MAE116 – Noções de Estatística

Farmácia - II semestre de 2017

Lista de Exercícios 10 - Teste de Hipóses I – C A S A (gabarito)

Exercício 1.

(40 pontos) Uma agência de turismo acredita que por causa da crise econômica e da desvalorização do real, os turistas estão gastando menos com estadia em viagens feitas ao exterior. Sabe-se de registros anteriores que a proporção de turistas que gastavam mais de 100 dólares por diária de hotel era 30% em 2010. Para verificar se essa porcentagem diminuiu, a agência decidiu realizar uma pesquisa com 200 turistas e concluir que essa proporção diminuiu se encontrar 47 turistas ou menos que tenham despendido mais do que os 100 dólares.

(a) (5 pontos). Defina as hipóteses estatísticas adequadas ao problema.

Resposta:

Seja p a proporção de turistas que gastam mais de 100 dólares por dia após a crise econômica. Definimos as Hipóteses Estatísticas:

$$H_0 : p = 0,3$$

$$H_1 : p < 0,3$$

□

(b) (5 pontos). Quais são os significados dos erros tipo I e tipo II para o problema?

Resposta:

Erro do tipo I: rejeitar H_0 quando esta é verdadeira, ou seja, dizer que a proporção de turistas que gastam 100 dólares por diária de hotel é menor que 0,30 quando na verdade é.
Erro do tipo II: não rejeitar H_0 quando esta é falsa, ou seja, dizer que a proporção de turistas que gastam 100 dólares por diária de hotel é 0,30 quando na verdade não é. □

(c) (10 pontos). Qual é a região crítica escolhida pela agência?

Resposta:

A agência decidiu que se dentre 200 turistas encontrar 47 turistas ou menos que tenham despendido mais do que os 100 dólares então concluirá que a proporção em questão diminui, ou seja se $\hat{p}_{obs}$ for menor ou igual que $\frac{47}{200} = 0,235$ a hipótese nula será rejeitada. Logo a região crítica é dada por

$$RC = \{\hat{p} : \hat{p} \leq 0,235\}$$

.

□

(d) (10 pontos). Qual é o nível de significância correspondente à região crítica escolhida?

Resposta:

Sob H_0 temos que

$\hat{p} \sim N\left(0,3; \frac{0,3\times 0,7}{200}\right)$ *aprox.* $\Rightarrow Z = \frac{p-0,3}{\sqrt{\frac{0,3\times 0,7}{200}}} \sim N(0,1)$ *aprox.*

Então

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\hat{p} \leq 0,235|p = 0,3) \\
&= P\left(Z \leq \frac{0,235 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3\times 0,7}{200}}}\right) \\
&= P(Z \leq -2,01) \\
&= 1 - A(2,01) \\
&= 0,0222
\end{aligned}$$

□

(e) (10 pontos). Qual será a decisão da agência se forem observados 40 turistas que tenham gasto mais do que o valor fixado?

Resposta:

Se forem observados 40 turistas que tenham gasto mais do que o valor fixado então $\hat{p}_{obs} = \frac{40}{200} = 0,2$. Temos então que $\hat{p}_{obs} \in RC$, logo rejeita-se a hipótese nula e conclui-se, ao nível de significância 2,22%, que a proporção de turistas que gastam 100 dólares por diária de hotel é menor que 0,30. □

Exercício 2.

(15 pontos) Vazamentos de tanques de gasolina subterrâneos em postos de gasolina podem prejudicar o meio ambiente. Em levantamento feito há dois anos, constatou-se que 25% desses tanques apresentavam vazamento. Após um programa de conscientização de donos de postos, a Secretaria de Meio Ambiente selecionou uma amostra de 80 postos e constatou que 12 apresentavam vazamento.

(a) (5 pontos).Formule esse problema como um problema de teste de hipóteses.

