Departamento de Ciência da Computação – IME/USP
Otimização Combinatória

Professor: Carlos Eduardo Ferreira
Sala 108C, Tel.: 3091-5526, e-mail: `cef@ime.usp.br`

Monitor: Fernando Mario de Oliveira Filho
e-mail: `fmario@ime.usp.br`

Segunda Lista de Exercícios
Caminhos Mínimos e o Problema do Transporte
Data de Entrega: 19/10/2004

Notação

Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido. Para $S \subseteq V$, denotamos por $\delta^{\text{in}}(S)$ o conjunto dos arcos que terminam em algum vértice de S e começam em algum vértice de $V \setminus S$ e por $\delta^{\text{out}}(S)$ o conjunto $\delta^{\text{in}}(V \setminus S)$. Se $v \in V$, abreviamos $\delta^{\text{in}}(\{v\})$ por $\delta^{\text{in}}(v)$, por exemplo.

Dada uma função demanda $b\colon V \to \mathbb{R}$, dizemos que um vetor $x \in \mathbb{R}_+^A$ é uma *solução viável do problema do transporte* (para D e b) se $Mx = b$, onde M é a matriz de incidência de D.

Dado um vetor $x \in \mathbb{R}^N$, onde N é um conjunto finito, denotamos por $\operatorname{supp} x$ o *suporte* de x, i.e., $\operatorname{supp} x := \{i \in N : x_i \neq 0\}$.

Considere um conjunto finito S e um conjunto $A \subseteq S$. Denotamos por χ^A o *vetor característico* de A, i.e., $\chi^A \in \{0,1\}^S$ é tal que $\chi^A_e := 1$ se $e \in A$ e 0 caso contrário.

Denotamos por $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não-negativos.

Exercícios

1. (25 pts.) Seja G um grafo e suponha que as arestas de G sejam pintadas de duas cores, digamos verde e amarelo. Dizemos que um caminho P em G é *alternante* se quaisquer duas arestas consecutivas em P tiverem cores diferentes.

Descreva um algoritmo polinomial que resolva o seguinte problema: dado um grafo bipartido G, uma coloração das arestas de G com duas cores e dois vértices $r, s \in VG$, encontrar um (r,s)-caminho alternante em G que tenha comprimento mínimo, ou concluir que tal caminho não existe. Lembre-se de mostrar que seu algoritmo funciona e que ele é polinomial.

2. (25 pts.) Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido simples, $c\colon A \to \mathbb{R}_+$ uma função custo e $r, s \in V$. Dizemos que uma função $y\colon V \to \mathbb{R}$ é uma *função potencial* se $y_u + c_{uv} \geq y_v$ para todo arco $uv \in A$.

(a) (5 pts.) Seja y uma função potencial e P um (r,s)-caminho dirigido em D. Mostre que $c(EP) \geq y_s - y_r$.

(b) (5 pts.) Seja y e P como no item anterior. Suponha que, para cada arco $uv \in A$ temos que $uv \notin EP$ ou $y_v - y_u = c_{uv}$. Mostre que P é um caminho de custo mínimo.

(c) (15 pts.) Considere o seguinte algoritmo, que sempre mantém uma função potencial durante sua execução:

(i) $y := \mathbf{0}$;
(ii) $A^= := \{uv \in A : y_v - y_u = c_{uv}\}$;
(iii) se existe um (r,s)-caminho dirigido P em $(V, A^=)$, devolva P. Senão, seja S o conjunto dos vértices $v \in V$ para os quais existe um (r,v)-caminho dirigido em $(V, A^=)$;
(iv) Se $\delta^{\text{out}}_D(S) = \emptyset$, pare: não existe (r,s)-caminho dirigido em D. Senão, seja $\epsilon := \min\{c_{uv} - y_v + y_u : uv \in \delta^{\text{out}}_D(S)\}$. Some ϵ em cada componente de y que corresponde a um vértice de $V \setminus S$ e vá para o passo (ii).

Mostre que o algoritmo acima é polinomial e que ou ele devolve um (r,s)-caminho dirigido de custo mínimo em D ou conclui que tal caminho não existe.

3. (20 pts.) Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido, $c\colon A \to \mathbb{R}$ uma função custo, $b\colon V \to \mathbb{R}$ uma função demanda e $x \in \mathbb{R}^A_+$ uma solução viável do problema do transporte para D e b. Descreva um algoritmo polinomial que transforma x numa solução árvore viável x' do problema do transporte em D com demandas dadas por b. Seu algoritmo deve ser tal que $\operatorname{supp} x' \subseteq \operatorname{supp} x$ e, se x é uma solução ótima do problema do transporte então x' também o é.

4. (20 pts.) Considere a matriz

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} & & & & & & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & -1 & -1 & & & & & & & 1 & \\ 1 & & & 1 & & & & & & & & -1 \\ & & & & 1 & -1 & & & & & -1 & \\ & & & & -1 & & & -1 & & 1 & & \\ & & & & & 1 & -1 & & & & & 1 \\ & -1 & 1 & & & & & & & -1 & & \\ -1 & 1 & & & & & & & 1 & & & \end{bmatrix}$$

e o vetor $b = (-1, 2, 3, -4, -5, 6, 7, -8)$.

(a) (10 pts.) Decomponha o problema

$$(2) \qquad \begin{array}{rrcl} \text{minimizar} & cx & & \\ \text{sujeito a} & Ax & = & b, \\ & x & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

em subproblemas.

(b) (10 pts.) Forneça uma instância do problema do transporte que possui a seguinte propriedade contra-intuitiva: se a demanda num dado vértice for diminuída em 1 e a oferta num outro vértice for diminuída em 1 então o custo da solução ótima aumenta.

Como devem ser escolhidos os vértices que terão suas demandas alteradas para que o fenômeno descrito acima ocorra? Justifique sua resposta.

5. (10 pts.) Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido, $b\colon V \to \mathbb{R}$ uma função demanda e $c\colon A \to \mathbb{R}$ uma função custo. Seja x^* uma solução árvore ótima para o problema do transporte em D com demandas dadas por b e custos dados por c. Para cada $v \in V$, seja y^*_v o preço associado ao vértice v na árvore correspondente a x^*. Mostre que $cx^* = \sum_{v \in V} y^*_v b_v$. [*Obs.:* **não** use o teorema da dualidade.]

6. (30 pts.) Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido, $b\colon V \to \mathbb{R}$ uma função demanda e $x\colon A \to \mathbb{R}_+$ uma solução viável do problema do transporte para D com demandas dadas por b. Mostre que existem caminhos dirigidos $P_1, \ldots, P_{k_1}$ e circuitos dirigidos $C_1, \ldots, C_{k_2}$ em D tais que:

(i) $k_1 + k_2 \leq |A|$;
(ii) cada caminho P_i começa num vértice u tal que $b_u < 0$ e termina num vértice v tal que $b_v > 0$;
(iii) existem números reais não-negativos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}$ e $\mu_1, \ldots, \mu_{k_2}$ tais que $x = \lambda_1 \chi^{P_1} + \cdots + \lambda_{k_1} \chi^{P_{k_1}} + \mu_1 \chi^{C_1} + \cdots + \mu_{k_2} \chi^{C_{k_2}}$.

Mostre também que se x for inteiro então podemos escolher os números λ_i e μ_j do item (iii) como sendo números inteiros.