1 Polinômios

Neste seção, apresentaremos os resultados básicos sobre interpolação polinomial e diferenças divididas que servirão de apoio às seções posteriores.

Polinômios são utilizados em problemas de aproximação porque possuem uma representação computacional que permite a implementação de algoritmos relativamente simples: podem ser calculados, diferenciados e integrados fácilmente, e num número finito de passos usando as operações aritméticas básicas de adição, subtração e multiplicação.

Um polinômio de ordem n (ou grau $n-1$) é uma função da forma

$$p(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} \tag{1}$$

Designaremos por

$$\mathbb{P}_n$$

o espaço dos polinômios de ordem n.

Teorema 1.1 *$\mathbb{P}_n$ é um subespaço linear de $C^\infty(\mathbb{R})$ de dimensão n. Dado qualquer número real ζ, as funções $1, x-\zeta, \cdots, (x-\zeta)^{n-1}$ constituem uma base de $\mathbb{P}_n$.*

1.1 Interpolação Polinomial: base de Lagrange

Seja $\tau = (\tau_i)_{i=1}^n$ uma sequência de n pontos distintos. Então

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-\tau_j}{\tau_i - \tau_j} \tag{2}$$

é o i-ésimo polinômio de Lagrange para a sequência τ. Observe que L_i é um polinômio de ordem n que anula-se em todos os pontos τ_j, com excessão do ponto τ_i onde assume o valor 1. Isto pode ser escrito com a ajuda da função delta de Kronecker :

$$L_i(\tau_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} .$$

Portanto, para uma dada função arbitraria g,

$$p = \sum_{j=1}^{n} g(\tau_i) L_i$$

é um elemento de $\mathbb{P}_n$ e satisfaz

$$p(\tau_i) = g(\tau_i)\,, \qquad i = 1, \cdots, n$$

Isto mostra que os polinômios de Lagrange permitem escrever diretamente o polinômio que interpola g na sequência de pontos τ. Além disso, p é o único polinômio que interpola g em τ. De fato, se $q \in \mathbb{P}_n$ e $q(\tau_i) = g(\tau_i)$, para todo i, então $r = p - q$ é também um polinômio de ordem n que anula-se em n pontos distintos $\tau_1, \cdots, \tau_n$ e portanto deve ser o polinômio identicamente nulo, isto é, $q = p$. Os resultados desse parágrafo podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 1.2 (Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador) *Dados pontos distintos $\tau_1, \cdots, \tau_n$ e valores $g(\tau_1), \cdots, g(\tau_n)$, existe um único polinômio $p \in \mathbb{P}_n$ tal que $p(\tau_i) = g(\tau_i)$, $i = 1, \cdots, n$. Este polinômio pode ser escrito na base de Lagrange*

$$p = \sum_{i=1}^{n} g(\tau_i) L_i$$

onde $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - \tau_j)/(\tau_i - \tau_j)$

A representação do polinômio interpolador na base de Lagrange é bastante elegante. Mas comparada com outras representações está muito longe de ser a mais eficiente. Verifique isto avaliando o custo computacional da avaliação do polinômio interpolador na base de Lagrange. Compare o resultado com a representação na base de Newton que será apresentada a seguir.

Na prática, é frequente desconhecer-se quantos pontos de interpolação devem ser utilizados. Nesse caso, é geralmente necessário elevar-se (ou diminuir-se) convenientemente o grau do polinômio interpolador até que tenhamos uma aproximação satisfatória. A forma de Lagrange não permite reutilizar os polinômios já calculados para obter outro polinômio com grau maior (ou menor). Noutras palavras, suponha que tenhamos disponível, um polinômio interpolador na forma de Lagrange de grau $k-1$. O cálculo de um polinomio de grau k na forma de Lagrange deve ser refeito de modo totalmente independente.

Outro problema da base de Lagrange, é que as estimativas do erro da interpolação nessa base são extremamente mais complexas se comparadas, por exemplo, com aquelas obtidas na base de Newton.

1.2 Diferenças Divididas e Interpolação na Base de Newton

Interpolação na base de Newton é reconhecida como o melhor compromisso entre facilidade de construção e eficiência computacional. Além disso, conduz a uma análise simples do erro de interpolação e utiliza interpolação polinomial osculatória sem esforço extra.

Definição 1.1 (Interpolação osculatória num ponto) *Seja* $\tau = (\tau_i)_1^n$ *uma sequência de pontos não necessariamente distintos. Seja* x *um ponto de* τ *que repete-se* m *vezes,* $1 \leq m \leq n$*. Dizemos que a função* p *coincide* [1] *com a função* g *em* x *com multiplicidade* m *se*

$$p^{(i-1)}(x) = g^{(i-1)}(x) \quad para \quad i = 1, \cdots, m\,.$$

A Definição 1.1 também é denominada *interporlação de Hermite* no ponto x , ou ainda, *interpolação repetida no ponto* x.

Definição 1.2 (Diferenças Divididas) *A k-ésima diferença dividida de uma função* g *nos pontos* $\tau_i\,, \cdots, \tau_{i+k}$ *que escrevemos como*

$$[\tau_i\,, \cdots, \tau_{i+k}]g$$

é o coeficiente principal (isto é, o coeficiente de x^k*) do polinômio de ordem* $k+1$ *que coincide com* g *nos pontos* $\tau_i\,, \cdots, \tau_{i+k}$*.*

A Definição 1.2 tem as seguintes propriedades imediatas:

Propriedade 1.1 (Construção Iterativa) Seja $p_i \in \mathbb{P}_i$ o polinômio que coincide com g em $\tau_1\,, \cdots, \tau_i$ para $i = k$ e $i = k+1$. Então

$$p_{k+1} = p_k + (x-\tau_1)(x-\tau_2)\cdots(x-\tau_k)[\tau_i\,, \cdots, \tau_{i+k}]g \tag{3}$$

[1] Daqui por diante escreveremos simplesmente "p coincide com a função g" para expressar efetivamente o sentido da Definição 1.1, isto é, $p(\tau_i) = g(\tau_i)$ e, ocorrendo m repetições na sequencia τ, teremos $p^{(i-1)}(x) = g^{(i-1)}(x)$ para $i = 1, \cdots, m$.

