MAC–IME–USP

Carlos Eduardo Ferreira
Sala 297A Tel.: 3091 6140
e-mail cef@ime.usp.br

MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Primeiro semestre de 2003

Terceira Prova - 10 de junho de 2003

1. (valor 1.0+1.0 pontos)
   a. Prove que se $\mathcal{NP} \neq$ co-$\mathcal{NP}$, então $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
   b. Considere $A \in \mathcal{NP}$-completo e $B \in \mathcal{NP}$. Mostre que se existe uma redução polinomial de A a B, então B é $\mathcal{NP}$-completo.

2. (valor 1.0+1.0 pontos)

   Considere o seguinte algoritmo, que inverte a posição dos primeiros k elementos de um vetor $v[0 \ldots n-1]$.

```
Flip (k, v, n)

se k > n
   k = n
i = 0
j = k - 1
enquanto i < j
   troca v[i] com v[j]
   i = i + 1
   j = j - 1
```

   Escreva um algoritmo em pseudo-código que recebe um vetor $A[0 \ldots n-1]$ e o coloca em ordem crescente utilizando $\Theta(n)$ chamadas de `Flip`.
   a. Justifique **rigorosamente** a corretude de seu algoritmo.
   b. Justifique **rigorosamente** que seu algoritmo satisfaz a complexidade pedida.

3. (valor 2.0 pontos)

   Considere dois vetores ordenados $A[0 \ldots n-1]$ e $B[0 \ldots n-1]$ em ordem crescente. Escreva um algoritmo $O(\log n)$ em pseudo-código que encontra a mediana de todos os $2n$ elementos nos vetores (a mediana de um conjunto é um elemento x tal que o número de elementos menores que x e o número de elementos maiores que x são iguais ou diferem de no máximo 1). Justifique que seu algoritmo tem a complexidade pedida.

4. (valor 2.0 pontos)

Um professor pediu que seus alunos escrevessem um algoritmo para calcular a seguinte função, definida nos naturais:

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x-1,y) + f(x,y-1) + xy & \text{se } x > 1 \text{ e } y > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1 \text{ ou } y = 1. \end{cases}$$

Dois tipos de algoritmos apareceram:

```
F1 (x, y)

se x = 1 ou y = 1
   devolva 0
senão
   devolva F1(x-1,y) + F1(x,y-1) + x * y
```

```
F2 (x, y)

para i = 1 até x
   t[i,1] = 0
para j = 2 até y
   t[1,j] = 0
para i = 2 até x
   para j = 2 até y
      t[i,j] = t[i-1,j] + t[i,j-1] + i * j
devolva t[x,y]
```

Qual dos dois algoritmos é mais eficiente? Justifique sua resposta utilizando notação O e Ω.

5. (valor 2.0 pontos)

Considere o algoritmo abaixo, que recebe um vetor $A[0 \ldots n-1]$ e devolve o índice de um elemento mínimo do vetor:

```
Mínimo (A, n)

1  se n = 1
2     k = n-1
3  senão
4     k = Mínimo(A, n-1)
5     se A[k] > A[n-1]
6        então k = n-1
7  devolva k
```

Suponha que os elementos de A são todos distintos, e que a probabilidade de que o elemento de índice i seja mínimo é $\frac{1}{n}$. Defina $T(n)$ como o número médio de execuções do comando `k = n-1` (linhas 2 e 6). Calcule, com a melhor precisão que conseguir, o valor de $T(n)$.