Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
MAP313 – Cálculo de Diferenças Finitas

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Antonio Elias Fabris

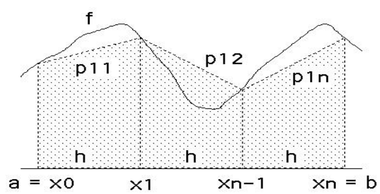
2º Semestre de 2003

Slide 1

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

"Estimar $I = \int_a^b f(x)dx$ onde f é contínua e suficientemente derivável em $[a, b]$"

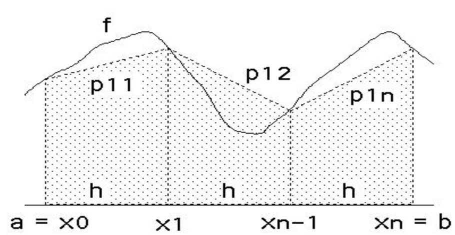
Método dos Trapézios em $[x_0, x_1]$



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_{11}(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Slide 2

Erro do Método dos Trapézios em $[x_0, x_1]$



$$E_{\mathbb{T}}^1 = \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - p_{11}(x))dx \overset{*}{=} -\frac{1}{12}h^3 f''(\epsilon_1)$$

$$x_0 \le \epsilon_1 \le x_1$$

Veja demonstração de (∗) na pág. 6, Proposição 1

Slide 3

Fórmula dos Trapézios em $[a, b]$

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx =$$

$$\overbrace{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx}^{} + \overbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}^{} + \cdots + \overbrace{\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx}^{} \approx$$

$$\overbrace{\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]} + \overbrace{\frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)]} + \cdots + \overbrace{\frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]}$$

Slide 4

Erro do Método dos Trapézios em $[a, b]$

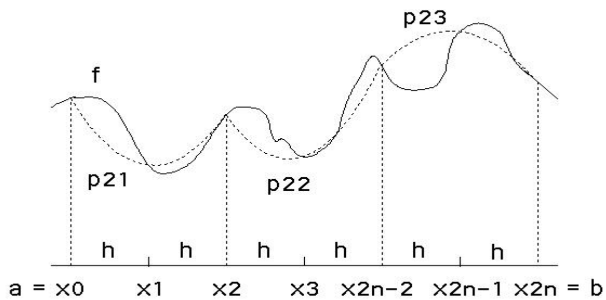
$$E_{\mathbb{T}} = \sum_{i=1}^{n} E_{\mathbb{T}}^{i} \qquad \Longrightarrow \qquad E_{\mathbb{T}} = -\frac{nh^3}{12} f''(\epsilon) \qquad a \leq \epsilon \leq b \qquad (1)$$

Substituindo $h = (b-a)/n$ em (1) obtemos

$$\boxed{E_{\mathbb{T}} = -\tfrac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\epsilon) \qquad a \leq \epsilon \leq b} \qquad (2)$$

Slide 5

Método de de Simpson



Fórmula de Simpson em $[x_0, x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_{21}(x)dx$$

p_{21} é a parábola que interpola f nos pontos x_0, x_1 e x_2

Slide 6

Escrevendo p_{21} na Forma de Newton (passo constante h)

$$p_{21}(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}$$

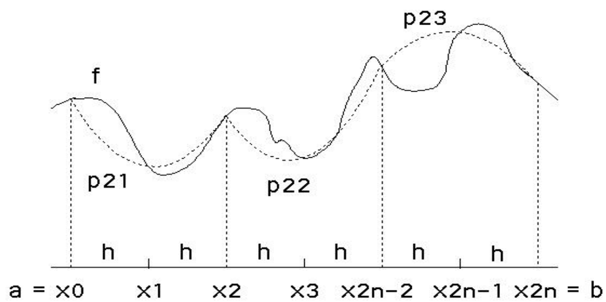
Integrando o polinômio do segundo grau p_{21}

$$\int_{x_0}^{x_2} p_{21}(x)dx \overset{*}{=} \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Veja demonstração de $(*)$ na pág. 6, Proposição 2

Slide 7

Erro do Método de Simpson em $[x_0, x_2]$



$$E_{\mathbb{S}}^1 = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_{21}(x))dx \overset{*}{=} -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\epsilon_1) \qquad x_0 \leq \epsilon_1 \leq x_2$$