A Propriedade (1.1) mostra que diferenças divididas podem ser utilizadas para construir o polinômio interpolador adicionando um ponto de interpolação por vez. Deste modo, obtemos:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_1(x) + (p_2(x) - p_1(x)) + \cdots + (p_n(x) - p_{n-1}(x)) \\ &= [\tau_1]g + (x-\tau_1)[\tau_1,\tau_2]g + \cdots + (x-\tau_1)\cdots(x-\tau_{n-1})[\tau_1,\cdots,\tau_n]g \end{aligned}$$

que é a forma de Newton (veja Teorema 1.3 na página 5). Essa propriedade mostra como as operações de ajuste do grau do polinômio interpolador ficam simplificadas na base de Newton.

Propriedade 1.2 A função $[\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}]g$ depende sómente dos números $\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}$ e não da ordem em que eles aparecem na lista. Dizemos que a função é simétrica nos seus argumentos $\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}$.

Propriedade 1.3 $[\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}]g$ é linear em g.

Propriedade 1.4 (Fórmula de Leibniz) Se $f = gh$ então

$$[\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}]f = \sum_{r=i}^{i+k}([\tau_i,\cdots,\tau_r]g)([\tau_r,\cdots,\tau_{i+k}]h)$$

Propriedade 1.5 Se g é um polinômio de grau $\leq k$, então

$$[\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}]g \ \text{ é constante como função de } \ \tau_i,\cdots,\tau_{i+k}.$$

Em particular,

$$[\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}]g = 0 \ \ \forall g \in \mathbb{P}_k$$

Propriedade 1.6 Se $g \in C^{(k)}$ então $[\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}]g$ é uma função contínua dos seus $k+1$ argumentos.

Propriedade 1.7 Se $g \in C^{(k)}$ então existe um ponto ξ no menor intervalo contendo $\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}$ tal que

$$[\tau_i,\cdots,\tau_{i+k}]g = \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}$$

Propriedade 1.8 Para cálculos é importante notar que

$$[\tau_i\,,\cdots,\tau_{i+k}]g =$$

$$\begin{cases} \frac{g^{(k)}(\tau_i)}{k!} & \text{se } \; \tau_i = \cdots = \tau_{i+k} \; \text{ e } \; g \in C^{(k)} \\ \\ \frac{[\tau_i\,,\cdots,\tau_{r-1}\,,\tau_{r+1},\cdots\tau_{i+k}]g - [\tau_i\,,\cdots,\tau_{s-1}\,,\tau_{s+1},\cdots\tau_{i+k}]g}{\tau_r - \tau_s} & \forall\; \tau_r, \tau_s \in \{\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}\} \text{ com } \tau_r \neq \tau_s \end{cases}$$

As Propriedades 1.1 e 1.8 são extremamente importantes nas aplicações práticas e serão muito utilizadas na resolução de exercícios.

As Propriedades 1.7 e demais serão utilizadas para o importante problema da estimativa do erro da interpolação polinomial.

Teorema 1.3 (Forma de Newton e Interpolação Osculatória) *Se $g \in C^{(n)}$ e $\tau = (\tau_i)$ é uma sequência de n pontos arbitrarios não necessariamente distintos então*

$$g(x) = p_n(x) + (x-\tau_1)\cdots(x-\tau_n)[\tau_1,\cdots,\tau_n,x]g \tag{4}$$

com

$$p_n(x) = [\tau_1]g + (x-\tau_1)[\tau_1,\tau_2]g + \cdots + (x-\tau_1)\cdots(x-\tau_{n-1})[\tau_1,\cdots,\tau_n]g. \tag{5}$$

Em particular, $p_n(x)$ é o único polinômio de grau $n-1$ que coincide com g em $\tau_1,\cdots,\tau_n$.

O corolário seguinte fornece um modo de estimar o erro de interpolação polinomial. É consequência imediata da aplicação da Propriedade 1.7 no Teorema 1.3.

Corolario 1.1 (Estimativa do Erro da Interpolação Polinomial) *Se $g \in C^{(n)}$, $\tau = (\tau_i)$ é uma sequência de n pontos arbitrarios não necessariamente distintos e $p_n(x)$ é o único polinômio interpolador de g em τ então existe ξ_x no menor intervalo $[a,b]$ contendo $\tau_1\,,\cdots,\tau_n\,,x$ tal que*

$$||g-p_n|| \leq \max_{x\in[a,b]} |(x-\tau_1)\cdots(x-\tau_n)\frac{g^{(n)}(\xi_x)}{n!}| \tag{6}$$

Como mencionamos anteriormente, é importante notar que ao apresentar a base de Newton no Teorema 1.3, permitimos a ocorrência de pontos de interpolação com repetição na sequência τ. Assim, a interpolação de Hermite (ou, interpolação osculatória) é obtida como caso particular do Teorema 1.3. Consegue-se isso através da Definição 1.2, de diferenças divididas, que permite a repetição de pontos de interpolação nas sequência τ.

