *(bebês alérgicos têm crescimento médio no 1º semestre diferente do esperado)*

Observação*: pode-se interpretar que problemas de saúde como, por exemplo alergia, podem interferir negativamente no crescimento dos bebês. Logo pode-se testar se bebês alérgicos têm um crescimento médio inferior ao padrão. Nesse caso a hipótese alternativa seria unilateral, e teríamos*

$H_0 : \mu = 15$
$H_1 : \mu < 15$ *(bebês alérgicos têm crescimento médio menor que o esperado)*

Monitores*: Assim sendo, tanto a hipótese alternativa bilateral, como a unilateral à esquerda são corretas. A correção dos outros itens deve seguir de acordo com a hipótese alternativa especificada pelo (a) aluno(a).* □

(b) (5 pontos). Descreva os erros Tipo I e Tipo II para essa situação.

Resposta:

*Erro Tipo I: Rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira, isto é, concluir que a média do crescimento durante o primeiro semestre de vida de bebês alérgicos é diferente de 15 cm (***ou menor que 15***), quando na verdade é igual ao padrão esperado.*

*Erro Tipo II: Não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa, isto é, concluir que a média do crescimento durante o primeiro semestre de vida de bebês alérgicos segue o padrão esperado, quando na verdade é diferente de (***ou menor que***) 15 cm.* □

(c) (10 pontos). Calcule o nível descritivo do teste e conclua para um nível de significância de 5%.

Resposta:

Seja X o crescimento de bebês alérgicos durante o primeiro semestre de vida. Sabemos que X

segue uma distribuição normal, mas não conhecemos a variância populacional (σ^2), então usaremos a padronização

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{(n-1)}\,, \qquad \text{com 9 graus de liberdade.}$$

A amostra fornece $\overline{x}_{obs} = 14,2cm$ e $s^2 = 1,1133cm^2$. Note que $\overline{x}_{obs} < \mu_0 = 15$. Então o nível descritivo, P, para o **teste bilateral** *é calculado por*

$$\begin{aligned} P &= 2 \times P(\overline{X} \leq 14,2 \mid \mu = 15) = 2 \times P\left(T < \frac{14,2 - 15}{\sqrt{\frac{1,1133}{10}}}\right) = 2 \times P\left(T < \frac{-0,8}{0,3337}\right) \\ &= 2 \times P(T < -2,397) = 2 \times (1 - 0,98) = 2 \times 0,02 = 0,04 \end{aligned}$$

(pela tabela t-Student com 9 g.l. e teste bilateral).

Para o teste unilateral *($H_1 : \mu < 15cm$), o nível descritivo é $P = 0,02$.*

Note que, $P < \alpha$, logo a amostra fornece evidências para rejeitar H_0, ou seja, o crescimento médio durante o primeiro semestre de vida de bebês alérgicos não acompanham o padrão esperado de crescimento, tanto no teste bilateral como no teste unilateral. □

(d) (10 pontos). Construa um intervalo de confiança para o crescimento médio, durante o primeiro semestre de vida de bebês alérgicos, com coeficiente de confiança de 90%.
Resposta:

Sabemos que $\overline{x}_{obs} = 14,2$ cm e $s = 1,0551$ cm. Com $\gamma = 0,90$ e $n - 1 = 9$ temos que t_γ é tal que $A(t_\gamma) = 0,95$. Logo, $t_9 = 1,833$. Então, o IC para μ com $\gamma = 0,90$ é dado por

$$\begin{aligned} IC(\mu, 90\%) &= \left[\overline{x}_{obs} \pm t_{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] \\ IC(\mu, 90\%) &= \left[14,2 \pm 1,833 \frac{1,0551}{\sqrt{10}}\right] \\ &= [14,2 - 0,6116; 14,2 + 1,6116] \\ &= [13,5884; 14,8116] cm. \end{aligned}$$

Temos então que a estimativa intervalar para μ é $[13,59; 14,81]$ cm com 90% de confiança. □