

# Eliminação de Gauss com Pivotação

Antonio Elias Fabris

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo

Map 2210 – Aplicações de Álgebra Linear

# Eliminação de Gauss Simples pode ser incorreta e instável

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ & x_{kk} & x & x \\ & x & x & x \\ & x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ & x_{kk} & x & x \\ & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

multiplos  $\frac{x_{ik}}{x_{kk}}$  da linha  $k$  são subtraídos das linhas  $i = k+1, \dots, m$  para introduzir zeros

Mesmo para matrizes bem-condicionadas existem dois problemas:

- 1 Divisão por zero se  $x_{kk} = 0$
- 2 Trabalhando com aritmética de ponto flutuante e se algum multiplicador ( $x_{ik}/x_{kk}$ ) for grande, pode-se perder dígitos significativos:
  - ▶ em  $x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{kk}} x_{kj}$  pode-se perder dígitos de baixa ordem de  $x_{ij}$ , acarretando uma propagação de erros catastrófica

O **remédio** para os dois problemas acima é a **pivotação**

# Algumas Estratégias de Pivotação

- **Pivotamento Parcial:** no início do passo  $k$ , as linhas  $k$  e  $r$  são permutadas, onde

$$|x_{rk}| = \max_{k \leq i \leq m} |x_{ik}|$$

→ Pivotamento Parcial garante que  $|l_{ik}| \leq 1$ ,  $i = k+1 : m$

- **Pivotamento Completo:** no início do passo  $k$ , as linhas  $k$  e  $r$  e as colunas  $k$  e  $s$  são permutadas, onde

$$x_{rs} = \max_{k \leq i, j \leq m} |x_{ij}|$$

→ Note que PC necessita  $O(m^3)$  comparações e PP somente  $O(m^2)$

- ▶ em razão da sobrecarga de buscas e porque PP funciona bem, PC é usado somente em situações especiais

# Estratégias (cont): Pivotação da Torre

1	10	1	2	4	5
0	5	2	7	8	2
2	0	3	1	9	4
3	2	4	2	1	0
1	4	5	6	3	1
1	0	3	4	0	12

- A busca do pivô imita o movimento da Torre no xadrez
- no início do passo  $k$ , as linhas  $k$  e  $r$  e as colunas  $k$  e  $s$  são permutadas, onde

$$x_{rs} = \max_{k \leq i \leq m} |x_{is}| = \max_{k \leq j \leq m} |x_{rj}|$$

ou seja, um pivô é aquele de maior módulo em sua linha e em sua coluna

- O algoritmo de busca do pivô necessita pelo menos o dobro de comparações da PP, e se toda a submatriz tiver que ser testada o número de comparações é o mesmo da PC
- Para os que se interessarem, existe uma bibliografia interessante e relativamente recente sobre o assunto...
- Em geral, utiliza-se a PP como a estratégia de pivotação padrão

# Eliminação de Gauss com Pivotação Parcial

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ a_{31} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{bmatrix} a_{31} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \times & \times & \times & \times \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{bmatrix} a_{31} & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Escolha do Pivô                      Permutação de Linhas                      Eliminação

- Como em outros tópicos, o algoritmo pode ser expresso como um produto de matrizes
- $P_k$  é uma matriz de permutação e  $L_k$  é a matriz que anula os elementos da coluna  $k$  abaixo da diagonal
- Para uma matriz com as dimensões acima, após 3 passos  $A$  será transformada numa matriz triangular superior  $U$ :

$$L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$$

## Exemplo: Eliminação de Gauss com Pivotação Parcial

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ -\frac{1}{4} & & 1 & \\ -\frac{3}{4} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & 7 & 9 & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

- Resumindo:  $L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$  onde
  - $U$  é triangular superior
  - $L_k = I - l_k e_k^*$  (aula passada)
  - $P_k$  permuta a linha  $k$  e alguma linha  $r \geq k$  da matriz à direita

O que dizer a respeito de  $L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1$ ? É triangular inferior?



- Resumindo:  $L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$  onde
  - $U$  é triangular superior
  - $L_k = I - l_k e_k^*$  (aula passada)
  - $P_k$  permuta a linha  $k$  e alguma linha  $r \geq k$  da matriz à direita
- Temos que

$$\begin{aligned}
 U &= L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A \\
 &= L_3 \cdot \underbrace{P_3 L_2 P_3}_{L'_2} \cdot \underbrace{P_3 P_2 L_1 P_2 P_3}_{L'_1} \cdot \underbrace{P_3 P_2 P_1}_{L'_3} A \\
 &= L'_3 L'_2 L'_1 P A
 \end{aligned}$$

isto é,  $L'_k$  é igual a  $L_k$  com as entradas subdiagonais permutadas

- Chamando  $L = (L'_3 L'_2 L'_1)^{-1}$  e  $P = P_3 P_2 P_1$  temos que

$$PA = LU$$

onde  $L$  é triangular inferior com diagonal unitária e  $U$  é triangular superior

Calculando  $PA = LU$  para o exemplo

$$L'_1 = P_3 P_2 L_1 P_2 P_3 = P_3 P_2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{4} & 1 & \\ & -\frac{3}{4} & & 1 \end{bmatrix} P_2 P_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{3}{4} & 1 & & \\ -\frac{1}{2} & & 1 & \\ -\frac{1}{4} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L'_2 = P_3 L_2 P_3 = P_3 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & 1 & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{bmatrix} P_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \frac{2}{7} & & 1 & \\ \frac{3}{7} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L'_3 = L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = (L'_3 L'_2 L'_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$P_3 \qquad P_2 \qquad P_1 \qquad P$

$$\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} & \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & & \\ & \frac{2}{3} & & \end{bmatrix}$$

$P \qquad A \qquad L \qquad U$