Corolario 1.2 (Interpolação osculatória e Série de Taylor) *Vamos identificar todos os pontos* $\tau_1 \cdots \tau_n$ *em (4) e (5), com um único ponto* t*:*

$$\tau_1 = \cdots = \tau_n = t\,.$$

Então, usando as Propriedades 1.7 e 1.8 obtemos

$$g(x) = p_n(x) + \frac{g^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-t)^n \qquad \textit{para algum } \xi_x \textit{ entre } t \textit{ e } x$$

com

$$p_n(x) = g(t) + g'(t)(x-t) + \frac{g^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \tag{7}$$

que é a conhecida série de Taylor truncada de g. Note que a série truncada (7) coincide com g em $\tau_1 = \cdots = \tau_n = t$ com multiplicidade n, isto é,

$$p_n(t) = g(t),\;\; p_n'(t) = g'(t),\;\; \cdots,\;\; p_{n-1}^{(n-1)}(t) = g^{(n-1)}(t)\,.$$

Observação 1.1 (Tabela de Diferenças Divididas) Os coeficientes $[\tau_1]g$, $\cdots$, $[\tau_1,\cdots,\tau_n]g$ da forma de Newton 1.3 são eficientemente computados através da seguinte tabela de diferenças divididas:

Ptos Int	Dados	1ª DD	2ª DD	$\cdots$	$(n-2)$ª DD	$(n-1)$ª DD
τ_1	$g(\tau_1)$					
		$[\tau_1, \tau_2]g$				
τ_2	$g(\tau_2)$		$[\tau_1, \tau_2, \tau_3]g$			
		$[\tau_2, \tau_3]g$		.		
τ_3	$g(\tau_3)$				$[\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}]g$	
			.			$[\tau_1, \cdots, \tau_n]g$
$\vdots$	$\vdots$	.			$[\tau_2, \cdots, \tau_{n-1}]g$	
				.		
τ_{n-1}	$g(\tau_{n-1})$		$[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}, \tau_{n-2}]g$			
		$[\tau_{n-1}, \tau_n]g$				
τ_n	$g(\tau_n)$					

Note que a diagonal superior

$$g(\tau_1), [\tau_1, \tau_2]g, [\tau_1, \tau_2, \tau_3]g, \cdots, [\tau_1, \cdots, \tau_n]g$$

contém os coeficientes da forma de Newton (Teorema 1.3) requeridos.

Observação 1.2 (Pontos Repetidos) Em geral, vamos assumir que os pontos de interpolação são ordenados. Então, se existirem pontos repetidos, estes ocorrerão juntos, isto é, se $\tau_i = \tau_{i+r}$ então $\tau_i = \tau_{i+1} = \cdots = \tau_{i+r}$. Portanto, no cálculo de $[\tau_i, \cdots, \tau_{i+r}]g$,

<u>se</u> $\tau_i = \tau_{i+r}$ <u>então</u>

$$[\tau_i, \cdots, \tau_{i+r}]g = \frac{g^{(r)}(\tau_i)}{r!}$$

<u>senão</u> (no caso $\tau_i \neq \tau_{i+r}$) teremos

$$[\tau_i, \cdots, \tau_{i+r}]g = \frac{[\tau_{i+1}, \cdots, \tau_{i+r}]g - [\tau_i, \cdots, \tau_{i+r-1}]g}{\tau_{i+r} - \tau_i}$$

1.3 Exercícios

Exercício 1.1 (Interpolação osculatória de Hermite para o logaritmo) Desejamos aproximar a função $g(x) = \ln x$ em $x = 1.5$ através de $p_4(1.5)$, onde p_4 é o polinômio cúbico satisfazendo $p(k) = g(k)$ e $p'(k) = g'(k)$, $k = 1$ e $k = 2$. Determine tal polinômio cúbico resolvendo o sistema linear 4×4 correspondente. Ou seja, este é um exemplo da conhecida interpolação de Hermite.

Exercício 1.2 (Interpolação de Hermite utilizando Diferenças Divididas com Repetição) Podemos resolver o Exercício 1 no contexto desta seção, utilizando a Definição 1.1, página 3. Para isto, consideramos os pontos de interpolaçao dados pela sequência $\tau = \{1,1,2,2\}$ e os respectivos valores $g(1) = 0$, $g'(1) = 1$, $g(2) = 0.693147$ e $g'(2) = 0.5$. Queremos determinar p_4 que coincida com g em τ.

(a) Construir a tabela de diferenças divididas

τ_i	$g(\tau_i)$	1ª DD	2ª DD	3ª DD
?	?			
		?		
?	?		?	
		?		?
?	?		?	
		?		
?	?			

(b) Determinar o polinômio cúbico na forma de Newton que interpola g nos pontos $\tau = \{1,1,2,2\}$

(c) Utilizando o polinômio obtido no item anterior, aproximar $\ln 1.5$.

Exercício 1.3 Seja $\tau = \{0,0,\pi/4,\pi/4,\pi/2,\pi/2\}$.

(a) Construir o polinômio p_6 de ordem 6 que coincide com $\sin(x)$ em τ.

(b) Dê uma estimativa para o erro máximo $\max\{|\sin(x) - p_6(x)| : 0 \le x \le \pi/2\}$ utilizando a fórmula do erro (4) na página 5.

(c) Comparar a estimativa obtida no item anterior com o erro máximo a ser encontrado diretamente em, por exemplo, 50 pontos do intervalo $[0,\pi/2]$.

1.4 Limitações da Aproximação Polinomial

Nesta seção, mostraremos que um dos principais restrições da interpolação polinomial é sua relativa inflexibilidade. Ilustraremos como essa inflexibilidade manifesta-se e daremos algumas indicações das suas possíveis causas.

Começaremos com um exemplo clássico devido a Rünge (1901). Suponha que queremos aproximar a função

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{em} \quad x \in [-5,5]$$

utilizando polinômios. Uma abordagem natural é escolher m pontos no intervalo, e interpolar estes pontos. Admita que escolhamos pontos equiespaçados, isto é:

$$\tau_i = -5 + 10\frac{i-1}{m-1}, \qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{8}$$

Então pelo Teorema 1.3 existe um único polinômio $p_m \in \mathbb{P}_m$ que interpola g nos pontos $(\tau_i)_1^m$.

A função g é bem comportada, sendo inclusive analítica numa vizinhança do intervalo de aproximação $[-5,5]$. A expectativa é a de que o erro máximo

$$||e_n|| = \max_{-5\leq x\leq 5} |g(x) - p_m(x)|$$

convirja para zero conforme m cresça.