Resposta:

Seja p a proporção de tanques subterrâneos que apresentam vazamento após o programa

de conscientização. Hipóteses do problema
Hipótese nula: 25% dos tanques de gasolina subterrâneos em postos de gasolina apresentam vazamento.
Hipótese alternativa: menos de 25% dos tanques de gasolina subterrâneos em postos de gasolina apresentam vazamento.
Hipóteses estatísticas
$H_0 : p = 0,25$
$H_1 : p < 0,25$ □

(b) (10 pontos) Ao nível de significância de 6%, pode-se concluir que a porcentagem de postos com vazamento diminuiu após o programa?

Resposta:
Vamos determinar a região crítica do teste para este nível de significância fixado.
Sob H_0 temos que
$\hat{p} \sim N\left(0,25; \frac{0,25\times0,75}{80}\right)$ *aprox.* $\Rightarrow Z = \frac{p-0,25}{\sqrt{\frac{0,25\times0,75}{80}}} \sim N(0,1)$ *aprox.*
Logo

$$\begin{aligned} 0,06 &= P(\hat{p} \leq a | p = 0,25) \\ &= P\left(Z \leq \frac{a-0,25}{\sqrt{\frac{0,25\times0,75}{80}}}\right) \end{aligned}$$

Assim, para $A(z) = 0.94$ temos $z = 1,55$, ou seja,

$$-1,55 = \frac{a-0,25}{\sqrt{\frac{0,25\times0,75}{80}}} \Rightarrow a = -1,55 \times \sqrt{\frac{0,25\times0,75}{80}} + 0,25 = 0,175$$

E portanto

$RC = \{\hat{p} : \hat{p} \leq 0,175\}.$

Dentre os 80 tanques selecionados, observou-se que 12 apresentavam vazamento. Logo $\hat{p}_{obs} = 12/80 = 0,15$.
Temos que $\hat{p}_{obs} \in RC$, logo rejeitamos H_0 e concluimos, ao nível de 6%, que após o programa

de conscientização de donos de postos houve uma diminuição na proporção de tanques com vazamento.

□

Exercício 3.
(30 pontos)Sabe-se que em certa região do litoral, 20% dos peixes apresentam câncer de fígado causado pela poluição. O Ministério da Pesca e Aquicultura está preocupado de que essa proporção tenha aumentado após um vazamento de óleo próximo a essa região e resolve realizar um teste com base em uma mostra de 100 peixes.

(a) (10 pontos) Formule este problema como um problema de teste de hipóteses.
Resposta:
Seja p a proporção de peixes com câncer de fígado após o vazamento de óleo. Definimos as seguintes hipóteses:
Hipótese nula: 20% dos peixes apresentam câncer de fígado causado pela poluição.
Hipótese alternativa: mais de 20% dos peixes apresentam câncer de fígado causado pela poluição.
Hipóteses estatisticas
$H_0 : p = 0,2$
$H_1 : p > 0,2$ □

(b) (10 pontos) Interprete os erros de tipo I e de tipo II.
Resposta:
Erro do tipo I: rejeitar H_0 quando esta é verdadeira, ou seja, dizer que a proporção de peixes apresentam câncer de fígado causado pela poluição é maior do que 0,20 quando na verdade é.
Erro do tipo II: não rejeitar H_0 quando esta é falsa, ou seja, dizer que a proporção de peixes apresentam câncer de fígado causado pela poluição é 0,20 quando na verdade não é. □

(c) (10 pontos) Construa a região crítica correspondente ao nível de significância de 4%. Se 25 dos 100 peixes testados apresentam câncer de fígado, qual seria a conclusão?
Resposta:
Vamos determinar a região crítica do teste para este nível de significância fixado.

