Equações de Diferenças

MAP313 – Cálculo de Diferenças Finitas

Bacharelado em Estatística

Antonio Elias Fabris

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatistica
Universidade de São Paulo

Equações a diferenças finitas

- Motivação: econometria e séries temporais
- Abordagem prática
- O que significa ”resolver” uma equação de diferenças?
- Equações lineares de primeira e segunda ordem
  - Uma metodologia de soluções
  - Estudo do equilibrio e estabilidade das soluções

Exemplos de Aplicações

- Modelos de séries temporais
  - Equações de diferenças envolvendo componentes estocásticas
  - Componentes: tendência, sazonal, estocástica
- Economia dinâmica
  - Preços de ativos financeiros: hipótese do caminho aleatorio
  - Um modelo para o PIB (Samuelson)

Diferenças

- $y = f(t)$

- Adotaremos passo constante $h = 1$

- De primeira ordem

$$\Delta y_t = f(t) - f(t-1) = y_t - y_{t-1}$$

- De segunda ordem

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$$

- Principalmente em econometria, usa-se pouco diferen
  de ordem superiores a três

Equação diferenças linear ordem n

- Teórica:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i}$$

- Com perturbação estocástica:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i} + x_t$$

onde

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \epsilon_{t-i}$$

Solução de Equação de Diferenças

- A solução é uma função

- Exemplo 1: $y_{t+1} - 2y_t = 0$
  - Qual é a ordem da equação?
  - Dada $c \in \mathbb{R}$, verifique se $y(t) = t + c$ é solução.
  - Se necessário, descubra a solução da equação dada.

- Exemplo 2: eq. estocástica $I_t = 0.7I_{t-1} + \epsilon_t$
  - Qual é a ordem da equação?
  - Verifique se
    $$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (0.7)^i \epsilon_{t-i}$$
    é solução.

Equações de 1a. Ordem

- $y_{t+1} = Ay_t + B$

- Teorema

$$y_t = \begin{cases} A^t y_0 + B\frac{1-A^t}{1-A} & \text{se A} \neq 1 \\ & \\ y_0 + Bt & \text{se A} = 1 \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- Análise de comportamento assintótico das soluções

Análise dos coeficientes: exemplo

- ϵ_t componente estocástica
- $y_t = 0.9y_{t-1} + \epsilon_t$
- $y_t = 0.5y_{t-1} + \epsilon_t$
- $y_t = -0.5y_{t-1} + \epsilon_t$
- $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$
- $y_t = 1.2y_{t-1} + \epsilon_t$
- $y_t = -1.2y_{t-1} + \epsilon_t$
- Veja gráfico na página 14 do livro texto

Metodologia de solução

- Obter solução geral da equação homogenea

- Achar solução particular de equação completa

- Solução geral da completa =
  solução geral da homogênea +
  solução particular da completa

- Eliminar constantes impondo condições iniciais

Metodologia de solução: exemplo

- Resolva a equação

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 2$$

sujeita ás condições iniciais $y_0 = 1$ e $y_1 = 4$

  - Obter solução geral da equação homogenea

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$$

  - Achar solução particular de equação completa

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 2$$

  - Somar as duas soluções acima para obter a solução geral da completa

  - impor as condições iniciais $y_0 = 1$ e $y_1 = 4$

Existência e Unicidade da Solução

Teorema: Considere a equação de diferenças linear de segunda ordem

$$y_{t+2} + f_1(t)y_{t+1} + f_2(t)y_t = g(t)$$

definida sobre um conjunto de valores de t, inteiros e consecutivos.

Se y_0 e y_1 são números fixos arbitrários, então existe uma única função Y_t que é solução da equação e satisfaz $Y(0) = y_0$ e $Y(1) = y_1$.

- Exemplo: $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 2t - 3$

Como determinar a solução (única) satisfazendo duas condições iniciais?

Solução Geral da Homogênea

Teorema: A equação de diferenças homogênea

$$y_{t+2} + f_1(t)y_{t+1} + f_2(t)y_t = 0$$

tem solução geral

$$Y_t = Ay_t^{(1)} + By_t^{(2)}$$

onde $y_t^{(1)}$ e $y_t^{(2)}$ são duas soluções linearmente independentes, e A e B são constantes arbitrárias.