Fizemos os gráficos de g e p_m para $m = 5$, $m = 11$ e $m = 15$. As figuras indicam que o erro de interpolação cresce com m. A Figura ?? mostra que na parte central do intervalo $[-5,5]$, o polinômio p_{15} interpola bem melhor do que p_5 e p_{11}, mas é muito pior nas extremidades. Permanece a expectativa de que conforme m cresça, p_m e g irão coincidir em muitos mais pontos e então p_m seja uma boa aproximação para f em todo o intervalo $[-5,5]$. Entretanto, o teorema seguinte mostra que isto não acontece:

Teorema 1.4 (Rünge) *Sejam*

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in [-5,5]$$

e p_m o polinômio de ordem m que interpola g em m pontos equiespaçados dados por

$$\tau_i = -5 + 10\frac{i-1}{m-1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Então, para $|x| > 3.64$

$$|g(x) - p_m(x)| \longrightarrow \infty \qquad \textit{conforme} \qquad m \longrightarrow \infty$$

Esta situação pode ser contornada se tivermos a liberdade de escolher os pontos de interpolação. Os chamados pontos de Tchebyshev para o intervalo $[a,b]$ são obtidos subdividindo-se o semi-círculo em n arcos iguais e depois projetando o ponto médio de cada arco no intervalo. Isto é:

$$\tau_j = \frac{a + b - (a-b)\cos(\frac{2j-1}{2n}\pi)}{2}.$$

Resumindo, o Teorema 1.4 mostra que sequências de polinômios interpoladores em pontos equiespaçados podem não convergir. Escolhas especiais de pontos de interpolação, como por exemplo os pontos de Tchebyshev, podem resolver o problema.

Entretanto, de acordo com o teorema seguinte, tais escolhas especiais também podem falhar pois para quaisquer sequências pré-determinadas de pontos de interpolação sempre poderemos encontrar uma função contínua g tal que a sequência dos polinômios interpoladores não convergem para g.

Teorema 1.5 (Faber) *Fixado $[a,b]$, suponha que para cada $m \geq 1$*

$$t_{m1} < t_{m2} < \cdots < t_{mm}$$

é um conjunto de pontos de $[a,b]$. Então existe uma função $g \in C[a,b]$ tal que

$$||g - p_m|| \longrightarrow \infty \qquad \textit{conforme} \qquad m \longrightarrow \infty$$

onde p_m é o único polinômio de ordem m que interpola g em $t_{m1}, t_{m2}, \cdots, t_{mm}$.

Os fenomenos de não-convergência nos Teoremas 1.4 e 1.5 são manifestações da inflexibilidade dos polinômios. Quando os polinômios são obrigados a coincidir em muitos pontos com uma curva num intervalo, os mesmos podem reagir com oscilações abruptas em outras regiões do intervalo. Esta tendência à oscilação torna-se mais evidente conforme aumenta-se a ordem dos polinômios. Para ordens baixas, digamos no máximo 5 ou 10 as oscilações dos polinômios podem ser aceitáveis. Infelizmente, o clássico Teorema de Jackson[2] estabelece que uma boa aproximaçao requer em muitos casos o acréscimo da ordem dos polinômios.

Um modo de explicar a tendência de oscilação dos polinômios é que os coeficientes da derivada de um polinômio de ordem alta serão, em geral, muito maiores do que os coeficientes do polinômio original. De fato, em (1) o coeficiente de x^{n-2} em Dp é $(n-1)a_n$, onde a_n é o coeficiente de x^{n-1} em p.

Outra explicação para a inflexibilidade dos polinômios está fundamentada na mais básica de suas propriedades, celebrada antes como uma qualidade: polinômios são suaves. Na realidade, polinômios são suaves demais. Como uma função de uma variável complexa, os polinômios são analíticos, isto é, seus valores em todo o plano complexo são determinados por alguns de seus valores num conjunto arbitrariamente pequeno. Em $\mathbb{R}$, a afirmação equivalente é que $p(x)$ fica completamente caracterizado para todo $x \in \mathbb{R}$ por alguns de seus valores em qualquer intervalo (a, b) não importando quão pequeno este seja.

[2]Sendo f uma função contínua em $[-1, 1]$ e w_f seu módulo de continuidade, o teorema de Jackson afirma que existe uma sequência de polinômios p_n de grau $\leq n$ e uma constante C tal que $\max_{|x|\leq 1} |p_n(x) - f(x)| \leq C \cdot w_f(\frac{1}{n})$.

2 Interpolação Cúbica por Partes

A maior objeção para o uso de $\mathbb{P}_n$ como classe de funções de aproximação é a sua relativa inflexibilidade. Entretanto, para intervalos suficientemente pequenos e para polinômios de ordem menor ou igual a 3 ou 4, as oscilações em grande parte das vezes quase desaparacem.

Este comportamento nos leva a pensar numa classe de funções de aproximação com maior flexibilidade que $\mathbb{P}_n$ porém mantendo suas boas propriedades. A idéia inicial para a obtenção dessa classe é considerar polinômios de ordem relativamente baixa e particionar o intervalo de aproximação em subintervalos menores.