Sob H_0 temos que
$\hat{p} \sim N\left(0,2; \frac{0,2\times0,8}{100}\right)$ *aprox.* $\Rightarrow Z = \frac{p-0,2}{\sqrt{\frac{0,2\times0,8}{100}}} \sim N(0,1)$ *aprox.*
Logo

$$\begin{aligned} 0,04 &= P(\hat{p} \geq a | p = 0,2) \\ &= P\left(Z \geq \frac{a-0,2}{\sqrt{\frac{0,2\times0,8}{100}}}\right) \end{aligned}$$

Assim, para $A(z) = 0,96$ temos $z = 1,75$, ou seja,

$$1,75 = \frac{a-0,2}{\sqrt{\frac{0,2\times0,8}{100}}} \Rightarrow a = 1,75 \times \sqrt{\frac{0,2\times0,8}{100}} + 0,2 = 0,27$$

E portanto

$RC = \{\hat{p} : \hat{p} \geq 0,27\}$.

Dentre os 100 peixes selecionados, observou-se que 25 apresentavam câncer de fígado. Logo $\hat{p}_{obs} = 25/100 = 0,25$.
Temos que $\hat{p}_{obs} \notin RC$, logo não rejeitamos H_0 e concluimos, ao nível de 4%, que a proporção de peixes com câncer de fígado não aumentou após o vazamento de óleo.

$\square$

Exercício 4.
(15 pontos) Foi feita uma pesquisa em 2014 em certo estado e constatou-se que em 80% das escolas os professores usavam a internet para as atividades de ensino. A Secretaria Estadual de Educação gostaria de verificar se essa proporção continua a mesma e para isso realizou uma pesquisa com 50 escolas, das quais 42 tinham professores que usam a internet para atividades de ensino.

(a) (5 pontos) Formule esse problema como um problema de teste de hipóteses.

<u>Resposta:</u>
Seja p a proporção de escolas em que os professores usam a internet para as atividades de ensino no momento atual. Formulamos as hipóteses:

Hipótese nula: em 80% das escolas de certo estado os professores usam a internet para as atividades de ensino.
Hipótese alternativa: a porcentagem de escolas de certo estado em que os professores usam a internet para as atividades de ensino difere de 80%.
Hipóteses estatisticas
$H_0 : p = 0,8$
$H_1 : p \neq 0,8$ □

(b) (10 pontos) Ao nível de significância de 5%, qual é a conclusão?
Resposta:
Vamos determinar a região crítica do teste para este nível de significância fixado.
Sob H_0 *temos que*
$\hat{p} \sim N\left(0,8; \frac{0,8\times 0,2}{100}\right)$ *aprox.* $\Rightarrow Z = \frac{p-0,8}{\sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{50}}} \sim N(0,1)$ *aprox.*
Observe que este é um teste bilateral, logo o nível de signicância deve ser dividido em dois
$0,025 = P(\hat{p} \leq a | p = 0,8)$ e $0,025 = P(\hat{p} \geq b | p = 0,8)$
$0,025 = P\left(Z \leq \frac{a-0,2}{\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{50}}}\right)$ e $0,025 = P\left(Z \geq \frac{b-0,2}{\sqrt{\frac{0,2\times 0,8}{50}}}\right)$

Assim, para $A(z) = 0.975$ *temos* $z = 1,96$*, ou seja,*

$$-1,96 = \frac{a-0,8}{\sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{50}}} \Rightarrow a = -1,96 \times \sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{50}} + 0,8 = 0,69$$

e

$$1,96 = \frac{b-0,8}{\sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{50}}} \Rightarrow b = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,8\times 0,2}{50}} + 0,8 = 0,91$$

E portanto a região de rejeição terá duas partes

$RC = \{\hat{p} : \hat{p} \leq 0,69$ *ou* $\hat{p} \geq 0,91\}$.

Dentre as 50 escolas selecionadas, observou-se que em 42 delas tinham professores que usam a internet para atividades de ensino. Logo $\hat{p}_{obs} = 42/50 = 0,84$.
Temos que $\hat{p}_{obs} \notin RC$*, logo não rejeitamos* H_0 *e concluimos, ao nível de 5%, que a proporção de escolas nas quais os professores utilizam internet não difere de 0,8.* □