- $\{y_t^{(1)}, y_t^{(2)}\}$ é denominado conjunto fundamental, base de soluções da equação homogênea

- Vamos calcular o conjunto fundamental de soluções para equações de diferenças homogêneas com <u>coeficientes</u> $f_1(t)$ <u>e</u> $f_2(t)$ <u>constantes</u>.

Solução Geral da Homogênea

Teorema: Considere a equação de diferenças

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0 \qquad (1)$$

onde a_1 e a_2 são constantes com $a_2 \neq 0$. Sejam m_1 e m_2 as duas raízes da equação auxiliar

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

e Y_t^h solução geral da equação de diferenças (1).

Então:

- $m_1 \neq m_2$ reais $\implies$ $Y_t^h = Am_1^t + Bm_2^t$
- $m_1 = m_2$ $\implies$ $Y_t^h = (A + Bt)m_1^t$
- $m_{1,2} = r(\cos\theta \pm i \sin\theta)$ $\implies$ $Y_t^h = Ar^t \cos(t\theta + B)$

Exercícios

Determine as soluções gerais das equações

- $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$
- $y_{t+2} + y_t = 0$
- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$

Solução Geral da Eq. Completa

Teorema: A equação de diferenças

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = g(t)$$

onde a_1 e a_2 são constantes com $a_2 \neq 0$, tem solução geral

$$Y_t = Y_t^h + y_t^*$$

onde

- Y_t^h: solução geral da equação homogênea associada
- y_t^*: uma solução particular de equação completa

Exercícios

Determine as soluções gerais das equações

- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 3^t$
- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = a^t$ (a = constante)

Soluções particulares "tentativas"

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = g(t)$$

$g(t)$	Soluções tentativas y_t^*
a^t	Aa^t
$\sin bt$ ou $\cos bt$	$A \sin bt + B \cos bt$
t^n	$A_0 + A_1 + \cdots + A_n t^n$
$t^n a^t$	$a^t(A_0 + A_1 + \cdots + A_n t^n)$
$a^t \sin bt$ ou $a^t \cos bt$	$a^t(A \sin bt + B \cos bt)$

Determine as soluções gerais das equações

- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 5 \sin(\frac{t\pi}{2})$
- $y_{t+2} - y_{t+1} - 2y_t = t^2$
- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t + 2^t$

Condições de Estabilidade

Teorema: Seja

$$\rho = \max\{|m_1|, |m_2|\}$$

onde m_1 e m_2 são as raízes da equação auxiliar da equação de diferenças de segunda ordem homogênea

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0.$$

Então $\rho < 1$ é uma condição necessária e suficiente para que a solução $\{Y_t\}$ convirja para 0 para quaisquer valores iniciais y_0 e y_1.

Exercícios - Estabilidade

Estude o comportamento limite das soluções das seguintes equações

- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$
- $y_{t+2} + 3y_{t+1} - 2y_t = 0$
- $y_{t+2} + y_t = 0$
- $4y_{t+2} + y_t = 0$

Estabilidade $\times$ Coeficientes a_1, a_2

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$$

Modelo “cobweb”

Considere o mercado de um produto (trigo) representado por

$$d_t = a - \gamma p_t \qquad \gamma > 0 \tag{2}$$

$$s_t = b + \beta p_t^* + \epsilon_t \qquad \beta > 0 \tag{3}$$

$$s_t = d_t \tag{4}$$

onde

- d_t: procura por trigo no tempo t
- s_t: oferta de trigo no tempo t
- p_t: preço de mercado do trigo em t
- p_t^*: preço que os produtores esperam conseguir em t
- ϵ_t: abalo da oferta com média estocástica zero.

Exercício: diferenças estocásticas

- Considere a equação de primeira ordem

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t \tag{5}$$

onde ϵ_t é uma perturbação aleatória com valor esperado igual a zero.

- Determine b_0, b_1 e os coeficientes α_i tal que

$$y_t = b_0 + b_1 t + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \epsilon_{t-i}$$

seja solução de (5)