Veja demonstração de $(*)$ na pág. 7, Proposição 3

Slide 8

Fórmula de Simpson em $[a, b]$

$$\int_{a=x_0}^{b=x_{2n}} f(x)dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} p_{21}(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} p_2^2(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} p_2^n(x)dx =$$

$$\overbrace{\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]} + \overbrace{\frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]} + \cdots$$

$$+ \overbrace{\frac{h}{3}[f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]}$$

Slide 9

Fórmula de Simpson em $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots$$
$$+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})]$$

Erro do Método de Simpson em $[a,b]$

$$E_{\mathbb{S}} = \sum_{i=1}^{n} E_{\mathbb{S}}^i \qquad \Longrightarrow \qquad E_{\mathbb{S}} = -\frac{nh^5}{90} f^{(4)}(\epsilon) \qquad a \le \epsilon \le b \qquad (3)$$

Substituindo $h = (b-a)/2n$ em (3) obtemos

$$\boxed{E_{\mathbb{S}} = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\epsilon)} \qquad (4)$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular pela fórmula dos trapézios e pela fórmula de Simpson
$$\int_0^{0.8} \frac{dx}{x^2-1}$$
com passo $h = 2$.

2. Calcular
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$$
para $x = 0.5$ pelas fórmulas dos trapézios e Simpson com $n = 3$. Comparar com o valor extraído de uma tabela $\operatorname{erf}(0.5) \approx 0.520500$.

3. Delimite o erro que se comete ao calcular
$$\int_0^{0.4} \mathrm{e}^x dx$$
pela fórmula de Simpson com $h = 0.1$.

4. Deseja–se calcular
$$\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$
com erro inferior a $1/2400$ usando a fórmula dos trapézios. Qual deve ser o passo escolhido? Repita o exercício usando a fórmula de Simpson.

RESULTADOS AUXILIARES

A.1 - $f(x) = p_n(x) + R(x)$ onde p_n é polinômio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de $[a,b]$ e

$$R(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

A.2 - Se f não muda de sinal em $[a,b]$, existe $\epsilon \in [a,b]$ t.q.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\epsilon)\int_a^b g(x)dx$$

PROPOSIÇÃO 1 (Erro do Método dos Trapézios em $[x_0, x_1]$)

$$E_{\mathbb{T}}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - p_{11}(x))dx = -\frac{1}{12}h^3 f''(\epsilon_1) \qquad x_0 \leq \epsilon_1 \leq x_1$$

Prova: Pelo resultado A.1

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - p_{11}(x))dx = \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2!}dx$$

Fazendo a mudança de variável $x = x_0 + hz$ temos:

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2!}dx \stackrel{\text{M.V.}}{=} \int_0^1 hz(hz-h)\frac{f''(x_0+\xi_z)}{2!}hdz = \frac{h^3}{2}\int_0^1 z(z-1)f''(x_0+\xi_x h)dz$$

Pelo resultado A.2 temos

$$\frac{h^3}{2}\int_0^1 \underbrace{z(z-1)}_{g(z)} f''(x_0+\xi_x h)dz \stackrel{\text{A.2}}{=} \frac{h^3}{2}f''(\epsilon_1)\underbrace{\int_0^1 z(z-1)dz}_{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{12}h^3 f''(\epsilon_1)$$

que prova a proposição 1.

PROPOSIÇÃO 2 *Se p_{21} é o polinômio interpolador de f nos pontos x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ então*

$$\int_{x_0}^{x_1} p_{21}(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Prova: Pela fórmula de Newton para diferenças simples

$$p_{21} = f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}$$

Integrando p_{21} e fazendo a mudança de variável $x = x_0 + hz$ temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} [f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}]dx \stackrel{\text{M.V.}}{=}$$

$$\int_0^2 [f(x_0) + z\Delta f(x_0) + z(z-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}]hdz \tag{5}$$

Distribuindo e fatorando a integral (5) tem–se

$$h\left[f(x_0)\int_0^2 dz + \Delta f(x_0)\underbrace{\int_0^2 zdz}_{2} + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}\underbrace{\int_0^2 z(z-1)dz}_{\frac{1}{3}}\right]$$

Lembrando que

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) \qquad \text{e} \qquad \Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0) \ ,$$

obtemos o resultado.

PROPOSIÇÃO 3 (Erro do Método de Simpson em $[x_0, x_2]$)

$$E^1_{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_{21}(x))dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\epsilon_1) \qquad x_0 \leq \epsilon_1 \leq x_2$$

Prova: Análoga à prova da proposição 1; veja também a proposição 1.3 do livro texto, página 168.