2.1 Polinômios por Partes

Com efeito, dado o intervalo fechado $[a,b]$ seja $\tau = (\tau_i)_1^{n+1}$ uma sequência de pontos tais que

$$a = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n+1} = b$$

A sequência τ, chamada partição de $[a,b]$, decompõe $[a,b]$ em n subintervalos $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Definição 2.1 (Polinômios por Partes) *Dado um inteiro positivo k, definimos o espaço das funções polinômios por partes de ordem k com nós* $\tau_1, \cdots, \tau_{n+1}$ *por*

$$\mathbb{P}_{k,\tau} = \{ f : \ f|_{[\tau_i,\tau_{i+1}[} = p_i \in \mathbb{P}_k \quad para \quad i = 1,2,\cdots,n-1 \quad e \quad f|_{[\tau_n,\tau_{n+1}]} = p_n \in \mathbb{P}_k \}$$

Sempre que conveniente, podemos considerar uma f como definida em toda a reta $\mathbb{R}$ através da extensão da primeira e da ultima parte, isto é: $f(x) = p_1(x)$ se $x < \tau_2$ e $f(x) = p_n(x)$ se $x > \tau_n$. Deve ser observado que isto é uma *extrapolação.* Portanto, longe do intervalo original $[a,b]$, f extendida desta forma, pode refletir o objetivo inicial de modo tão precario quanto qualquer outra técnica de extrapolação. Repetindo, usamos tal extensão por conveniência e não em razão de alguma qualidade intrinseca.

De certo modo, podemos pensar que um polinômio por partes f possui *dois* valores nos nós interiores $\tau_2 \cdots \tau_n$, isto é, o valor $f(\tau_i^-) = P_{i-1}(\tau_i)$ da parte esquerda e o valor $f(\tau_i^+) = P_i(\tau_i)$ da parte direita. Por uma questão de definição, escolhemos a opção arbitrária de fazer f contínua pela direita, isto é,

$$f(\tau_i) = f(\tau_i^+) \qquad i = 2, \cdots, n.$$

Entretanto, é razoavel continuarmos a pensar na função polinomial por trechos f como possuindo dois valores nos nós interiores. Certamente, esta questão é irrelevante no caso em que f é contínua. Mas, a menos que f seja um único polinômio, alguma derivada de f é descontínua e é uma função polinomial por trechos, de modo que a questão deve ser discutida e resolvida nas aplicações.

É claro que $\mathbb{P}_{k,\tau}$ é um espaço linear e que

$$\dim(\mathbb{P}_{k,\tau}) = nk\,,$$

pois seus elementos consistem de n partes de polinômios e cada parte tem k coeficientes livres, a serem determinados. Dito de modo mais abstrato, $\mathbb{P}_{k,\tau}$ é a soma direta de n cópias de $\mathbb{P}_k$.

Embora $\mathbb{P}_{k,\tau}$ seja mais flexível que $\mathbb{P}_n$, não mantém necessariamente a desejada suavidade, pois pode ocorrer que $f \in \mathbb{P}_{k,\tau}$ não seja nem memsmo contínua. Isto desclassifica $\mathbb{P}_{k,\tau}$ como uma boa classe de funções aproximadoras. Apesar disso, polinômios por partes foram utilizados em fórmulas de integração numérica (Newton-Cotes, Gauss), na resolução numérica de problemas a valores iniciais em equações diferenciais ordinárias (Método de Euler) e em análise funcional, na demonstração do Teorema da Aproximação Uniforme de Weierstrass.

2.2 Interpolação por Polinômios Cúbicos por Partes

Nesta seção damos um exemplo de interpolação por polinômios cúbicos por partes, que é uma das classes de funções mais utilizada nas aplicações. Descreveremos alguns métodos para interpolação cúbica por partes de modo a possibilitar a implementação computacional de um programa com várias condições de contorno.

Definiremos alguns tipos de polinômios por partes obtidos variando-se o grau de suavidade entre os subintervalos.

Dados $g(\tau_1), \cdots, g(\tau_{n+1})$ com $a = \tau_1 < \cdots < \tau_{n+1} = b$, construiremos a seguir um polinômio por partes f que interpola g.

Com efeito, em cada intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, definimos que f seja um polinômio de ordem 4, isto é:

$$f(x) = p_i(x) \in \mathbb{P}_4 \quad \text{para} \quad \tau_i \leq x \leq \tau_{i+1}\,, \quad i = 1\,, \cdots n \tag{9}$$

Impomos que a i-ésima parte p_i satisfaça as seguintes condições:

$$\begin{array}{ll} p_i(\tau_i) = g((\tau_i) & p_i(\tau_{i+1}) = g((\tau_{i+1}) \\ p_i'(\tau_i) = s_i & p_i'(\tau_{i+1}) = s_{i+1} \end{array} \tag{10}$$

Em (10), $s_1 \cdots s_{n+1}$ são parâmetros livres. A função cúbica por partes f resultante coincide com g em $a = \tau_1 < \cdots < \tau_{n+1}$ = b, e pertence a $C^{(1)}[a,b]$, isto é, f é contínua e tem a primeira derivada contínua em $[a,b]$ independentemente de como as "inclinações"$(s_i)_1^{n+1}$ sejam escolhidas.

Para calcular os coeficientes da i-ésima parte polinomial utilizaremos a sua forma de Newton:

$$p_i(x) = p_i(\tau_i) + (x-\tau_i)[\tau_i,\tau_i]p_i + (x-\tau_i)^2[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]p_i + (x-\tau_i)^2(x-\tau_{i+1})[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1},\tau_{i+1}]p_i$$

Os coeficientes serão determinados através de uma tabela de diferenças divididas baseada nas condições fornecidas em (10) :

	$[\ ]p_i$	$[\ ,\ ]p_i$	$[\ ,\ ,\ ]p_i$	$[\ ,\ ,\ ,\ ]p_i$
τ_i	$g(\tau_i)$			
		s_i		
τ_i	$g(\tau_i)$		$\frac{[\tau_i,\tau_{i+1}]g - s_i}{\Delta\tau_i}$	
		$[\tau_i,\tau_{i+1}]g$		$\frac{s_{i+1}+s_i-2[\tau_i,\tau_{i+1}]g}{(\Delta\tau_i)^2}$
τ_{i+1}	$g(\tau_{i+1})$		$\frac{s_{i+1}-[\tau_i,\tau_{i+1}]g}{\Delta\tau_i}$	
		s_{i+1}		
τ_{i+1}	$g(\tau_{i+1})$			

