Departamento de Ciência da Computação – IME/USP
Otimização Combinatória

Professor: Carlos Eduardo Ferreira
Sala 108C, Tel.: 3091-5526, e-mail: cef@ime.usp.br

Monitor: Fernando Mario de Oliveira Filho
e-mail: fmario@ime.usp.br

Terceira Lista de Exercícios
Fluxos Máximos em Redes
Data de Entrega: 23/11/2004

Notação

Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido. O *grafo não-dirigido subjacente* de D é o grafo $G = (V, E)$ que possui, para cada arco $uv \in A$, uma aresta uv. Note que G pode não ser simples mesmo que D o seja. Dizemos que o grafo dirigido D é uma *orientação* do grafo G se G for o grafo não-dirigido subjacente de D. Denotamos por $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não-negativos.

Exercícios

1. (25 pts.) Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido e $r, s \in V$.

(a) (15 pts.) Mostre que o número máximo de (r, s)-caminhos dirigidos dois a dois disjuntos nos arcos é igual ao número mínimo de arcos que precisam ser removidos de D para que todos os (r, s)-caminhos dirigidos sejam destruídos. Este resultado é conhecido como teorema de Menger.

(b) (10 pts.) Dizemos que dois (r, s)-caminhos dirigidos são *independentes* se são disjuntos em seus vértices internos. Mostre que o número máximo de (r, s)-caminhos dirigidos dois a dois independentes é igual ao número mínimo de vértices que precisam ser removidos de D para que todos os (r, s)-caminhos dirigidos sejam destruídos.

2. (25 pts.) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ uma função custo e $r, s \in V$. Mostre que o número máximo de (r, s)-caminhos de custo mínimo em G é igual ao número mínimo de arestas que precisam ser removidas para que a distância entre r e s aumente.

3. (25 pts.) Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido, com bipartição $\{A, B\}$. Um conjunto $M \subseteq E$ é um *emparelhamento* em G se cada vértice de G é ponta de no máximo uma aresta em M. Dizemos que um emparelhamento M *cobre* A (ou B) se cada vértice de A (B) é ponta de alguma aresta de M. Um conjunto $C \subseteq V$ é uma *cobertura* se cada aresta de G tem pelo menos uma ponta em C.

(a) (10 pts.) Use o teorema do Fluxo Máximo/Corte Mínimo para provar o teorema de König-Egerváry: se G é um grafo bipartido então a cardinalidade de um emparelhamento máximo em G é igual a cardinalidade de uma cobertura mínima em G.

(b) (15 pts.) Prove o teorema de Hall: o grafo bipartido G, com bipartição $\{A, B\}$, possui um emparelhamento que cobre A se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$, sendo que $N(X)$, para $X \subseteq VG$, denota o conjunto dos vértices de G que são adjancentes a vértices em X.

4. (25 pts.) Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e $k \geq 1$ um inteiro qualquer. Uma *k-orientação* de G é uma orientação de G na qual o grau de saída de cada vértice é no máximo k. Forneça condições necessárias e suficientes para que um grafo simples G admita uma k-orientação.