Então,

$$\begin{aligned} p_i(x) = \quad & g(\tau_i) + s_i(x-\tau_i) + \tfrac{[\tau_i,\tau_{i+1}]g - s_i}{\Delta\tau_i}(x-\tau_i)^2 + \\ & \tfrac{s_{i+1}+s_i-2[\tau_i,\tau_{i+1}]g}{(\Delta\tau_i)^2}(x-\tau_i)^2(x-\tau_{i+1})\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Podemos também escrever p_i na forma

$$p_i(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x-\tau_i) + c_{3,i}(x-\tau_i)^2 + c_{4,i}(x-\tau_i)^3\,, \qquad x \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\,. \tag{12}$$

Com efeito, os coeficientes $c_{1,i}, \cdots, c_{4,i}$ são obtidos avaliando p_i e suas derivadas em τ_i através das suas representações na base de Newton em (11) . Assim,

$$c_{1,i} = p_i(\tau_i) = g(\tau_i) \tag{13}$$

$$c_{2,i} = p_i'(\tau_i) = s_i \tag{14}$$

$$c_{3,i} = \frac{p_i''(\tau_i)}{2} = \frac{3\,[\tau_i, \tau_{i+1}]g - 2s_i - s_{i+1}}{\Delta\tau_i} \tag{15}$$

$$c_{4,i} = \frac{p_i'''(\tau_i)}{6} = \frac{s_{i+1} + s_i - 2\,[\tau_i, \tau_{i+1}]g}{(\Delta\tau_i)^2} \tag{16}$$

Os vários métodos de interpolação cúbicas por partes diferem no modo como as inclinações $(s_i)_1^{n+1}$ são escolhidas.

Escolhidas tais inclinações e com o cálculo das diferenças $[\tau_i, \tau_{i+1}]g$, podemos calcular os coeficientes $c_{1,i} \cdots c_{4,i}$ em (13) – (16) para então obtermos os polinômios p_i , $1 \leq i \leq n$, representados por (12) e que consituem $f \in \mathbb{P}_{4,\tau}$.

A representação computacional da função polinomial por partes f , onde em cada parte o polinômio é escrito como em (12), i.e. na base canônica, é conhecida na literatura[3] de modo relativamente confuso como *representação polinomial por partes de f* para distinguir de representações em outras bases. Tal representação é mais "pesada"do que as diversas outras representações existentes[4] mas pode eventualmente ser a melhor representação nos casos onde necessita-se avaliar a função numa quantidade muito grande de pontos[5] onde a representação polinomial por partes é muito mais eficiente pois temos a expressão explícita de cada parte polinomial.

Nas seções 2.2.1 e 2.2.2 seguintes apresentaremos duas escolhas muito utilizadas para

[3]Terminologia introduzida por De Boor e depois adotada por Larry Schumaker. De Boor chama tal representação de "ppform" na implementação do Spline Toolbox™ feita para o Matlab.

[4]Por exemplo, do que a representação por B-Splines que é implementada computacionalmente de modo recursivo. Talvez estudemos B-splines mais à frente.

[5]Por exemplo, na construção de gráficos.

$(s_i)_1^{n+1}$.

2.2.1 Interpolação cúbica de Hermite

Neste caso, escolhemos

$$s_i = g'(\tau_i) \qquad i = 1\,, \cdots, n+1\,.$$

Para estimar o erro de interpolação vamos admitir que $g \in C^{(4)}[a,b]$. Para $x \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, temos pela forma de Newton (4) na página 5 que,

$$|g(x) - f_n(x)| = |\,(x-\tau_i)^2\,(x-\tau_{i+1})^2\,[\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}, x]g\,| \tag{17}$$

$$\leq (\frac{\Delta\tau_i}{2})^4 \max_{x\in[\tau_i,\tau_{i+1}]} \frac{|\,g^{(4)}(\xi_{i,x})\,|}{4!} \tag{18}$$

Para $1 \leq i \leq n$ sejam

$$|\,\tau\,| = \max_i \Delta\tau_i \qquad \text{e} \qquad ||\,g^{(4)}\,|| = \max_i \max_{x\in[\tau_i,\tau_{i+1}]} |\,g^{(4)}(\xi_{i,x})\,| \tag{19}$$

Substituindo (19) em (18) obtemos

$$||\,g - f_n\,|| \leq \frac{1}{384}|\,\tau\,|^4\,||\,g^{(4)}\,||\,.$$

Para pontos equiespaçados temos

$$\Delta\tau_i = \frac{b-a}{n} \qquad 1 \leq i \leq n\,.$$

e então,

$$||\,g - f_n\,|| = \mathcal{O}(n^{-4})\,,$$

isto é, admitindo-se $g \in C^{(4)}[a,b]$, o expoente de decaimento para o erro na interpolação cúbica de Hermite é pelo menos -4 .

A estimativa do expoente de decaimento através de um programa computacional, pode ser de grande utilidade na análise dos erros de aproximação e na validação dos programas implementados. Em função de n, o erro $||\,e_n\,|| = ||\,g - f_n\,||$ decresce para zero na forma $\beta\,n^{\alpha}$

para alguma constante β e alguma constante (negativa) α. Se

$$||e_n|| \approx \beta n^{\alpha},$$

então

$$||\frac{e_{n+k}}{e_n}|| \approx (\frac{n+k}{n})^{\alpha}$$

e o expoente de decaimento α pode ser estimado a partir dos erros $||e_n||$ e $||e_{n+k}||$ por

$$\alpha \approx \frac{\log||e_{n+k}|| - \log||e_n||}{\log(n+k) - \log n}. \tag{20}$$

2.2.2 Interpolação por Splines Cúbicos

Neste método, as inclinações livres $s_2 \cdots s_n$ são determinadas a partir da condição de que $f \in C^{(2)}[a,b]$, isto é, f deve ser duas vezes diferenciável e com curvatura contínua. Então, é suficiente impor que

$$p''_{i-1}(\tau_i) = p''_i(\tau_i) \qquad \text{para} \qquad i = 2, \cdots, n. \tag{21}$$

Escrevendo os polinômios p_i na forma

$$p_i(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x-\tau_i) + c_{3,i}(x-\tau_i)^2 + c_{4,i}(x-\tau_i)^3, \qquad x \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

temos que (21) é equivalente a

$$2c_{3,i-1} + 6c_{4,i-1}\Delta\tau_{i-1} = 2c_{3,i} \qquad \text{para} \qquad i = 2, \cdots, n. \tag{22}$$

Substituindo (15) e (16) em (22), obtemos o sistema linear com as $n+1$ incógnitas $s_1, \cdots, s_{n+1}$ e com $n-2$ equações dadas por:

$$s_{i-1}\Delta\tau_i + s_i 2(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) + s_{i+1}\Delta\tau_{i-1} = b_i, \qquad i = 2, \cdots, n \tag{23}$$

com

$$b_i = 3(\Delta\tau_i[\tau_{i-1}, \tau_i]g + \Delta\tau_{i-1}[\tau_i, \tau_{i+1}]g).$$

Em (23) temos um sistema linear com $n-1$ equações e $n+1$ incógnitas $s_1, \cdots, s_{n+1}$ que pode ser escrito na forma matricial $\bar{A}x = b$ do seguinte modo:

$$
\begin{bmatrix}
\Delta\tau_2 & 2(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) & \Delta\tau_1 & & & \\
 & \Delta\tau_3 & 2(\Delta\tau_2 + \Delta\tau_3) & \Delta\tau_2 & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & \Delta\tau_n & 2(\Delta\tau_{n-1} + \Delta\tau_n) & \Delta\tau_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \\ \\ \\ s_{n-1} \\ s_n \\ s_{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_2 \\ b_3 \\ \\ \\ \\ b_n
\end{bmatrix}
$$

Admitindo que os dois parâmetros de contorno s_1 e s_{n+1} foram escolhidos segundo algum critério (veja seção a seguir), podemos adicionar as duas respectivas equações ao sistema $\bar{A}x = b$ para obter um novo sistema $Ax = b$ com $(n+1)$ equações e $(n+1)$ incógnitas onde a matriz A é tridiagonal com diagonal dominante.

Assim, podemos concluir que o novo sistema $Ax = b$ tem uma única solução e, além disso, pode ser resolvido fácilmente pelo Método de Eliminação de Gauss *sem* pivotamento.

2.2.3 Condições de Contorno

As diversas escolhas para s_1 e s_{n+1} que discutiremos nesta seção podem também ser utilizadas em outros métodos de interpolação (interpolação cúbica de Bessel, interpolação de Akima, etc.) mas serão estudadas aqui sómente no contexto de interpolação por *splines cúbicos*.

CC 1. [**Spline Completo:** g' **conhecida**][6] Se g' é conhecida em τ_1 e τ_{n+1}, então é natural escolher $f' = g'$ nesses pontos. Pela definição em (10), das partes p_i que compõe f, temos que $p_1'(\tau_1) = s_1$ e $p_{n+1}'(\tau_{n+1}) = s_{n+1}$. Ou seja,

$$s_1 = g'(\tau_1) \qquad \text{e} \qquad s_{n+1} = g'(\tau_{n+1}) \, ,$$

[6] Também conhecido na literatura como "Campled Splines"

que são respectivamente a primeira e a $(n+1)$-ésima equações a serem acrescentadas ao sistema linear (23).

CC 2. [g'' **conhecida**] Se g'' é conhecida nas extremidades τ_1 e τ_{n+1}, então pode-se impor $f'' = g''$ nesses pontos e determinar-se as equações correspondentes envolvendo s_i. Com efeito, temos que $p_1''(\tau_1) = 2c_{3,1}$. Então,

$$g''(\tau_1) = 2c_{3,1} \tag{24}$$

A substituição de $c_{3,1}$ obtido em (15) na fórmula (24) resulta em

$$2s_1 + s_2 = 3\,[\tau_1, \tau_2]g - \Delta\tau_1 \frac{g''(\tau_1)}{2} \tag{25}$$

que acrescentaremos como a primeira equação ao sistema linear (23). Análogamente, a equação correspondente à extremidade direita τ_{n+1} é :

$$s_n + 2s_{n+1} = 3\,[\tau_n, \tau_{n+1}]g + \Delta\tau_n \frac{g''(\tau_{n+1})}{2} \tag{26}$$

que acrescentaremos como a $(n+1)$-ésima equação ao sistema (23).

CC 3. [**Spline Natural**] O denominado spline *natural* é obtido pela imposição das condições de contorno

$$f''(\tau_1) = f''(\tau_{n+1}) = 0\,. \tag{27}$$

Substituindo-se (27) em (25) e (26) obtemos

$$2s_1 + s_2 = 3\,[\tau_1, \tau_2]g \qquad \text{e} \qquad s_n + 2s_{n+1} = 3\,[\tau_n, \tau_{n+1}]g$$

que são respectivamente a primeira e a $(n+1)$-ésima equações a serem acrescentadas ao sistema linear (23).

Apesar do nome imponente, interpolação por splines naturais não apresenta bons resultados do ponto de vista da teoria da aproximação. A menos que também ocorra $g''(\tau_1) = g''(\tau_{n+1}) = 0$, a escolha arbitrária (27) produz erros $\mathcal{O}(|\tau|^2)$ numa vizinhança das extremidades, reduzindo assim significativamente a velocidade total de convergência do método de interpolação.

CC 4. [**Condição "Not-a-Knot": desconhecimento nas extremidades**] Quando não temos conhecimento sobre as derivadas de g nas extremidades deveremos tentar a condição *Not-a-Knot*, que consiste em escolher s_1 de modo que $p_1 = p_2$ e escolher s_{n+1} de modo que $p_{n-1} = p_n$ [7].

Temos então que f''' é contínua em τ_2, e em consequência $c_{4,1} = c_{4,2}$ donde obtém-se

$$\frac{s_1 + s_2 - 2[\tau_1, \tau_2]g}{(\Delta\tau_1)^2} = \frac{s_2 + s_3 - 2[\tau_2, \tau_3]g}{(\Delta\tau_2)^2}\,.$$

Isolando s_1, s_2 e s_3 resulta que

$$(\Delta\tau_2)^2 s_1 + ((\Delta\tau_2)^2 - (\Delta\tau_1)^2)s_2 - (\Delta\tau_1)^2 s_3 = 2(\Delta\tau_2)^2[\tau_1, \tau_2]g - 2(\Delta\tau_1)^2[\tau_2, \tau_3]g\,. \tag{28}$$

Fazendo $i = 2$ em (23), temos que:

$$(\Delta\tau_1)s_3 = b_2 - (\Delta\tau_2)s_1 - 2(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2)s_2\,. \tag{29}$$

Substituindo (29) em (28) obtemos

$$(\Delta\tau_2)s_1 + (\tau_3 - \tau_1)s_2 = \frac{(\Delta\tau_1 + 2(\tau_3 - \tau_1))(\Delta\tau_2)[\tau_1, \tau_2]g + (\Delta\tau_1)^2[\tau_2, \tau_3]g}{\tau_3 - \tau_1} \tag{30}$$

que acrescentaremos como a primeira equação ao sistema linear (23).

De modo análogo, para τ_n, obtemos

$$(\tau_{n+1} - \tau_{n-1})s_n + (\Delta\tau_{n-1})s_{n+1} = \frac{(\Delta\tau_n)^2[\tau_{n-1}, \tau_n]g + (2(\tau_n - \tau_{n+1}))(\Delta\tau_{n-1})[\tau_n, \tau_{n+1}]g}{\tau_{n+1} - \tau_{n-1}} \tag{31}$$

que acrescentaremos como a $(n+1)$-ésima equação ao sistema linear (23).

CC 5. [**Condição Livre**] Pode-se escolher livremente outras condições nas duas extremidades que melhor se adaptem à particular aplicação. Obviamente, podemos considerar condições mistas, distintas para cada extremidade.

[7] Isto equivale a dizer que o primeiro e o último nós interiores (resp. τ_2 e τ_n) não são efetivamente pontos de junção de polinômios distintos, dizemos neste caso que são nós inativos.

2.3 Resumo e conclusão

Na seção 2.1 comentamos que os vários métodos de interpolação cúbicas por partes diferem no modo como as inclinações $(s_i)_1^{n+1}$ são escolhidas.

Nas seções 2.2.1 e 2.2.2 , calculamos $(s_i)_1^{n+1}$ respectivamente para a interpolação cúbica de Hermite e para a interpolação por splines cúbicos.

No caso da interpolação cúbica de Hermite, basta fazer $s_i = g'(\tau_i)$ no cálculo dos coeficientes $c_{1,i} \cdots c_{4,i}$ em (13)–(16) para então obtermos os polinômios p_i , $1 \leq i \leq n$, representados por (12) e que consituem $f \in \mathbb{P}_{4,\tau}$.

No caso da interpolação por splines cúbicos, deveremos resolver o sistema linear quadrado $Ax = b$, que é obtido a partir do sistema linear $\bar{A}x = b$ com $n-1$ equações e $n+1$ incógnitas, acrescido das duas equações fornecidas pelas condições de contorno.

A matriz A resultante é tridiagonal com diagonal dominante e então o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido fácilmente pelo Método de Eliminação de Gauss *sem* pivotamento.

A interpolação de Hermite é muito mais simples do que interpolação por splines cúbicos, pois esta envolve a resolução de um sistema linear. Por outro lado, na interpolação cúbica de Hermite temos que $f \in C^{(1)}[a,b] \bigcap \mathbb{P}_{4,\tau}$ enquanto que na interpolação por splines cúbicos $f \in C^{(2)}[a,b] \bigcap \mathbb{P}_{4,\tau}$.

2.4 Exercícios

Exercício 2.1 (Interpolação por polinômios por trechos e por splines) Considere a seguinte função tabelada g:

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
τ	1	2	5	7
$g(\tau)$	1	2	3	2.5

(a) Determine a função polinomial por trechos linear f_L que interpola a tabela g.

(b) Determine a função cúbica por trechos de Hermite f_H que interpola g e satisfaça $f'_H(\tau_i) = g'(\tau_i)$,

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
τ	1	2	5	7
$g'(\tau)$	1	-1	0	2

(c) Determine a função spline cúbica natural f_S que interpola g.

(d) Num mesmo sistema de coordenadas, faça os gráficos de f_L, f_H e f_S. Preferencialmente, utilize algum *software*.

(e) Qual é a classe de difenciabilidade de f_H? E de f_S?

(f) Encontre uma aproximação de $g(1.5)$ utilizando f_H. Suponha que, por algum motivo, o valor tabelado $g(7)$ modificou-se para $g(7) = 4.5$, de modo que teríamos uma nova f_H. O valor da aproximação de $g(1.5)$ por f_H modifica-se?

(g) Idem para f_S.

(h) A aproximação por funções cúbicas de Hermite é local ou global? Explique.

(i) A aproximação por splines cúbicas é local ou global? Explique.

Exercício 2.2 (Utilizar computador: exemplo de Runge e convergência) Considere a função

$$g(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad x \in [-1,1]$$

(a) Interpole g nos pontos

$$\tau_i = 1+(i-1)h \qquad \text{com} \qquad h = \frac{2}{n-1} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,n \\ n = 2,4,6,\ldots,20 \end{array}$$

através da função cúbica por trechos de Hermite.

(b) Dê uma estimativa para o erro máximo de interpolação e para o exponte de decaimento do erro no intervalo $[-1,1]$, para $n = 2,4,6,\cdots,20$.